Skizzenzeichnen als Strategie beim Lösen geometrischer Modellierungsaufgaben

Eine quantitative Untersuchung
in der Sekundarstufe I

Von der Fakultät Bildung

der Leuphana Universität Lüneburg zur Erlangung des Grades

Doktorin der Philosophie

Dr. phil.

genehmigte Dissertation von

Vanessa Bräuer

geboren am 19.02.1992 in Buchholz i. d. Nordheide

Eingereicht am: 31.07.2024

Mündliche Verteidigung (Disputation) am: 13.02.2025

Erstbetreuer: Prof. Dr. Dominik Leiß, Leuphana Universität Lüneburg
Zweitbetreuer: Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow,
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Erstgutachter: Prof. Dr. Dominik Leiß, Leuphana Universität Lüneburg
Zweitgutachter: Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow,
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Drittgutachter: Prof. Dr. Michael Besser, Leuphana Universität Lüneburg

Als Dissertation eingereicht unter dem Titel:
Skizzenzeichnen als Strategie beim Lösen geometrischer Modellierungsaufgaben. Eine quantitative Untersuchung in der Sekundarstufe I.

DOI: 10.48548/pubdata-1760

Veröffentlichungsjahr: 2025

DANKE

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Dominik Leiß, meinem Zweitbetreuer Stanislaw Schukajlow sowie Michael Besser, nicht nur Drittgutachter, sondern der meine Entscheidung für das Promotionsvorhaben wesentlich geprägt hat. Ohne die vielen anregenden Gespräche mit euch und eure konstruktiven Rückmeldungen wäre meine Dissertationsarbeit in dieser Form nicht möglich gewesen.

Für ihre Teilnahmebereitschaft an der Datenerhebung für meine Studie danke ich den Schülerinnen und Schülern, den Lehrkräften sowie Schulleitungen der IGS Buchholz, der Realschule Am Kattenberge, der Oberschule Jesteburg und des Gymnasiums am Kattenberge.

Außerdem danke ich meiner Familie, meinen Freunden, meinen Kolleginnen und Kollegen, ohne die ich dieses Projekt niemals hätte bewältigen können.

Besonders erwähnen möchte ich meine Kolleginnen und Kollegen des IMD, darunter Sarina, Laura, Maike, Jenny, Lena und Sebastian, mit denen ich viele gewinnbringende und erheiternde Gespräche sowie „AE-Sitzungen“ (😉) erleben durfte. Dörthe und Susi danke ich, dass sie immer ein offenes Ohr und für alles eine Lösung parat hatten.

Ein großer Dank gilt erneut Laura und Sarina sowie Svenja, Hanna und Elena für den wertvollen Austausch und die unzähligen produktiven und gleichzeitig unterhaltsamen Schreibsessions, ohne die ich meine Motivation niemals hätte aufrechterhalten können.

Meinen Freundinnen, darunter Sina, Lina, Ly, Mareike und Elisabeth, meiner Tante Anke und allen voran meiner Mutter danke ich von ganzem Herzen für die vielen unschätzbaren Rückmeldungen und Korrekturen zu meiner Dissertation sowie vielen weiteren Arbeiten, die mir die Tür zu meiner Promotion geöffnet haben.

Mein tiefster Dank gilt meiner Familie, im Besonderen meinen Eltern für ihre stetige Begleitung nicht nur während meiner Promotionszeit, sondern während meiner gesamten Ausbildungszeit: Ihr habt mir den Weg für meine Ziele geebnet, die ich ohne euch niemals hätte erreichen können.

Ich danke aufrichtig meinem Opa für seine ganz besondere Wertschätzung meines Promotionsprojektes und seinen spürbaren Stolz – du hast mir den Mut gegeben, durchzuhalten.

…und ich danke Pierre

für seinen unerschöpflichen Rückhalt.

Zusammenfassung

Visualisierungen bilden eine wesentliche Grundlage, vielleicht sogar den Kern des Verstehens von Mathematik. Unter den verschiedenen Arten der Visualisierung hat sich in der Praxis des Mathematikunterrichts vor allem das Zeichnen selbst erstellter Skizzen als vielversprechende Strategie erwiesen. Insbesondere beim Lösen geometrischer Modellierungsprobleme erscheint es für Lernende hilfreich, sich zunächst ein Bild von der Situation in Form einer selbst gezeichneten Skizze zu machen. Obwohl der unterrichtliche Einsatz und die kognitionspsychologischen Theorien zur Wirkungsweise der Strategie vielversprechend erscheinen, ist die Forschungslage ambivalent. In bisherigen Studien zeigen sich themenspezifische Unterschiede beim Skizzenzeichnen, die bislang nicht näher untersucht wurden. Eine qualitative Untersuchung liefert erste Hinweise darauf, dass das Skizzenzeichnen in verschiedenen Phasen des Modellierens unterschiedlich wirksam ist. Darüber hinaus scheint die Darstellung mathematischer Strukturen möglicherweise eine Rolle für die Wirksamkeit des Skizzenzeichnens zu spielen. Vereinzelt gibt es Hinweise auf personenbezogene Faktoren, die von Bedeutung sein können.

In Anknüpfung an diese Desiderate wurde eine quantitative Forschungsstudie entwickelt, deren Durchführung und Auswertung in der vorliegenden Arbeit dargelegt werden. Die Studie zeichnet sich durch ein Experimentalgruppendesign aus, bei dem eine Gruppe aufgefordert wurde, Skizzen zu Modellierungsaufgaben zu erstellen und die Aufgaben anschließend zu lösen, während die andere Gruppe die Aufgaben gezielt ohne Skizze lösen sollte. Die Studie ergab, dass Lernende infolge der Skizzenaufforderung sehr viele Skizzen zeichnen, dies jedoch nicht unmittelbar mit einer höheren geometrischen Modellierungsleistung einhergeht. Ein weiteres wesentliches Ergebnis bestand darin, dass das Skizzenzeichnen vor allem in den ersten Phasen des Modellierens (beim Verstehen, Strukturieren und Mathematisieren) hilfreich zu sein scheint, während es beim mathematischen Arbeiten weniger relevant ist. Zudem ist das Zeichnen *situativer* Skizzen offenbar eher beim Verstehen und Strukturieren wirksam, während beim Mathematisieren *schematische* Skizzen zur erfolgreichen Bewältigung beitragen. Unter den personenbezogenen Faktoren hat sich vor allem die geometriebezogene Leistung als ausschlaggebend erwiesen: Während die Skizzenaufforderung bei den leistungsschwächeren Lernenden tendenziell mit einer höheren Modellierungsleistung einhergeht, bewältigten die leistungsstärkeren Lernenden die Modellierungsaufgaben besser, wenn sie keine Skizze anfertigen sollten. Diese und weitere Ergebnisse werden vor dem Hintergrund bisheriger Forschungserkenntnisse kontrovers diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Visualisierungen und Repräsentationen bilden eine wesentliche Grundlage, vielleicht sogar den Kern des Verstehens von Mathematik (Duval, 1999, S. 3). In der Wissenschaft und der Fachdidaktik der Mathematik ist man sich einig, dass es ohne Repräsentationen kaum möglich ist, mathematische Inhalte zu erforschen, zu entwickeln und darüber zu kommunizieren. Insbesondere Visualisierungen, d. h. grafische Formen von Repräsentationen, wurden nicht immer als grundlegend für die Mathematik angesehen (Presmeg, 2006, S. 205). Aufgrund der zunehmenden Relevanz von Sozialität und Kommunikation wird Visualisierungen mittlerweile aber sowohl von Fachwissenschaftlerinnen und Fachwissenschaftlern als auch von Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern ein hoher Wert beigemessen (Alshwaikh, 2011, S. 241). Eine besondere Bedeutung haben Visualisierungen vor allem vor dem Hintergrund kognitionspsychologischer Theorien zur Informationsverarbeitung erlangt, in denen die grafische Präsentation bzw. Aufnahme von Informationen über den grafischen Kanal (neben der verbalen Präsentation bzw. Aufnahme) eine wesentliche Rolle spielt (Mayer, 2005; Paivio, 2007; Sweller, 2005a). Mehr noch: Grafischen Darstellungen werden in diesem Zusammenhang sogar besondere Vorteile zugeschrieben, da das mentale Modell, auf dessen Bildung die Verstehensprozesse ausgerichtet sind, strukturelle Analogien zu grafischen Darstellungen aufweist (Schnotz & Bannert, 2003). Insofern bieten grafische Darstellungen ein besonderes Potenzial, die Bildung des mentalen Modells zu unterstützen.

Unter den verschiedenen Arten der Visualisierung hat sich in der Praxis des Mathematikunterrichts vor allem das Zeichnen selbst erstellter Skizzen als vielversprechende Strategie erwiesen, die auch von Lehrwerken initiiert wird (Heinrich, Bruder, & Bauer, 2015, S. 286,290; Krauthausen & Scherer, 2007, S. 259). Insbesondere wenn es darum geht, Probleme aus der realen Welt – sogenannte Modellierungsprobleme – mit mathematischen Mitteln zu lösen, erscheint es hilfreich, sich zunächst ein Bild von der Situation in Form einer selbst gezeichneten Skizze zu machen. Anhand der Skizze können relevante Strukturen identifiziert werden, mittels derer adäquate mathematische Verfahren zur Lösung des Problems ausgewählt und durchgeführt werden können. Die Skizze kann außerdem als zentrales Hilfsmittel dienen, um kognitive Prozesse zu initiieren oder um diese zu entlasten (R. Cox, 1999; Larkin & Simon, 1987). Obwohl der unterrichtliche Einsatz und die kognitionspsychologischen Theorien zur Wirkungsweise der Strategie vielversprechend erscheinen, ist die Forschungslage noch lückenhaft und von ambivalenten Ergebnissen geprägt (Quillin & Thomas, 2015, S. 2; Van Meter & Garner, 2005).

In einigen Studien gibt es Hinweise darauf, dass vor allem die Qualität der selbst erstellten Skizzen, deren Abstraktionsgrad und möglicherweise auch die explizite Darstellung mathematischer Strukturen in der Skizze ausschlaggebend für deren Wirksamkeit in Lösungsprozessen sind (Bräuer, Leiss, & Schukajlow, 2021; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Rellensmann, Schukajlow, Blomberg, & Leopold, 2022; Van Essen & Hamaker, 1990). Darüber hinaus scheint die effektive Anwendung der Skizzenzeichenstrategie auch von personenbezogenen

Merkmalen der Lernenden, wie dem mathematischen Leistungsniveau oder der Präferenz für das Skizzenzeichnen, beeinflusst zu werden (Krawec, 2014; Uesaka, Manalo, & Ichikawa, 2007; Veloo, 1996). Allerdings gibt es nur wenige Studien, die sich speziell mit dem mathematischen Modellieren beschäftigen. Häufig werden Erkenntnisse aus der Textverstehens- oder Problemlöseforschung herangezogen, um die Wirkungsweise und Bedingungsfaktoren des Skizzenzeichnens beim mathematischen Modellieren zu erklären.

Inwieweit diese Erkenntnisse tatsächlich auf den Bereich des mathematischen Modellierens übertragbar sind, ist noch unklar. Zudem scheint die Anwendung und Effektivität des Skizzenzeichnens stark vom mathematischen Thema eines Modellierungsproblems abzuhängen (Bräuer et al., 2021). Auch in diesem Bereich ist weitere wissenschaftliche Evidenz dringend erforderlich. Abgesehen von ersten qualitativen Ansätzen (Rellensmann, 2019) ist zudem kaum erforscht, welche Rolle das Skizzenzeichnen in den verschiedenen Phasen des mathematischen Modellierungsprozesses spielt. Die vorliegende Arbeit knüpft an die beschriebenen Forschungsdesiderate an und zielt darauf ab, diese systematisch zu untersuchen und durch empirische Analysen neue Erkenntnisse zu generieren.

1.1 Zielsetzung

Das zentrale Anliegen der vorliegenden Arbeit besteht darin, mittels quantitativer Methoden in einer eigens entwickelten Studie zu erforschen, wie Lernende der Sekundarstufe I Skizzen zu geometrischen Modellierungsaufgaben zeichnen und in welchem Zusammenhang dies mit der erfolgreichen Bewältigung von Modellierungsprozessen steht. Um den Effekt des Skizzenzeichnens untersuchen zu können, wurde ein Design mit zwei Experimentalbedingungen entwickelt: Eine Gruppe wurde aufgefordert, jeweils eine Skizze zu erstellen, bevor sie eine Modellierungsaufgabe bearbeite, während die andere Gruppe aufgefordert wurde, die Modellierungsaufgabe *ohne* Skizze zu lösen. Um Erkenntnisse hinsichtlich der Übertragbarkeit zwischen verschiedenen mathematischen Themen gewinnen zu können, wurde die Untersuchung exemplarisch an den geometrischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Berechnung von Flächeninhalten geometrischer Figuren*[1] durchgeführt.

Zunächst wird untersucht, wie die Lernenden die Aufforderung zum Skizzenzeichnen hinsichtlich der als relevant befundenen Merkmale, d. h. hinsichtlich der Skizzenqualität, des Abstraktionsgrades und der expliziten Darstellung der mathematischen Strukturen, umsetzten. Vor allem mit der Untersuchung der Skizzenqualität und des Abstraktionsgrades als vielfach erforschte Skizzenmerkmale wird an die bestehende Forschung angeknüpft, wohingegen die Analyse der expliziten Darstellung mathematischer Strukturen aufgrund der fragmentarischen Forschungsgrundlage eine eher explorative Ausrichtung hat.

[1] Für bessere Lesbarkeit wird das Thema *Berechnung von Flächeninhalten geometrischer Figuren* im Folgenden kurz als Thema *Flächeninhalte* bezeichnet. Außerdem werden die Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* als die zentralen geometrischen Themen der vorliegenden Studie in der gesamten Arbeit kursiv geschrieben.

Anschließend erfolgt eine Analyse der Zusammenhänge zwischen den Skizzenmerkmalen und der erfolgreichen Bewältigung des Modellierungsprozesses im Ganzen, aber auch einzelner Modellierungsphasen. Während Ersteres bereits vielfach untersucht wurde, wird erwartet, dass insbesondere die spezifische Untersuchung der Zusammenhänge mit den einzelnen Modellierungsteilprozessen zur Verkleinerung der diesbezüglichen Forschungslücke beiträgt.

Zur Annäherung einer kausalen Interpretation des Skizzenzeichnens beim mathematischen Modellieren wird weiterhin analysiert, wie sich die Modellierungsleistung zwischen der Experimentalbedingung mit Aufforderung zum Skizzenzeichnen und der Bedingung mit Zeichenverbot unterscheidet. Um dabei Hinweise auf relevante Bedingungsfaktoren zu erhalten, werden die Analysen zwischen den Experimentalbedingungen zusätzlich für verschiedene Gruppen hinsichtlich der Hintergrundvariablen durchgeführt.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sollen dazu beitragen, aus der bisherigen Forschung abgeleitete und bisher wenig fundierte Hypothesen hinsichtlich des Skizzenzeichnens beim mathematischen Modellieren quantitativ zu prüfen. Es wird erwartet, dass auf diese Weise Forschungslücken verringert und die Übertragbarkeit bisheriger Befunde weiter vorangebracht werden kann.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in einen theoretischen Teil, in dem die wissenschaftlichen und empirischen Grundlagen der Arbeit erläutert werden, einen empirischen Teil, in dem die darauf basierend eigens entwickelte Studie vorgestellt wird, sowie den Diskussionsteil, in dem die Ergebnisse der Studie vor dem Hintergrund der bisherigen Forschung gedeutet und Schlussfolgerungen daraus abgeleitet werden.

Der theoretische Teil beginnt mit einer wissenschaftlichen Einbettung und Abgrenzung des Skizzenbegriffs in bestehende Kategorien, die sich im Hinblick auf Darstellungen in der bisherigen Forschung etabliert haben (Kapitel 2). Da die vorliegende Arbeit neben dem wissenschaftlichen Hintergrund auch einen maßgeblichen fachdidaktischen Bezug hat, wird in diesem Abschnitt außerdem die Rolle von Visualisierungen beim Lehren und Lernen von Mathematik erläutert. Das Kapitel schließt mit einer Definition des Skizzenbegriffs unter Bezugnahme auf die vorherigen Ausführungen. Der zweite Abschnitt des Theorieteils (Kapitel 3) befasst sich mit dem Zeichnen von Skizzen als Lösungsstrategie, wobei diese zunächst im Rahmen der Forschung zum Problemlösen thematisiert wird, weil sie in diesem Bereich schon ausführlicher erforscht wurde als beim mathematischen Modellieren. Außerdem werden kognitionspsychologische Theorien vorgestellt, die sich dazu eignen können, die kognitiven Prozesse beim Zeichnen der Skizze und dessen Wirkung im Lösungsprozess zu erklären. Im Anschluss erfolgt eine Darstellung der Erkenntnisse aus bisherigen empirischen Forschungsarbeiten zum Skizzenzeichnen in Lösungsprozessen sowie zu Einflussfaktoren, die sich dabei als relevant erwiesen haben. Der darauffolgende Abschnitt widmet sich dem Themenkomplex des mathematischen Modellierens (Kapitel 4), da die Anwendung des

Skizzenzeichnens in der vorliegenden Arbeit speziell in diesem Bereich untersucht wird. Nachdem auch dieses Thema aus begriffstheoretischer, wissenschaftlicher und didaktischer Perspektive beleuchtet wurde, wird zum Abschluss des Theorieteils die besondere Relevanz des Skizzenzeichnens beim mathematischen Modellieren hergeleitet.

Als verbindendes Element zwischen dem theoretischen und dem empirischen Teil der Arbeit werden im nächsten Abschnitt die forschungsleitenden Fragestellungen der vorliegenden Arbeit präsentiert sowie die zu prüfenden Forschungshypothesen aus den bestehenden Forschungserkenntnissen hergeleitet (Kapitel 5). Im ersten Abschnitt des empirischen Teils werden das für die vorliegende Arbeit gewählte Untersuchungsdesign sowie die eigens dafür entwickelten Erhebungsinstrumente vorgestellt (Kapitel 6). Darauf folgt ein Abschnitt zur Auswertung der Daten (Kapitel 7), in dem zunächst der Transfer der Schülerantworten und Bearbeitungsprozesse in statistische Daten beschrieben sowie die verwendeten statistischen Analyseverfahren erläutert werden. Die Darlegung der Ergebnisse aus diesen statistischen Analysen erfolgt im darauffolgenden Abschnitt (Kapitel 8), wobei hier zunächst allgemeine Ergebnisse zur Probandengruppe und den Modellierungsprozessen vorgestellt werden und anschließend anhand der Struktur der Forschungsfragen die Ergebnisse zu den Skizzenmerkmalen, zu den Zusammenhängen mit der Modellierungsleistung, zur expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze sowie zum Effekt der Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot präsentiert werden.

Den Abschluss der Arbeit bildet die Diskussion (Kapitel 9), in der – erneut anhand der Struktur der Forschungsfragen – die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit vor dem Hintergrund kognitionspsychologischer Theorien und bisheriger empirischer Erkenntnisse eingeordnet und erläutert werden. Darüber hinaus wird die Vorgehensweise in der vorliegenden Studie kritisch beleuchtet und aus den Ergebnissen werden empirische, theoretische und didaktische Implikationen abgeleitet. Der abschließende Abschnitt gibt einen kurzen Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsschwerpunkte, die sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben (Kapitel 10).

2 Visualisierungen in der Mathematik

„Representation and visualization are at the core of understanding in mathematics."

(Duval, 1999, S. 3)

Gemäß Duval bilden Visualisierungen und Repräsentationen dem Zitat zufolge das Herzstück des Verstehens in der Mathematik. Während Repräsentationen allgemein als Medium für einen semantischen Gehalt verstanden werden, werden Visualisierungen häufig enger gefasst als spezifisch *depiktionale* Repräsentationen (Kapitel 2.1 und 2.2). Eine Form der Visualisierungen hat sich sowohl in der Textverstehens-, der Strategie- und der Problemlöseforschung als besonders vielversprechend erwiesen, um Lernende bei der Rezeption von Informationen oder beim Lösen von Problemen zu unterstützen: der Einsatz selbst gezeichneter Skizzen. Um selbst erstellte Skizzen als zentralen Gegenstand der vorliegenden Untersuchung wissenschaftlich einordnen zu können, wird zunächst zwischen externalen und mentalen Visualisierungen unterschieden (Kapitel 2.3), ebenso wie eine Abgrenzung zu deskriptionalen Darstellungen erforderlich ist (Kapitel 2.4). Bei Skizzen kann es sich um vorgefertigte Darstellungen handeln, die als Informationsquelle zur Verfügung gestellt werden, oder aber um eigenhändig erstellte Produkte (Kapitel 2.5). Diese Spezifikationen sowie die Relevanz von Visualisierungen für mathematische Lösungs- und Lernprozesse (Kapitel 2.6) werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

2.1 Repräsentationen in der Mathematik

In der Mathematik spielen Repräsentationen als Medien für semantische Gehalte insofern eine entscheidende Rolle, dass mathematische Objekte aufgrund ihrer Abstraktheit nicht direkt zugänglich sind (Duval, 2006). Sowohl Fachmathematiker als auch Lernende sind auf Repräsentationen angewiesen, um sich mit mathematischen Inhalten auseinandersetzen zu können (Duval, 2006). Somit bieten Repräsentationen in der Mathematik entscheidende Zugangsmöglichkeiten und sind darüber hinaus wichtige Werkzeuge für mathematische Denk- und Lösungsprozesse (Dreher, 2013, S. 215).

In der vorliegenden Arbeit folgt das Verständnis von Repräsentationen der weit gefassten Definition nach Palmer (1978, S. 262): „A representation is, first and foremost, something that stands for something else". Das Hauptcharakteristikum einer Repräsentation besteht demnach darin, dass sie für etwas anderes steht (Gerald Goldin & Shteingold, 2001, S. 3; Palmer, 1978, S. 262). Zwischen der repräsentier*ten* Welt und der repräsentier*enden* Welt besteht eine konzeptuelle Verbindung (Kaput, 1987, S. 23; Palmer, 1978, S. 262), indem mindestens eine Eigenschaft der Repräsentation mit einer Eigenschaft des Gegenstandes bzw. der realen Situation korrespondiert. Gleichzeitig kann ein Zeichen immer nur ausgewählte Aspekte des realen Gegenstands bzw. der Situation in Bezug auf eine bestimmte Idee repräsentieren, die Pierce als Grund der Repräsentation bezeichnet (Jorna & Van Heusden, 2003, S. 117). Pierce ergänzt diese Definition durch den Interpretanten, indem er erklärt:

> „I define a sign as anything which is so determined by something else, called its object, and so determines an effect upon a person, which effect I call its interpretant, that the later is thereby mediately determined by the former." (Peirce, 1998, S. 478)

Der Interpretant ist demnach die Person, auf den die Repräsentation wirkt.

Man findet kaum ein vergleichbares, so umfassendes und mächtiges Konzept wie das der Repräsentation, was wohl darauf zurückzuführen ist, „that we all think, although we still do not know exactly how" (Radford, 2002, S. 219). Das Konstrukt der Repräsentation ist das zentrale Hilfsmittel, um über die im Zitat erwähnten, nicht abschließend erklärbaren Denkprozesse aber auch deren Externalisierungen kommunizieren zu können (Radford, 2002, S. 219). Einige Autorinnen und Autoren vermeiden den Begriff der Repräsentation aufgrund seiner Vieldeutigkeit und bevorzugen Begriffe wie „Inskription" (z. B. Presmeg, 2006, S. 207). In der vorliegenden Arbeit wird dennoch der Begriff „Repräsentation" verwendet, um eine Einbettung in den diesbezüglichen Diskurs zu ermöglichen. Das Verständnis von Repräsentation ist in dieser Arbeit somit weiter gefasst als das der Visualisierung. Unter Visualisierung werden speziell *depiktionale* Darstellungen bzw. der Umgang damit verstanden, während Repräsentationen sowohl *enaktiv, ikonisch* (d. h. depiktional) *oder symbolisch* sein können (Bruner, 1964, S. 1).

2.2 Visualisierung – Begriffsdefinition und Einordnung

Der Begriff „Visualisierung" hat eine große Vielfalt an Bedeutungen, die auch im Bereich der Mathematikdidaktik relevant sind. Neben verschiedenen disziplinspezifischen Perspektiven wie der „mathematical visualization", der Philosophie der Mathematik oder der Psychologie[2], liegt der Fokus der vorliegenden Arbeit auf dem Verständnis von Visualisierung in der Mathematikdidaktik. Diese hat die verschiedenen, genannten Perspektiven integriert und fokussiert darüber hinaus die Funktion von Visualisierungen beim Begriffserwerb, Beweisen und Problemlösen (Kadunz, 2000, S. 280), sowie den Repräsentationswechsel im Kontext des Lehrens und Lernens (Kadunz, 2015; Presmeg, 2006).

Visualisierungen als externe depiktionale Repräsentationen dienen als Schlüsselmedien für das Verstehen, aber auch für die Wahrnehmung, das Argumentieren sowie die Interaktion mit den riesigen Mengen an Daten in unserer heutigen von Technik geprägten Welt (Peng, Xue, Wang, Niu, & Chen, 2017, S. 285). Das Wesen der Visualisierung liegt nicht nur darin, Informationen zu vermitteln, sondern sie dient auch als Grundlage für Schlussfolgerungen und Generierung neuen Wissens (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 3; Peng et al., 2017, S. 285). Die Untersuchung der kognitiven Funktionen von Visualisierungen hat eine lange Tradition, die bis in die altbabylonischen, ägyptischen und griechischen Zivilisationen zurückreicht (Alshwaikh, 2011, S. 240; Oestermeier & Eitel, 2008, S. 2). Allerdings wurde die Visualisierung nicht immer

[2] Für detaillierte Ausführungen zum Verständnis von „Visualisierung" in den jeweiligen Disziplinen siehe: Schmitz 2017, S. 18.

als grundlegend angesehen (Presmeg, 2006, S. 205). In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde der Thematik in der mathematikbezogenen Bildungsforschung kaum Aufmerksamkeit geschenkt (Presmeg, 2006, S. 231), da die Mathematik als eine von Abstraktion und Formalismen geprägte Disziplin galt. Erst mit dem Einzug des Konstruktivismus, der den Einfluss des Behaviorismus zurückdrängte, markierten die 1980er Jahre einen Wendepunkt, durch den ein zunehmendes Interesse an Visualisierungen forciert wurde (Alshwaikh, 2011, S. 240; Presmeg, 2006, S. 206). Laut Alshwaikh (2011, S. 240) hegen noch heute viele Mathematiker Vorurteile gegenüber Visualisierungen, da diese als unzuverlässig, wenig stringent und damit nicht als „echt" mathematisch gelten (Dreyfus, 1991). Diese Perspektive hat Auswirkungen bis in den Mathematikunterricht, in dem Schülerinnen und Schüler Visualisierungen eher wenig Beachtung schenken und diese noch weniger eigenständig verwenden oder erstellen (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 3 sowie Kapitel 2.6).

Erst aufgrund neuerer Entwicklungen in der Mathematikdidaktik, vor allem auch durch die Auseinandersetzung mit Themen wie Kommunikation und Sozialität in der Mathematik, wird die rein formale und symbolische Ausrichtung der Mathematik verstärkt angezweifelt und die Bedeutung von Visualisierung zunehmend anerkannt (Alshwaikh, 2011, S. 241). Nach diesem neueren Verständnis ist die Verwendung verbaler Sprache und abstrakter Symbole nur *ein* Modus der Kommunikation in der Mathematik als multimodale Disziplin. Als gleichermaßen basal gilt die Visualisierung mathematischer Inhalte in Form von Graphen, Diagrammen oder Skizzen (Alshwaikh, 2011, S. 35 f.; Mayer & Gallini, 1990, S. 715; Stylianou, 2011, S. 31). Damit haben sich Visualisierungen zu einem wesentlichen Themenbereich in der Bildungsforschung entwickelt (Presmeg, 2006, S. 229–232; Stylianou, 2011, S. 31).

In der Literatur lassen sich zahlreiche Definitionen zum Begriff „Visualisierung" finden, die jeweils unterschiedliche Aspekte (z. B. mentale und/ oder externale Visualisierungen, die verschiedenen Tätigkeiten im Hinblick auf Visualisierungen) hervorheben und sich in ihrer Spezifität unterscheiden.[3] So betonen z. B. Zimmermann und Cunningham (1991, S. 1), dass Visualisierung die Tätigkeiten „producing" und „using" umfasst, also sowohl den Prozess des Erstellens einer Visualisierung als auch die Verwendung dieser. Außerdem erwähnen die Autoren, dass Visualisierungen computergeneriert oder von Hand erstellt (wie selbst gezeichnete Skizzen) sein können. Duval (2014, S. 159 f.) unterscheidet dagegen zwischen dem *Visualisieren* als Erkennen von mathematisch Relevantem und dem *Repräsentieren* als Verwenden von Visualisierungen. Bishop (1983, S. 182), als Vertreter der Psychologie, versteht Visualisierung als mentales Bilden und Verändern von Objekten in der Vorstellung. Kadunz (2000, S. 280) betont vor allem den Wechsel zwischen propositionalen, symbolhaften Darstellungen und analogen, bildhaften Darstellungen als charakteristisches Merkmal von Visualisierungen.

[3] Für eine detaillierte Übersicht und Systematisierung der unterschiedlichen Definitionen siehe: Schmitz, 2017, S. 21–34.

Für die vorliegende Arbeit, deren Fokus auf selbst erstellten, externalen Visualisierungen in Form von Skizzen beim Lösen mathematischer Modellierungsaufgaben liegt, erscheint die Definition von Arcavi (2003, S. 217) als nützlich:

> „Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.“ (Arcavi, 2003, S. 217)

Visualisierung wird hier nicht nur als *Produkt*, sondern auch als *Prozess* verstanden – so wie es auch beim Zeichnen einer Skizze um das Endprodukt der Skizze selbst, aber auch um den Prozess des Erstellens geht. Die Definition beinhaltet weiterhin die verschiedenen Tätigkeiten des Erstellens, Interpretierens, Verwendens und Reflektierens, die ebenfalls beim Skizzenzeichnen eine Rolle spielen. Die Definition fokussiert auf *depiktionale* Darstellungen und zählt gleichzeitig verschiedene Arten depiktionaler Darstellungen auf, die auch die Vielfalt möglicher Skizzen erfasst. Außerdem werden sowohl *interne Visualisierungen* in der Vorstellung als auch *externe Visualisierungen* auf dem Papier eingeschlossen, die gleichermaßen bei der Betrachtung des Skizzenzeichnens aus kognitionspsychologischer Perspektive entscheidende Rollen spielen (vgl. Kapitel 2.3 und 3.2). Das letzte wesentliche Element der Definition von Arcavi (2003, S. 217) sind die Ziele des Einsatzes von Visualisierungen, wie z. B. das Nachdenken über und die Entwicklung von zuvor unbekannten Ideen sowie die Förderung des Verstehens. Auch diese spielen in der vorliegenden Arbeit eine wesentliche Rolle, wenn es um die Wirkung selbst erstellter Skizzen als Lösungsstrategie im Modellierungsprozess geht (vgl. Kapitel 4.8).

2.3 Externale und mentale Repräsentationen

„Thus, the numbers are objects that result [...] from an amalgam of two activities, thinking (imagining actions) and scribbling (making ideal marks), which are inseparable: mathematicians think about marks they themselves have imagined into potential existence.“

(Rotman, 2006, S. 125)

Anhand des Beispiels von Zahlen verdeutlicht Rotman hier die grundlegende Bedeutung des Zusammenspiels zwischen dem Denken und Schreiben für die Mathematik. Hierbei wird deutlich, dass sich zwei Ebenen mathematischer Repräsentationen unterscheiden lassen: die ***interne mentale Ebene der Vorstellung*** und die ***externe Ebene der Darstellungen*** auf dem Papier oder einem anderen Medium. *Externe Darstellungen* sind unmittelbar wahrnehmbare, materielle Zeichenkonfigurationen bzw. Notationen, während *interne Repräsentationen* als rein hypothetische, mentale Konfigurationen zu verstehen sind, die nur in der Vorstellung existieren (G. A. Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1998, S. 267).

Auch speziell für Visualisierungen kann diese Unterscheidung getroffen werden, da Visualisierungen sowohl mit Hilfe externer Medien äußerlich wahrnehmbar dargestellt werden können, als auch in Form mentaler depiktionaler Vorstellungsbilder vorliegen können. In der Mathematik sind beide Formen der Visualisierung wesentlich für das Verstehen und Erlernen mathematischer Konzepte. So umfasst das Konstrukt *räumlicher Fähigkeiten* sowohl das Erstellen und Manipulieren visueller externer Darstellungen als auch die Konstruktion mentaler Visualisierungen in der Vorstellung (R. D. L. Booth & Thomas, 1999, S. 169).

Wichtig ist die Unterscheidung zwischen externalen und mentalen Repräsentationen unter anderem auch für die Text- und Bildverstehensforschung, in der davon ausgegangen wird, dass aufgrund externaler Informationsquellen interne, mentale Repräsentationen dazu gebildet werden (Mayer, 2005; Paivio, 2007; Schnotz & Bannert, 2018). Dabei können sowohl die externalen als auch die mentalen Repräsentationen von deskriptionaler, d. h. verbaler, oder depiktionaler Form sein (Kapitel 2.4). Es wird angenommen, dass zwischen den externen und internen Repräsentationen wichtige interaktive Prozesse stattfinden, die das Verstehen und Lernen von Informationen beeinflussen (G. A. Goldin & Kaput, 1996, S. 401). [4]

Aber nicht nur bei der Internalisierung von Informationen, sondern auch bei der Externalisierung nimmt das Zusammenspiel von internen und externen Repräsentationen eine wesentliche Rolle ein. So können individuelle, mentale Modelle durch verschiedene Handlungen des Sprechens, Schreibens, Zeichnens oder der Bearbeitung externer Medien veräußerlicht werden (G. A. Goldin & Kaput, 1996, S. 401). Durch diese Veräußerlichung wird die zuvor mental gebildete Repräsentation zum einen konkretisiert, zum anderen kann sie auf diese Weise auch Grundlage sozialer Interaktion werden (Leenaars, Van Joolingen, & Bollen, 2013, S. 83). Im Kontext schulischer Bildung bedeutet dies, dass Lernende anhand externalisierter Repräsentationen, die zuvor mental gebildet wurden, Lerninhalte für sich selbst besser verdeutlichen können oder aber sich mit anderen Lernenden oder der Lehrkraft über ihre Ideen anhand der Darstellungen austauschen können (Leenaars et al., 2013, S. 83). Die bereits erwähnten interaktiven Prozesse, die zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen ablaufen, finden meist simultan in beiden Richtungen statt: Sowohl vom externen Modell ausgehend hin zum internen Modell, als auch von der internen Repräsentation hin zur externen Darstellung (G. A. Goldin & Kaput, 1996, S. 401) (vgl. Kapitel 3.2).

2.4 Abgrenzung zu deskriptionalen Repräsentationen

Neben der Unterscheidung zwischen externalen und mentalen Repräsentationen, wird sowohl in der Wissenschaft als auch der Fachdidaktik eine weitere wesentliche Kategorisierung vorgenommen: Die Unterscheidung zwischen *deskriptionalen Repräsentationen* (kurz: Deskriptionen) und *depiktionalen Repräsentationen* (kurz: Depiktionen) (Larkin & Simon, 1987; Peirce, 1906; Schnotz, 2005, S. 52 ff.; Schnotz & Bannert, 2003, S. 143 f.).

Deskriptionale Repräsentationen werden als Symbole bzw. konventionelle Zeichen im Sinne von Peirce (1906) verstanden, also als Zeichen, die keinerlei äußere Ähnlichkeit mit dem realen

[4] Die erwähnten interaktiven Prozesse werden im Kapitel 3.2 detailliert beschrieben.

Objekt aufweisen, sich durch eine arbiträre Struktur auszeichnen und deren Relation zum repräsentierten Objekt ausschließlich durch Konventionen gebildet ist (Schnotz & Bannert, 2003, S. 143). Dazu gehören die natürliche Sprache, geschriebene Texte, mathematische Formeln sowie logische Ausdrücke (Schnotz & Bannert, 2003, S. 143). So verweisen beispielsweise Substantive auf Entitäten, während Verben und Präpositionen diese zueinander in Beziehung setzen (Schnotz, 2014, S. 47; Schnotz & Bannert, 2003, S. 143). Bei arithmetischen Ausdrücken werden Zeichen wie „=“, „>“, „<“ genutzt. Dagegen werden ***depiktionale Repräsentationen*** aus ikonischen Zeichen gebildet, die nicht (nur) durch Konventionen bestimmt werden, sondern eine äußere Ähnlichkeit oder strukturelle Gemeinsamkeiten mit dem repräsentierten Objekt aufweisen (Schnotz, 2005, S. 52). Dazu gehören Fotografien, Gemälde, Zeichnungen und Skulpturen, aber auch Graphen und Diagramme. Diese enthalten keine Symbole zur Darstellung von Beziehungen, vielmehr ermöglichen die spezifischen räumlichen Strukturen ein Ablesen relationaler Informationen. In der vorliegenden Arbeit werden Deskriptionen synonym auch als *sprachliche* bzw. *symbolische Darstellung* bezeichnet, während depiktionale Darstellungen als gleichbedeutend mit *grafischen* oder *ikonischen Darstellungen* verstanden werden. Die Unterscheidung zwischen deskriptionalen und depiktionalen Darstellungen kann auch auf interne Repräsentationen übertragen werden (vgl. Kapitel 2.3 und 3.2).

Kadunz (2000, S. 290 f.) hat im Hinblick auf das Repräsentationsprinzip *depiktionaler* Darstellungen drei Begriffe vorgeschlagen, um die Beziehung zwischen Ikon und repräsentiertem Objekt zu beschreiben: Kopie, Ähnlichkeit und Analogie. Kadunz postuliert selbst, dass weder der Begriff der Kopie noch der Begriff der Ähnlichkeit dazu geeignet sind, dieses Prinzip zu beschreiben. Während der Begriff der ***Kopie*** suggeriert, dass *alle* Aspekte des realen Objekts aufgenommen würden (Kadunz, 2000, S. 290), ist der Begriff der ***Ähnlichkeit*** ungeeignet, da insbesondere Darstellungen, bei denen die Beziehung zwischen der Depiktion und dem realen Objekt struktureller Natur ist, hierbei keine Berücksichtigung fänden (Kadunz, 2000, S. 290). Der Begriff der ***Analogie*** verdeutlicht hingegen, dass zwischen dem ikonischen Zeichen und dem Objekt eine Beziehungs- oder Strukturverwandtschaft besteht: Die Beziehungen, die im Bezeichneten bestehen (z. B. die Entfernung nimmt zu), liegen auch in der Repräsentation vor (z. B. der Funktionsgraph steigt) (Kadunz, 2000, S. 291). Deshalb kann eine Depiktion auch als *analoge Repräsentation* verstanden werden (Kadunz, 2000, S. 290).

Häufig werden zusätzlich verschiedene Arten von Depiktionen hinsichtlich ihres Abstraktionsgrades unterschieden [5]: *Realistische Depiktionen* nutzen konkrete Formen der Strukturverwandtschaft (in diesem Fall kann dann von Ähnlichkeit gesprochen werden), während bei *logischen Depiktionen* abstrakte strukturelle Übereinstimmungen genutzt werden (Schnotz, 2010, S. 927 f.). Dagegen sind die strukturellen Beziehungen zwischen den Entitäten in einer deskriptionalen Darstellung gar nicht zu erkennen (z. B. die Zunahme einer Entfernung in einer mathematischen Funktionsgleichung), sondern können nur durch das Auslesen der

[5] Ausführliche Erläuterungen sowie die in der vorliegenden Arbeit genutzte Unterscheidung verschiedener depiktionaler Darstellungen hinsichtlich ihres Abstraktionsgrades folgen in Kapitel 3.4.5).

Symbole entnommen werden oder bleiben ggf. unbestimmt (R. Cox, 1999, S. 350). Die Relationen werden bei deskriptionalen Darstellungen „jeweils definiert und insofern von außen in die Repräsentation ‚eingebaut'" (Schnotz, 1994, S. 150).

Der Vorteil deskriptionaler Darstellungen besteht darin, dass diese abstrakt, allgemein, ausdrucksmächtig und damit speziell dafür geeignet sind, z. B. Negationen und Disjunktionen sowie abstrakte Phänomene auszudrücken (R. Cox, 1999, S. 350; Schnotz, 2014, S. 48; Schnotz & Bannert, 2018, S. 887). Dagegen zeichnen sich depiktionale Repräsentationen vor allem dadurch aus, dass sie eine verhältnismäßig direkte Konstruktion eines mentalen Modells ermöglichen, „da die externe und die interne Repräsentation jeweils auf dem gleichen Repräsentationsprinzip basieren" (Schnotz, Zink, & Pfeiffer, 1996, S. 201). Bei deskriptionalen Darstellungen ist hingegen ein Repräsentationswechsel von der symbolischen externen Darstellung zum analogen mentalen Modell notwendig (Schnotz et al., 1996, S. 201). Außerdem sind Depiktionen notwendigerweise informationell vollständig, indem beispielsweise ein Objekt nicht nur in seiner Form, sondern auch in bestimmter Größe, Orientierung und Ausrichtung zu weiteren Objekten dargestellt werden muss (R. Cox, 1999, S. 350; Schnotz & Bannert, 2018, S. 888). Deshalb sind Informationen in Depiktionen häufig explizit, während sie in deskriptionalen Darstellungen nur implizit enthalten sind und mit ggf. großem Aufwand erarbeitet werden müssen (Larkin & Simon, 1987, S. 65, 98). Außerdem zeichnen sich depiktionale Darstellungen durch interne Konsistenz aus, da sich die Entitäten innerhalb einer Darstellung nicht widersprechen können (Schnotz & Bannert, 2018, S. 888). Ein weiterer Vorteil von Depiktionen liegt darin, dass die Informationen darin räumlich gruppiert und nicht – wie bei Deskriptionen – sequenziell angeordnet sind (Larkin & Simon, 1987, S. 65, 98; Schnotz & Bannert, 2018, S. 888). Indem auf jedes Element simultan zugegriffen werden kann, können die Informationen direkt entnommen werden (Kautschitsch, 2015, S. 144) und die Suche von Informationen sowie das Ziehen von Inferenzen wird auf diese Weise erleichtert (R. Cox, 1999, S. 350; Kautschitsch, 2015, S. 144; Schnotz & Bannert, 2018, S. 888).

In der jüngsten Forschung zum Text- und Bildverstehen wird angenommen, dass sich erfolgreiche Problemlöseprozesse durch ein enges Wechselspiel deskriptionaler und depiktionaler Darstellungen auszeichnen (Schnotz, 2014, S. 48). Im Umkehrschluss bedeutet das jedoch auch, dass durch mangelnde Verknüpfung zwischen den zwei Repräsentationsarten Schwierigkeiten im Lösungsprozess verursacht werden können (Schnotz, 2014, S. 48). Insbesondere in der Mathematik und speziell im Mathematikunterricht sind viele Inhalte durch die Verwendung unterschiedlicher Repräsentationssysteme geprägt, die miteinander kombiniert werden (Kaput, 1998, S. 268). Deshalb erscheint es sinnvoll, Strategien zu fördern, welche die Wechselwirkungen zwischen deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationsformen verstärken.

Wenn selbst erstellte Skizzen als Strategie zur Lösung einer Modellierungsaufgabe genutzt werden, findet die Übersetzung einer deskriptionalen Darstellung (des Aufgabentextes) in eine depiktionale Darstellung (die Skizze) statt. In der Modellierungsaufgabe wird in symbolischer Form ein Sachverhalt dargelegt, für den ein geeignetes mathematisches Modell entwickelt werden muss, um die Aufgabe zu lösen. Vor dem Hintergrund der beschriebenen Theorie ist anzunehmen, dass Skizzen als informationell vollständige und konsistente Depiktionen dazu beitragen, durch die räumliche Anordnung und das Explizitmachen von Informationen den Aufbau eines analogen mentalen Modells zu unterstützen sowie die Informationsentnahme und das Ziehen von Inferenzen zu erleichtern.[6]

2.5 Vorgefertigte und selbst erstellte Darstellungen

Eine wichtige Unterscheidung bezüglich des Einsatzes von Darstellungen in Lernprozessen besteht darin, ob diese von den Lernenden selbständig konstruiert werden oder von Lehrenden bzw. dem Lernmaterial vorgegeben sind. In der Wissenschaft wird die Frage, ob es beim mathematischen Arbeiten und Problemlösen hilfreicher ist, vorgefertigte Darstellungen zu nutzen oder Darstellungen selbst zu erstellen, kontrovers diskutiert (Fagnant & Vlassis, 2013; Gravemeijer, 1997; Reuter, 2016; Terwel, Van Oers, Van Dijk, & Van den Eeden, 2009; Verschaffel, Schukajlow, Star, & Van Dooren, 2020). Auch wenn Einigkeit darüber besteht, dass das Lernen ein aktiver, konstruktiver Prozess ist, existieren unterschiedliche Auffassungen darüber, wie solche Lernaktivitäten am besten initiiert werden (Mayer, 2009; Reuter, 2016; Sweller, Van Merrienboer, & Paas, 1998). Die Diskussion ist geprägt von der ***instruktionalistischen Perspektive*** auf der einen Seite, die der Überzeugung ist, dass aktives und konstruktives Handeln nicht notwendigerweise hohe kognitive Aktivität impliziert (Mayer, 2009; Sweller, 1988, S. 273). Im Gegenteil: Vertreter der instruktionalistischen Sicht sind der Auffassung, dass solches Handeln sogar hinderlich sein kann, da es zu oberflächlichen, inhaltslosen Aktivitäten oder einer Stabilisierung von Irrwegen führen kann (Mayer, 2009; Sweller, 1988, S. 273). Aus dieser Sicht ist es sinnvoll, Lernenden vorgefertigte, ideale Darstellungen zur Verfügung zu stellen, die sie für mathematische Lösungsprozesse nutzen können.

Dem gegenüber steht die ***konstruktivistische Sicht***, der zufolge aktives Handeln – wie das selbständige Erstellen einer Darstellung – eine wesentliche Grundlage ist, um eine intensive Auseinandersetzung und damit den Erkenntnisgewinn zu fördern (diSessa, 2004; Fagnant & Vlassis, 2013; Reuter, 2016). Der Tätigkeitstheorie zu Folge werden erfolgreiche Lernprozesse stets durch praktische Handlungen initiiert. Zurückzuführen ist diese Sichtweise auf die späten Ansichten von Vigotsky, der als Begründer der Tätigkeitstheorie einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis von Entwicklungs- und Lernprozessen lieferte (W. M. Roth, 2018, S. 984).

Über die zwei Extreme der vorgefertigten und vollkommen selbst erstellten Darstellungen hinaus sind verschiedene Grade an Unterstützung beim Erstellen von Darstellungen möglich. Die Unterstützung beim Konstruktionsprozess kann als Kontinuum verstanden werden, an dessen einem Ende die Arbeit mit vorgegebenen Darstellungen steht (stärkste Unterstützung) und an dessen gegenüberliegendem Ende das vollkommen selbständige Erstellen von Darstellungen

[6] Die kognitiven Funktionen selbst gezeichneter Skizzen sowie deren konkrete Wirkungsweise beim mathematischen Modellieren werden in den Kapiteln 3.2.2 und 4.8 erläutert.

anhand verbaler Beschreibungen (keine Unterstützung) steht (Quillin & Thomas, 2015, S. 2 f.; Van Meter & Garner, 2005, S. 305 ff.). Im mittleren Bereich des Kontinuums können verschiedene Unterstützungsformen verortet werden wie z. B. konkrete Hinweise zum Erstellen einer Darstellung (geringe Unterstützung) bis hin zu Bausteinen, die nur noch zu einer Darstellung zusammengesetzt werden (starke Unterstützung) (Van Meter & Garner, 2005, S. 305–307).

Vor dem Hintergrund der *Theorie multimedialen Lernens* nach Mayer erscheint der Einsatz von vorgefertigten depiktionalen Darstellungen zunächst vielversprechend, da das zentrale Prinzip der Theorie besagt: „people learn more deeply from words and pictures than from words alone“ (Mayer, 2005, S. 31). Allerdings ist die Effektivität multimedialer Lernumgebungen stark dadurch bedingt, inwiefern das depiktionale Material das Verständnis des verbalen Materials unterstützt (Klauer & Leutner, 2012, S. 114–118; Schnotz & Bannert, 2003, S. 153 f.; Verschaffel et al., 2020, S. 6). Das Hinzufügen von depiktionalem Material kann dazu führen, dass die Aufmerksamkeit der Lernenden abgelenkt und das verbale Material vernachlässigt wird (Hellenbrand, 2018). Darüber hinaus garantiert die Verwendung multimedialen Materials noch keine adäquate Auseinandersetzung der Lernenden damit (Schnotz & Bannert, 2003, S. 153 f.), da aus verschiedenen Materialien die jeweils relevanten Elemente entnommen, korrekt verarbeitet und verknüpft werden müssen. Schwierigkeiten können auftreten, wenn das depiktionale Material nur oberflächlich betrachtet wird oder den Lernenden das Vorwissen zur Verarbeitung der Darstellung fehlt. Ebenso können Schwierigkeiten bei der Verknüpfung zwischen Elementen der depiktionalen und deskriptionalen Darstellung entstehen, wenn nicht erkannt wird, inwiefern die Informationen aus den verschiedenen Quellen miteinander zusammenhängen. Dieser Prozess der Integration von depiktionaler und verbaler Darstellung ist allerdings besonders entscheidend für erfolgreiches multimediales Lernen (Ainsworth, 2006, S. 189 f.; Mayer, 2005, S. 40 f.; Schnotz & Bannert, 2003, S. 146 f.).

Ein besonderer Vorteil der selbständigen Konstruktion depiktionaler Darstellungen gegenüber vorgefertigten besteht darin, dass diese Integration von deskriptionalem und depiktionalem Material durch das selbständige Generieren unmittelbar erzielt wird, indem die depiktionale Darstellung auf Grundlage der verbalen Beschreibung konstruiert wird (Fiorella & Zhang, 2018, S. 1118 f.) (vgl. Kapitel 3.2.2). Eine selbst erstellte Depiktion ist zudem nicht einfach eine Darstellung der realen Situation, sondern es handelt sich vielmehr um ein Abbild der mentalen Repräsentation der Lernenden – d. h. ein Abbild der subjektiven Auffassung der gegebenen Situation (Eichler, 2006, S. 43). Somit repräsentiert die selbst erstellte Darstellung in gewissem Maße auch das Vorwissen der Lernenden und gibt Aufschluss über deren Verständnis der Situation. Die Förderung des selbständigen Erstellens von Darstellungen befähigt Schülerinnen und Schüler weiterhin dazu, eigenständig über wesentliche Elemente zu entscheiden und von der realen Situation zu abstrahieren (Eichler, 2006, S. 43).

Beim (mathematischen) Problemlösen wird das selbständige Erstellen von Darstellungen als besonders hilfreiches Werkzeug angesehen, da es die systematische Analyse der Problemsituation, den Planungsprozess sowie das Interpretieren und Überprüfen von Problemlösungen fördern kann (De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren, & Claes, 2003, S. 446). Im

Gegensatz zu vorgegebenen Darstellungen initiiert der eigenständige Konstruktionsprozess eine intensivere und sorgfältigere Auseinandersetzung mit der Aufgabe (De Bock et al., 2003, S. 446; Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009, S. 47 ff.).[7] Der Prozess des selbständigen Erstellens einer Darstellung ist geprägt von dynamischen Veränderungen sowie Interaktionen zwischen der mentalen und der externalen Repräsentation, durch die ein subjektives Abbild der präsentierten, verbalen Informationen konstruiert wird (R. Cox, 1999, S. 347). Dabei handelt es sich nicht um einen einfachen Eins-zu-Eins-Übertragungsprozess, vielmehr wird der Lernprozess grundlegend verändert, indem (meta-)kognitive Prozesse initiiert und verstärkt werden (R. Cox, 1999, S. 347; Van Meter & Garner, 2005, S. 291–294). Eine weitere Besonderheit bei der eigenständigen Konstruktion von Darstellungen gegenüber vorgegebenen besteht darin, dass die Kognition – das eigene Denken – aktiv externalisiert wird. Auf diese Weise können mentale Repräsentationen konkretisiert, Selbsterklärungen verstärkt und eine Entlastung des Arbeitsgedächtnisses erreicht werden (R. Cox, 1999, S. 347).

Einschränkend muss jedoch beachtet werden, dass die aktive Konstruktion einer Darstellung deutlich mehr kognitive Kapazitäten erfordert, als wenn vorgegebene Darstellungen genutzt werden (R. Cox, 1999, S. 347). Insbesondere in Fällen, in denen den Lernenden bewusst ist, dass die Darstellungen von anderen Personen betrachtet werden, und deshalb eine vollständige, für andere verständliche Darstellung erzeugt wird, kann die Erstellung aufwändig sein und die kognitive Belastung erhöhen (R. Cox, 1999, S. 347). Damit eine selbst erstellte Darstellung also einen Vorteil für den Verstehens- oder Lösungsprozess erbringen kann, ist letztlich entscheidend, dass die kognitive Belastung durch den Konstruktionsprozess durch die beschriebenen vorteilhaften Wirkungen aufgewogen werden kann (R. Cox, 1999, S. 347).

Dieses Verhältnis von Nutzen durch aktive Auseinandersetzung und Kosten durch kognitive Belastung ist vermutlich auch der wesentliche Grund dafür, dass nicht alle empirischen Untersuchungen dafürsprechen, dass selbst erstellte Darstellungen den vorgegebenen überlegen wären. Einige Studien ergaben keinen Unterschied zwischen dem selbständigen Erstellen und dem Hinzufügen vorgefertigter grafischer Darstellungen. So zeigte beispielsweise eine Untersuchung von V. C. Hall, Bailey und Tillman (1997), dass Lernende, die einen Text mit Illustrationen zur Verfügung gestellt bekamen, genauso gute Leistungen beim Verstehen wissenschaftlicher Erklärungen aufweisen wie Lernende, die selbst Illustrationen erstellten. Van Meter, Aleksic, Schwartz und Garner (2006) führten eine Studie zum Leseverstehen mit Lernenden der vierten und sechsten Klasse durch, bei der in einer Gruppe von Sechstklässlern die Teilnehmenden mit selbst erstellten Zeichnungen mit der stärksten Unterstützungsbedingung signifikant besser abschnitten als Teilnehmende, die vorgegebene Darstellungen betrachteten. Im Gegensatz dazu gab es in einer Gruppe von Viertklässlern keine statistisch signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen. Insgesamt deuten die Autorinnen diese Ergebnisse so, dass „the results of this study support the claim that drawing can be a more effective learning

[7] Hier werden einige besondere Vorteile selbst erstellter Darstellungen gegenüber vorgefertigten genannt. Eine detaillierte Analyse der Funktionsweise selbst erstellter Skizze erfolgt in den Kapiteln 3.2.2 und 4.8.

strategy than merely inspecting illustrations“ (Van Meter et al., 2006, S. 161). Die Ergebnisunterschiede zwischen den Altersgruppen werden als Indiz gesehen, dass das Erstellen von Darstellungen entwicklungsbedingt unterschiedlich wirken kann (Van Meter et al., 2006, S. 159).

Im Gegensatz dazu liefern verschiedene empirische Studien aber auch Belege dafür, dass das selbständige Erstellen grafischer Darstellungen besonders erfolgsversprechend im Vergleich zu vorgefertigten Darstellungen ist. Während Studien zum Einsatz vorgefertigter Darstellungen häufig ernüchternde Ergebnisse haben und keine lernförderliche Wirkung nachweisen konnten (Dewolf, Van Dooren, Ev Cimen, & Verschaffel, 2013; Dewolf, Van Dooren, Hermens, & Verschaffel, 2015; Dewolf, Van Dooren, & Verschaffel, 2017; Pantziara et al., 2009; Reuter, Schnotz, & Rasch, 2015), zeigen Vergleichsstudien häufig einen Vorteil selbst konstruierter grafischer Darstellungen gegenüber vorgefertigten Darstellungen. So fanden beispielsweise Hellenbrand, Mayer, Opfermann, Schmeck, & Leutner (2019) heraus, dass Schülerinnen und Schüler der neunten Klasse im Bereich des Leseverstehens wissenschaftlicher Texte stärker auf wichtige Wörter fixieren, mehr Übergänge zwischen Text und Bearbeitungsbereich sowie mehr sinnvolle Übergänge zwischen visueller Darstellung und relevanten Textabschnitten aufweisen als Lernende, die mit vorgegebenen Darstellungen arbeiten. Dies deutet darauf hin, dass das eigenständige Erstellen von Darstellungen eine vertiefte und sinnstiftende Verarbeitung fördert. Eine weitere Studie zum Leseverständnis von Stern, Aprea und Ebner (2003) zeigte ähnliche Ergebnisse bei der Untersuchung von Hochschulstudentinnen und -studenten und Berufsschülerinnen und -schülern, die Texte zu ökonomischen Themen lasen. Die Gruppe, die grafische Darstellungen zu den Texten eigenständig konstruierte, schnitt im Transfertest zu einem anderen ökonomischen Thema besser ab, als die Gruppe, die Darstellungen zur Verfügung gestellt bekam. Im Bereich der mathematikdidaktischen Forschung führten Terwel et al. (2009) eine Studie durch, die nachwies, dass es im Hinblick auf die Transferleistung zum Lösen komplexer mathematischer Probleme effektiver ist, wenn Schülerinnen und Schüler im Alter von 10/11 Jahren Darstellungen selbst konstruieren, als wenn sie mit vorgefertigten Darstellungen arbeiten.

Die Forschungsergebnisse deuten insgesamt darauf hin, dass das selbständige Erstellen von Darstellungen im Sinne des konstruktivistischen Verständnisses von Lernen sowie des operativen Erkenntnisgewinns besondere Möglichkeiten im Vergleich zu vorgegebenen Darstellungen bieten kann, indem beispielsweise beim Konstruktionsprozess ein tieferes Verständnis der Strukturen und Beziehungen von Informationselementen angeregt wird (Terwel et al., 2009, S. 40), mehr kognitive und metakognitive Prozesse initiiert werden (z. B. Selbstüberwachung, Überarbeitung von Fehlern) (R. Cox, 1999, S. 347; Van Meter & Garner, 2005, S. 291–294) und indem vor allem Lernprozesse höherer Ordnung, wie der inhaltsübergreifende Wissenstransfer, unterstützt werden (Stern et al., 2003).

Selbst erstellte Darstellungen treten immer in Systemen auf, die individuell sein können, meistens aber kultureller Natur sind und deshalb in enger Verbindung zu mathematischen Inhalten und Konventionen stehen (Kaput, 1998, S. 268). Im Mathematikunterricht wird vor allem der

Umgang mit solchen kulturell entwickelten Repräsentationssystemen gelehrt und gelernt. Allerdings sollten auch Darstellungen beachtet und untersucht werden, die von Lernenden z. B. in Lösungsprozessen zu mathematischen Aufgaben selbständig entwickelt werden. Diese entsprechen nicht unbedingt den konventionellen Repräsentationen (Hitt, 2002a, S. 250), geben aber häufig aufschlussreiche Einblicke in mentale Modelle und Prozesse der Lernenden.

2.6 Visualisierungen beim Lehren und Lernen von Mathematik

Visuelle Darstellungen haben sich als grundlegende Werkzeuge für wissenschaftliche Erkenntnis- und Arbeitsprozesse erwiesen und spielen deshalb auch beim Lehren und Lernen wissenschaftlicher Tätigkeiten eine zentrale Rolle (Ainsworth, Prain, & Tytler, 2011, S. 1096). Dies gilt im Besonderen für die Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen, in der die meisten Inhalte überhaupt erst durch Darstellungen zugänglich werden (Duval, 2006, S. 106 f.). Dabei kann der Umgang mit depiktionalen Darstellungen aber nicht losgelöst von anderen Darstellungsarten erfolgen, sondern ist stets eingebettet in die Nutzung verschiedener Darstellungsformen.

2.6.1 Nutzung multipler Darstellungen

„Vielfältige Darstellungen zu nutzen ist zentral für die Wissenschaft Mathematik und mathematisches Denken."

(Kuntze, 2013b, S. 21)

Insbesondere der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen spielt eine wesentliche Rolle bei der Hervorhebung bestimmter mathematischer Aspekte, bei der mathematischen Problemlösung sowie bei der Verknüpfung verschiedener mathematischer Themenbereiche (Kuntze, 2013b, S. 21). So können beispielsweise geometrische Problemstellungen in algebraische Sprache übersetzt und mit Hilfe dieser gelöst werden oder umgekehrt: zu algebraischen Aufgaben werden geometrische Darstellungen konstruiert und zur Lösung genutzt (Kuntze, 2013b, S. 21). Auch für die mathematikdidaktische Forschung ist der Einsatz multipler Repräsentationen ein wesentliches Qualitätskriterium bei der Entwicklung und Reflexion von Lerngelegenheiten geworden (Ainsworth, 2006; G. A. Goldin, 1998). Beim mathematischen Problemlösen werden Darstellungen häufig im Rahmen von Strategien eingesetzt, indem z. B. durch einen Darstellungswechsel ein Bezug zu bereits Bekanntem hergestellt wird, die Kontrastierung verschiedener Darstellungen zur Verdeutlichung von Analogien dient oder eine Aufgabenstellung in Form eines Darstellungswechsels reformuliert wird (Kuntze, 2013b, S. 22). Der Darstellungswechsel wird darüber hinaus häufig genutzt, um beim mathematischen Modellieren die Übersetzungsschritte zwischen der realen Welt und der Welt der Mathematik zu vollziehen (Kuntze, 2013b, S. 22).

Duval (1999, S. 6 ff.) unterscheidet dabei zwei wesentliche Arten von Tätigkeiten: erstens die *Bearbeitung* von Repräsentationen *innerhalb* eines mathematischen Zeichensystems und zweitens die *Transformation* von Repräsentationen *zwischen* zwei oder mehreren mathematischen Systemen.

In diesem Zusammenhang hat Duval (1999) den Begriff „Repräsentationsregister“ geprägt, der dadurch definiert ist, dass

- eine identifizierbare Repräsentation vorhanden ist
- eine Manipulation der Repräsentation innerhalb desselben Registers möglich ist
- eine Umwandlung in eine Repräsentation eines anderen Registers möglich ist, wobei sich die transformierte Repräsentation durch Bedeutungsanalogie mit der ursprünglichen Repräsentation auszeichnet.

Zur Konstruktion und zum Erlernen eines mathematischen Konzeptes ist die Fähigkeit unabdingbar, mit verschiedenen Repräsentationsregistern eines mathematischen Inhalts umgehen und Verknüpfungen zwischen diesen herstellen zu können (Hitt, 2002a, S. 247). So ist beispielsweise zum Verständnis des mathematischen Konzepts ‚Satz des Pythagoras‘ entscheidend, die Flächengleichheit der Quadrate über den Katheten und des Quadrats über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der entsprechenden algebraischen Formel $a^2 + b^2 = c^2$ verknüpfen zu können. Außerdem muss man die algebraische Formel durch Umformungen verändern können, um damit mathematische Berechnungen durchzuführen, und algebraisch erzeugte symbolische Werte in Bezug auf das rechtwinklige Dreieck interpretieren können. Dieses Beispiel – das längst nicht alle mit dem Konzept verbundenen darstellungsbezogenen Tätigkeiten umfasst – verdeutlicht die vielfachen Manipulationen und Transformationen, die zum Verständnis eines mathematischen Konzepts notwendig sind.

Insbesondere in mathematischen Problemlöseprozessen ist die Bearbeitung von und der Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsregistern (z. B. die Übersetzung eines Aufgabentextes in eine Skizze, der Transfer einer Skizze in eine mathematische Formel usw.) ein grundlegendes und wirksames Vorgehen zur Generierung von Lösungen (Hitt, 2002a, S. 250–253). Dagegen scheint eine Beschränkung auf einzelne Register fehleranfällig und problembehaftet zu sein (Hitt, 2002a, S. 253).

Die zentrale Rolle multipler Repräsentationen beim Lernen und Lehren von Mathematik wird in der Bildungsforschung mittlerweile grundsätzlich anerkannt (Dreher, 2013, S. 215; Kuntze, 2013b, S. 17). In den deutschlandweit gültigen Bildungsstandards stellt die Fähigkeit „Mathematische Darstellungen verwenden“ eine von sieben allgemeinen Kompetenzen dar, die im Mathematikunterricht erworben werden sollen (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 8). „Dazu gehört:

- verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden,
- Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen,
- unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln.“ (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 8)

Die Bildungsstandards nehmen demnach die Erkenntnisse aus der Forschung auf und bekräftigen, dass sowohl der Umgang mit einzelnen Repräsentationsformen als auch die Übersetzung zwischen diesen einen wesentlichen Bereich mathematischer Fähigkeiten ausmachen. Die Schwierigkeit für den Mathematikunterricht besteht darin, dass multiple Repräsentationen und vor allem deren Transformation einerseits hohe Verständnishürden mit sich bringen (Duval, 2006), andererseits einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis mathematischer Konzepte leisten und ein hilfreiches Werkzeug zur Problemlösung darstellen (Dreher, 2013, S. 215; Kuntze, 2013b, S. 17). Weder die Beschränkung auf ein Minimum an Repräsentationen – um etwa die Hürden möglichst gering zu halten – noch die Verwendung einer möglichst großen Vielfalt an Darstellungen – mit dem Ziel eines allumfassenden Strategierepertoires – sind zielführend. Vielmehr muss es darum gehen, im Mathematikunterricht eine didaktisch fundierte Auswahl adäquater Repräsentationsformen zu treffen, die bewusst und sinnstiftend gelehrt und gelernt werden (Dreher, 2013, S. 218).

2.6.2 Depiktionale Darstellungen im Mathematikunterricht

„The power of a representation can [...] be described as its capacity, in the hands of a learner, to connect matters that, on the surface, seem quite separate. This is especially crucial in mathematics“

(Bruner, 1968, S. 48)

Die besondere Funktion von Darstellungen im Lernprozess besteht also darin, dass mit ihrer Hilfe mathematische Inhalte miteinander verknüpft werden können, die auf den ersten Blick völlig unabhängig erscheinen. Während situative Bilder und Analogiebilder in diesem Sinne kaum eine Rolle spielen, da sie in erster Linie die Ebene der Oberflächenmerkmale darstellen, sind es vor allem logisch-schematische visuelle Darstellungen, die die Möglichkeit bieten, tiefenstrukturelle Eigenschaften mathematischer Inhalte darzustellen (Laakmann, 2013, S. 20). Im Mathematikunterricht sollte diese Art der Darstellungen deshalb fokussiert werden. Zwar können auch situative Bilder beispielsweise zur Gestaltung motivierender Themeneinstiege genutzt werden, aber der besondere Nutzen von Darstellungen im Mathematikunterricht besteht in der Generalisierung und Abstraktion, die durch schematische Darstellungen ermöglicht wird (Laakmann, 2013, S. 21).

Verschiedene Studien haben sich mit der Differenzierung zwischen „Visualisierern“ und „Verbalisierern“ als Lerntypen im Mathematikunterricht beschäftigt (Kozhevnikov, Hegarty, & Mayer, 2002; Presmeg, 2006). ***Visualisiererinnen und Visualisierer*** werden definiert als Personen, die visuell-grafische Lösungs- und Verstehensmethoden bevorzugen, während ***Verbalisiererinnen und Verbalisierer*** Informationen vorzugsweise durch verbal-logische Methoden verarbeiten (Kozhevnikov et al., 2002, S. 47). Für Lernende, die in die Kategorie der Visualisiererinnen und Visualisierer einzuordnen sind, ist ganz besonders entscheidend, dass im Mathematikunterricht visuelle Methoden zur Erläuterung von Inhalten genutzt, aber die

Lernenden auch zur eigenständigen Nutzung depiktionaler Darstellungen befähigt werden (Laakmann, 2013, S. 26).

Ainsworth et al. (2011, S. 1096) haben die vielfältigen Funktionsweisen speziell selbst erstellter Depiktionen in naturwissenschaftlichen Lernprozessen erläutert, die ebenso auf den Mathematikunterricht übertragen werden können. So kann das eigenständige Erstellen depiktionaler Darstellungen dazu beitragen, die Motivation der Lernenden zu erhöhen, indem interaktives, erkundendes Lernen ermöglicht wird (Ainsworth et al., 2011, S. 1096). Außerdem lernen die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise, selbst mathematische Verfahren anzuwenden und erlernen die Funktionsweise sowie Konventionen von spezifisch mathematischen Darstellungen (Ainsworth et al., 2011, S. 1096). Selbst erstellte Darstellungen können darüber hinaus genutzt werden, um mathematische Konzepte zu verstehen, da die Lernenden im Zuge der Auswahl bestimmter Elemente für die Darstellung Beobachtungen anstellen und ihre mentalen Konzepte verfeinern können (Ainsworth et al., 2011, S. 1096). Darstellungen sind weiterhin eine mögliche Grundlage zur Kommunikation, indem die Externalisierung Gelegenheiten für Austausch und die Klärung bestimmter Details bietet (Ainsworth et al., 2011, S. 1096). In dieser Funktion der Darstellung als Kommunikationsgrundlage kann den Lernenden deutlich werden, wie wichtig die Präzision und Kohärenz einer Darstellung ist (Ainsworth et al., 2011, S. 1096). Nicht zuletzt – und darauf liegt der Fokus der vorliegenden Arbeit – können selbst erstellte Zeichnungen eine effektive Lernstrategie sein, um Problemlösungsräume zu erkunden, den Lösungsprozess zu strukturieren, Vorwissen zu aktivieren und mit den neuen Informationen zu verknüpfen sowie Transformationen durch Schlussfolgerungen zu ermöglichen (Ainsworth et al., 2011, S. 1096). Schon Pólya (1967) hat das Zeichnen skizzierter Darstellungen als wesentliche heuristische Methode des Problemlösens erachtet, aber auch aktuelle mathematikdidaktische Werke erwähnen das Skizzenzeichnen als wichtige, im Mathematikunterricht zu erlernende Lösungsstrategie (Heinrich et al., 2015, S. 286,290; Krauthausen & Scherer, 2007, S. 259; Sill, 2019, S. 181 f.).[8]

2.6.3 Depiktionales Darstellen als mathematische Kompetenz

Depiktionale Darstellungen zu nutzen und zu erstellen sind – entgegen der von der Lesesozialisation suggerierten Annahme (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 3) – keine genuinen, von Natur aus gegebenen Fähigkeiten, sondern werden unter Einfluss von Lebens- und Unterrichtserfahrungen entwickelt (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 10 f.). Auch wenn depiktionale Darstellungen ursprünglicher und der menschlichen Wahrnehmung unmittelbarer zugänglich sind als symbolische und sprachliche Formen, erfordern sie dennoch komplexe kognitive Verarbeitungsprozesse, die vom Vorwissen und Vorerfahrungen abhängig sind (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009, S. 536; Oestermeier & Eitel, 2008, S. 10 f.). Ein naives Verständnis depiktionaler Darstellungen entwickelt sich laut Oestermeier & Eitel (2008, S. 10) zwar „spontan und ohne spezifische Ausbildung", jedoch kann nicht davon ausgegangen werden, dass sich

[8] Weitere Erläuterungen speziell zum Skizzenzeichnen als Lösungsstrategie folgen in Kapitel 3.1.

spezifische Deutungsarten – wie z. B. die Nutzung depiktionaler Darstellungen in mathematischen Erkenntnis- und Problemlöseprozessen – intuitiv im Laufe des Lebens entwickeln. Vielmehr müssen diesbezügliche Fähigkeiten im Rahmen des Mathematikunterrichts gezielt aufgebaut werden (Barmby, Bolden, Raine, & Thompson, 2013, S. 7; Pantziara et al., 2009, S. 55; Presmeg, 2006, S. 230).

Das Verwenden und Erstellen visueller Darstellungen wird sowohl international (The National Council of Teachers of Mathematics, 2000) als auch national (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 7 f.) als grundlegende Fähigkeit der mathematischen Bildung angesehen. In den deutschen Bildungsstandards Mathematik wird die Fähigkeit „mathematische Darstellungen verwenden" als eine von fünf grundlegenden im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I zu erwerbenden Kompetenzen benannt (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 7 f.) (vgl. Kapitel 2.6.1). Die Kompetenz beinhaltet sowohl das Erstellen und Anwenden verschiedener mathematischer Darstellungen, den Vergleich zwischen verschiedenen Darstellungen als auch die Auswahl und den Wechsel zwischen den Darstellungen.

Nicht nur im Rahmen der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, sondern auch bei den mathematischen Leitideen ist der Umgang mit depiktionalen Darstellungen im deutschen Bildungsplan verankert: In erster Linie bei der geometriebezogenen Leitidee „Raum und Form". Hier sollen geometrische Figuren und Körper erkannt und dargestellt bzw. gezeichnet werden, gedanklich mit geometrischen Objekten operiert werden oder Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte beschrieben und genutzt werden (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 11). Bei den übrigen Leitideen spielen depiktionale Darstellungen eine weniger zentrale Rolle, finden aber dennoch Erwähnung: Bei der Leitidee „Messen" werden Berechnungen an mathematischen Figuren und Körpern durchgeführt, bei der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang" stellen Schülerinnen und Schüler funktionale Zusammenhänge in grafischer Form dar und „analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen" (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 11) und im Rahmen der Leitidee „Daten und Zufall" werden grafische Darstellungen zu statistischen Erhebungen ausgewertet und selbst angefertigt (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 10 ff.).

Beim Aufbau von Wissen und Fähigkeiten bezüglich depiktionaler Darstellungen geht es nicht um die bloße Veranschaulichung mathematischer Inhalte, sondern vielmehr um die Verknüpfung der depiktionalen Repräsentationen mit den entsprechenden symbolischen und formalen Darstellungen (R. D. L. Booth & Thomas, 1999, S. 185; Duval, 1999, S. 7 ff.; Schnotz, 2014, S. 52). Für Lernende ist es entscheidend, nicht nur symbolische, kalkülorientierte Manipulationen durchführen zu können, sondern Fähigkeiten der Bearbeitung depiktionaler Darstellungen und vor allem der Umwandlung zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu erwerben, um Problemstellungen adaptiv und flexibel lösen zu können (Duval, 1999, S. 7 ff.; Schnotz, 2014, S. 51). Diese Verflechtung der verschiedenen Darstellungsformen ist auch kulturhistorisch begründet: Bilder sind der Ursprung der Schrift, wodurch bildliches Denken und sprachlich-symbolische Systeme untrennbar miteinander verbunden sind (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 10 f.). Insofern genügt es beispielsweise nicht, eine Skizze zur bloßen

Veranschaulichung einer Problemsituationen zu zeichnen, sondern die Skizze muss im Lösungsprozess genutzt werden, um zielführende symbolische Formeln und Verfahren mit der Problemsituation in Verbindung zu bringen (Schnotz, 2014, S. 52). Ziel ist es dabei laut (Schnotz, 2014, S. 52), „durch systematische Interaktion von deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen das Spektrum der kognitiven Möglichkeiten zu erweitern und somit zu einer höheren Flexibilität mathematischen Verstehens und Denkens beizutragen."

Verschiedene Studien belegen, dass die Fähigkeit des Verwendens depiktionaler Darstellungen durch Trainings verbessert werden kann. So zeigt die Studie von Uesaka und Manalo (2006, S. 192), dass das Einüben metakognitiver Fähigkeiten bei der Verwendung von depiktionalen Darstellungen (hier bezeichnet als Diagramme) dazu beitragen kann, dass Lernende die Darstellungen adäquater auswählen und konstruieren. Im Rahmen der Studie nahmen Schülerinnen und Schüler des achten Jahrgangs an Unterrichtseinheiten teil, bei denen sie gezielt depiktionale Darstellungen verglichen und über deren Verwendung beim Lösen mathematischer Sachaufgaben reflektierten (Uesaka & Manalo, 2006, S. 181).

Die empirische Forschung zeigt, dass solche Trainings notwendig sind, da die Fähigkeiten bezüglich depiktionaler Darstellungen unter den Lernenden stark variieren und im Allgemeinen gering sind (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 11). Zahlreiche Schwierigkeiten beim Verständnis, der Auswahl, der Nutzung und dem Erstellen von Depiktionen sind die Ursache der gering ausgeprägten Fähigkeiten.

2.6.4 Schwierigkeiten beim Einsatz depiktionaler Darstellungen

Der Fokus vieler empirischer Studien liegt vor allem auf der Wirkung der Verwendung von Darstellungen und der Identifikation von Mechanismen, die zu dieser Wirkung beitragen (z. B. Ainsworth & Th Loizou, 2003; Rellensmann, Schukajlow, & Leopold, 2017; Stern et al., 2003). Für den Einsatz von Darstellungen in der Praxis ist jedoch ebenso grundlegend, zu erforschen, welche Schwierigkeiten beim Einsatz depiktionaler Darstellungen auftreten können und wodurch diese verursacht werden (Manalo & Uesaka, 2011). Zu diesen Schwierigkeiten gehören unter anderem die fehlende Beachtung von Darstellungen, die unangemessene Auswahl depiktionaler Darstellungen, mangelnde Eigeninitiative zur Erstellung von Depiktionen oder das Ziehen falscher Schlussfolgerungen aus Darstellungen (Acevedo Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen, & Verschaffel, 2010; Uesaka & Manalo, 2006; Uesaka et al., 2007).

Studien zu Blickbewegungen haben gezeigt, dass Lernende bei der Rezeption von Text-Bild-Kombinationen häufig zunächst das Bild in den Blick nehmen, oberflächlich betrachten, und sich anschließend ausführlich mit dem Text befassen (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 3). Eine mögliche Begründung liegt darin, dass die Lernenden ihre kognitiven Ressourcen auf den als komplex eingeschätzten Text fokussieren, während bei den – vermeintlich leicht zu verstehenden – Bildern eine kurze Betrachtung genügt (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 3). Ausgangspunkt für diese Einschätzungen und das entsprechende Rezeptionsverhalten könnte die Lesesozialisation sein, die sich im Wesentlichen auf das Verständnis sprachlichen Materials fokussiert, während depiktionales Material häufig als unproblematisch und selbsterklärend erachtet wird (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 3).

Diese Annahme entspricht jedoch nicht den Ergebnissen der Forschung zu *visual literacy*, die zeigt, dass in vielen, auch industriellen Ländern wie Deutschland oder den USA über 40 % der Menschen Schwierigkeiten haben, Bilder, Tabellen oder Grafiken insoweit zu verstehen, dass sie diese mit anderen Informationen verknüpfen könnten (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 3). Weitere Studien bestätigen, dass Schülerinnen und Schüler häufig Schwierigkeiten bei der Verwendung visueller Darstellungen haben, die beispielsweise auf mangelnde Erfahrungen beim Einsatz als Problemlösewerkzeug oder auf Interpretationsschwierigkeiten zurückgeführt werden können (Pantziara et al., 2009, S. 54).

Während situative Bilder häufig noch zu einem gewissen Maß ein intuitives Verständnis ermöglichen, haben Lernende besondere Schwierigkeiten beim Verstehen schematischer Darstellungen (Laakmann, 2013, S. 21 f.). Das Ablesen der Strukturen aus den Darstellungen sowie die Verknüpfung mit den realen Objekten und Konstellationen erfordert komplexe kognitive Prozesse mit intensivem Einbezug von Vorwissen und dem schrittweisen Ziehen von Inferenzen (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 4). Daher ist das Verstehen solcher Darstellungen für die Lernenden häufig mit großen Verstehenshürden behaftet.

Eine weitere mögliche Erklärung für die geringe Beachtung von Bildern in Text-Bild-Kombinationen besteht darin, dass im 17. Jahrhundert im Zuge des Rationalismus unter Einfluss von Descartes eine Abwendung von depiktionalen Darstellungen stattfand – mit der Begründung, solche Darstellungen seien zu wenig stringent, informationell beschränkt, subjektiv, unzuverlässig und damit nicht ausreichend mathematisch (Alshwaikh, 2011, S. 44, 240; Presmeg, 2006, S. 210). Auch wenn diese Ansichten zugunsten eines Verständnisses der Mathematik als soziale semiotische Praxis mittlerweile in den Hintergrund treten, hat die Vermeidung von Depiktionen in der Mathematik bis heute Auswirkungen, die auch in Lehr-Lern-Kontexte hineinreichen (Alshwaikh, 2011, S. 241): Zum Beispiel vernachlässigen Lehrende die Verwendung depiktionaler Darstellungen oder erachten diese nur als dekorative Ergänzung. Häufig werden solche Darstellungen tatsächlich nur zur anfänglichen Veranschaulichung genutzt, während sie bei der eigentlichen Durchführung mathematischer Verfahren keine Rolle mehr spielen. Der Fokus des Mathematikunterrichts liegt stattdessen auf der Verwendung symbolischer Notationen sowie auf dem Erwerb von Routineexpertisen, bei denen schnelle und exakte Lösungsverfahren auswendiggelernt werden (Hitt, 2002b; Schnotz, 2014, S. 51). Adaptive Expertise, die sich durch verständnisbasierte Verfahren zur flexiblen und kreativen Problemlösung auszeichnet, wird hingegen vernachlässigt (Schnotz, 2014, S. 51).

Die Schwierigkeiten von Lernenden bei der Verwendung depiktionaler Darstellungen können ihren Ursprung auch darin haben, dass diese Art der Darstellungen eine hohe Komplexität mit sich bringt, die sich sowohl auf die Erkennung von Strukturen als auch die Merkfähigkeit auswirken kann (Dörfler, 2006, S. 216). Durch die hohe Informationsdichte von Depiktionen können diese für Lernende als überfordernd wirken. Darüber hinaus ist die Interpretation depiktionaler Darstellungen nicht so festgelegt wie bei deskriptionalen Darstellungen, wodurch Unsicherheiten und Verständnishürden entstehen können (Dörfler, 2006, S. 217). Nichtsdestotrotz ist Dörfler (2006, S. 217) der Überzeugung, dass der Einsatz von Depiktionen ein höheres Potenzial an Zugänglichkeit und Motivation für die Kommunikation und das Arbeiten im Mathematikunterricht bietet als der symbolisch-abstrakte Zugang.

Obwohl Lernende häufig mit depiktionalen Darstellungen in der Lebenswelt konfrontiert werden, wird der eigenständige Gebrauch und ein sachgemäßes Verständnis nur selten gezielt eingeübt (Stern et al., 2003, S. 194). In der Folge vermeiden Lernende die Nutzung und selbständige Konstruktion depiktionaler Darstellungen. Mathematikerinnen und Mathematiker nutzen Darstellungen, um nach bestimmten Strukturen zu suchen und Generalisierungen vorzunehmen, während weder Studierende noch Schülerinnen und Schülern dazu in der Lage zu sein scheinen (Presmeg, 2006, S. 218). Verschiedene Studien belegen, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht kaum depiktionale Darstellungen nutzen und zeigen teilweise auch, dass sie stattdessen formal-symbolische Darstellungsweisen bevorzugen (De Bock et al., 2003; Stylianou & Pitta-Pantazi, 2002; Uesaka & Manalo, 2011a). Auch Mathematikstudierende nutzen kaum die lernunterstützenden Möglichkeiten visueller Darstellungen in der Weise, wie sie von Mathematikern genutzt werden (Presmeg, 2006, S. 218).

Gleichzeitig betonen Forschende aber die grundsätzlich entscheidende Rolle depiktionaler Darstellungen im mathematischen Lernprozess (Presmeg, 2006, S. 219) und empirische Studien belegen, dass Lernende durchaus in der Lage sind, depiktionale Darstellungen effektiv zu nutzen (Csíkos, Szitányi, & Kelemen, 2012; Elia & Philippou, 2004; Rellensmann et al., 2017; Schwamborn, Mayer, Thillmann, Leopold, & Leutner, 2010; Uesaka et al., 2007). Presmeg (2006, S. 219) konnte außerdem zeigen, dass es keine Extreme unter den Lernenden hinsichtlich der Verwendung oder Vermeidung von Depiktionen gibt, sondern die Visualisierungspräferenz vielmehr vom Arbeitsauftrag, von soziokulturellen Faktoren sowie der Unterrichtssituation abhängt. Auch wenn der Umgang mit Depiktionen Besonderheiten mit sich bringt, scheint die Verwendung insgesamt nicht an ihrem Potenzial oder an den Voraussetzungen der Lernenden zu scheitern, sondern vielmehr an den Überzeugungen und Lösungsroutinen, die die Lernenden im Mathematikunterricht erwerben.

2.6.5 Gestaltung von Lehr-Lern-Umgebungen mit depiktionalen Darstellungen

„[…T]he status of visualization in mathematics education should and can be upgraded from that of a helpful learning aid to that of a fully recognized tool for mathematical reasoning and proof.“

(Dreyfus, 1991, S. 33)

Es stellt sich die Frage, wie Lehr-Lern-Umgebungen gestaltet werden können, um den oben beschriebenen Schwierigkeiten (vgl. Kapitel 2.6.4) entgegenzuwirken und die Schülerinnen und Schüler zu motivieren, depiktionale Darstellungen zu verwenden und mit den entsprechenden symbolischen Repräsentationen zu verknüpfen. Wie das Eingangszitat nach Dreyfus deutlich macht, reicht es für eine effektive Nutzung nicht aus, wenn die Lehrkraft Depiktionen bei der Gestaltung von Lernumgebungen z. B. als anschauliche Erweiterung eines Textes verwendet oder deren Gebrauch demonstriert (auch Uesaka & Manalo, 2006, S. 192). Vielmehr sollten depiktionale Darstellungen als eigenständiger Lerngegenstand behandelt werden, dessen Verständnis, Nutzung und Konstruktion von den Lernenden bewusst eingeübt und reflektiert wird (Pantziara et al., 2009, S. 54; Uesaka & Manalo, 2006, S. 192).

Erst in den 1970er und 80er Jahren erfuhr die Visualisierungsforschung – und damit die Verwendung depiktionaler Darstellungen – einen Auftrieb, wurde zu einem wichtigen Teilbereich der mathematikdidaktischen Forschung und fand ab Mitte der 90er Jahre explizit Eingang in internationale Lehrpläne (Kultusministerkonferenz, 2004; Presmeg, 2006, S. 216; Stylianou & Pitta-Pantazi, 2002; The National Council of Teachers of Mathematics, 2000) (vgl. Kapitel 2.6.1). Heute sind sich Mathematikdidaktiker darüber einig, dass depiktionale Darstellungen eine wesentliche Rolle beim Erlernen mathematischer Inhalte sowie bei mathematischen Problemlösungsprozessen spielen (z. B. Elia & Philippou, 2004). Viele mathematische Konzepte können nur ganzheitlich erfasst und ein umfassendes mentales Konzeptbild dazu aufgebaut werden, indem verschiedene Darstellungsweisen genutzt werden (Hitt, 2002b, S. 3), (vgl. Kapitel 2.6.1).

Dennoch besteht ein viel berichtetes Phänomen darin, dass Lehrkräfte im Mathematikunterricht ihre Schülerinnen und Schüler kaum dazu ermutigen, depiktionale Darstellungen selbst zu verwenden (Hitt, 2002b, S. 3; Pantziara et al., 2009, S. 54; Uesaka et al., 2007). Stattdessen findet eine Fokussierung auf symbolische Darstellungssysteme statt (Hitt, 2002b, S. 3). Die mathematikdidaktische Forschung im Grundschulbereich zeigt, dass Lernende zu Beginn ihrer Schullaufbahn depiktionale Darstellungen noch eigenständig einsetzen (Fuson & Willis, 1989, S. 514). Verschiedene Unterrichtserfahrungen führen dann jedoch zur Verwendung automatisierter, rein symbolischer Verfahren. Bei diesen Unterrichtserfahrungen handelt es sich beispielsweise um eine mangelnde Vielfalt an Aufgabentypen sowie eine häufige Verwendung von Aufgabentypen, die automatisierte Verfahren begünstigen (Fuson & Willis, 1989, S. 514).

Um solchen Unterrichtserfahrungen entgegenzuwirken und den Lernenden bestmögliche Chancen zu eröffnen, depiktionale Darstellungen in mathematischen Lösungsprozessen wirksam zu nutzen, sollten Lehrkräfte explizite und sachkundige Entscheidungen über den Einbezug depiktionaler Darstellungen im Unterricht treffen (Presmeg, 2006, S. 220). Tatsächlich scheint dabei vor allem die Verknüpfung zwischen depiktionalen und deskriptionalen Darstellungen besonders entscheidend zu sein, da eine Studie von Presmeg (2006, S. 213 f.) zeigte, dass Lernende mit hohen Visualisierungspräferenzen die besten Lernergebnisse erzielen, wenn die Lehrkräfte zwar die Verwendung von Visualisierungen unterstützen, diese aber nicht ausschließlich fokussieren, sondern darin vielmehr eine Zwischenstufe zur Erreichung der Generalisierung sehen. Eine wichtige Aufgabe von Mathematiklehrkräften besteht deshalb in der Schaffung von Lernumgebungen, in denen sowohl das Lesen als auch das selbständige Erstellen schematischer Darstellungen mit allen notwendigen Teilkompetenzen erlernt werden kann. Insbesondere das selbständige Erstellen depiktionaler Darstellungen ist eine zentrale lebenswelt- und zukunftsrelevante Fähigkeit, da in der realen Welt der Wissenschaften oder der Berufswelt häufig auch keine Darstellungen vorgegeben werden, sondern selbst konstruiert werden müssen.

2.7 Skizzen als von Lernenden selbst erstellte, externe, depiktionale Darstellungen

In den vorherigen Abschnitten wurde bereits deutlich, dass das eigenständige Zeichnen einer Skizze eine besonders relevante Repräsentationsform sowohl in der Wissenschaft der Mathematik als auch beim Lehren und Lernen von Mathematik darstellt. Die Verwendung von Skizzen als externalen Darstellungen stellt einen zentralen Aspekt räumlicher Fähigkeiten dar und bietet eine wesentliche Grundlage für Verstehens-, Lern- und Kommunikationsprozesse. Gegenüber *deskriptionalen* Repräsentationen bieten Skizzen als *depiktionale* Darstellungen insofern besondere Vorteile, dass sie sich durch Analogien zu realen Objekten und Strukturen auszeichnen, gleichzeitig aber auch durch Analogie zum mentalen Modell. Insofern kann die mentale Modellbildung durch das Zeichnen einer Skizze in besonderer Weise unterstützt werden. Weitere Vorzüge liegen in dem hohen Grad der Explizitheit, informationeller Vollständigkeit sowie interner Konsistenz. Im Gegensatz zu *vorgegebenen* depiktionalen Darstellungen bieten Skizzen als *selbst erstellte* Form unter anderem den Vorteil, dass gegebene deskriptionale Informationen notwendigerweise mit der depiktionalen Darstellung integriert werden, damit diese überhaupt erstellt werden kann. Darüber hinaus werden der Aufbau und die Interaktion mit dem mentalen Modell gefördert, indem eine subjektive Darstellung selbständig erstellt wird. Neben Skizzen gibt es weitere Möglichkeiten, depiktionale, externale Darstellungen anzufertigen – zum Beispiel andere Arten von Zeichnungen, wie nach strengen Regeln angefertigte mathematische Konstruktionen im engen Sinne, oder Darstellungen, die mit Hilfe digitaler Medien angefertigt werden. Allerdings ist das Zeichnen von Skizzen gerade in schulischen Lehr-Lern-Prozessen in allen möglichen Altersstufen besonders niedrigschwellig anzuwenden und bietet durch das Fehlen strenger Regeln zumindest ein Stück weit Freiräume für individuelle Anwendung und eine besondere Nähe zu mentalen Modellen.

Das Skizzenzeichnen wird in der vorliegenden Arbeit verstanden als spezielle Form des Zeichnens, bei der mit Stift und Papier eine externe, depiktionale Darstellung erzeugt wird, die einen bestimmten Inhalt – insbesondere Strukturen und Beziehungen – im statischen, zweidimensionalen Raum wiedergibt (Quillin & Thomas, 2015, S. 1). Die Besonderheit liegt vor allem darin, dass es beim Skizzieren nicht darum geht, die Situation oder Konstellation möglichst wirklichkeitsgetreu und exakt wiederzugeben (wie etwa bei einem realistischen Gemälde). Vielmehr wird durch gezielte Verfremdung eine vereinfachte, auf das Wesentliche reduzierte Darstellung erzeugt (Kautschitsch, 2015, S. 144 f.). Der Grund für diese Verfremdung liegt darin, dass die Darstellung nicht streng bildlich aufgefasst werden soll. Der Betrachter soll also nicht dazu verleitet werden, alle Eigenschaften (Längen, Winkel usw.) als konstitutiv zu betrachten (Kautschitsch, 2015, S. 144 f.). Um das zu erreichen, werden beispielsweise Winkelschenkel gekrümmt oder Strecken absichtlich *nicht* gerade gezeichnet (Kautschitsch, 2015, S. 144 f.). Gleichheiten und Relationen zwischen den Objekten werden nicht durch Messungen dargestellt, sondern durch zeichnerische Hilfsmittel (Hilfslinien, farbige Kennzeichnung) (Kautschitsch, 2015, S. 144 f.) oder auch durch symbolische Ergänzungen verdeutlicht.

Der Begriff „selbst erstellt" wird so definiert, dass die Lernenden die vollständige Verantwortung für die Beschaffenheit der Skizze als Produkt sowie für den Prozess des Zeichnens übernehmen (Van Meter et al., 2006, S. 143). Während auch unterstützte Formen von Zeichnungen denkbar wären, bei denen z. B. vorgegebene Zeichnungen ergänzt oder Teilzeichnungen zusammengesetzt werden müssen (Van Meter & Garner, 2005, S. 290), besteht in dieser Studie ein Interesse daran, möglichst genuine Zeichenprozesse zu untersuchen. Das Skizzenzeichnen wird außerdem als Strategie definiert, die von den Lernenden eingesetzt wird, um ein konkretes Lernziel – hier: die Lösung der Aufgabe – zu erreichen. Es handelt sich demnach um eine Lösungsstrategie, die von den Lernenden aktiv verwendet wird (Van Meter & Garner, 2005, S. 290).

Zusammengefasst werden Skizzen in der vorliegenden Arbeit definiert als externe, depiktionale Repräsentationen bzw. Visualisierungen, die

(a) mit Stift und Papier gezeichnet werden,

(b) gezielt vereinfacht und verfremdet sind,

(c) von den Lernenden vollständig selbst erstellt sowie

(d) aktiv zum Erreichen des Lernziels eingesetzt werden.

Skizzen können sowohl situativ als auch schematisch gezeichnet werden. Während Situationsskizzen stärker auf Oberflächenmerkmale fokussieren, verdeutlichen schematische Skizzen in erster Linie die Strukturen und Beziehungen zwischen Objekten.[9] Der Einsatz von selbst erstellten Skizzen hat sich beim Lehren und Lernen von Mathematik insbesondere für die Lösung komplexer und anspruchsvoller Problemsituationen als hilfreich erwiesen. Deshalb wird das Skizzenzeichnen in dieser Arbeit am Beispiel mathematischer Modellierungsaufgaben untersucht, die im Vergleich zu innermathematischen Aufgaben in der Regel eine besondere Herausforderung für Lernende darstellen.

[9] In Kapitel 3.4.5 wird das Verständnis situativer und schematischer Skizzen, das der vorliegenden Studie zugrunde liegt, ausführlich erläutert.

3 Das Zeichnen von Skizzen als Lösungsstrategie

Das Skizzenzeichnen als Lösungsstrategie bringt aus theoretischer Perspektive vielfältige Vorteile mit sich. In der Mathematikdidaktik wurde die Wirkungsweise der Strategie bisher vor allem im Bereich des Problemlösens erforscht (Kapitel 3.1). So kann das Zeichnen einer Skizze dazu dienen, das Arbeitsgedächtnis zu entlasten, Vorwissen zu aktivieren, Informationen zu ordnen oder mathematische Strukturen zu erkennen. Allerdings bringt das Skizzenzeichnen nicht nur Vorteile mit sich, sondern kann auch eine kognitive Belastung für Lernende darstellen. Um diese kognitiven Wirkungsweisen nachvollziehen zu können, ist eine Betrachtung kognitionspsychologischer Theorien hilfreich (Kapitel 3.2). Die bisherigen empirischen Erkenntnisse zum Einsatz des Skizzenzeichnens als Lösungsstrategie sind inkonsistent. Während einige Studien positive Effekte der Strategie nachwiesen, ergaben andere Untersuchungen keine bzw. sogar negative Effekte der Strategie (Kapitel 3.3). Die Ursache für diese Inkonsistenz liegt vor allem in den zahlreichen Faktoren, die den Strategieeinsatz bedingen und die in den verschiedenen Studien stark variieren (Kapitel 3.4). Besonders überraschend ist, dass bisher wenig Erkenntnisse zum Zeichnen einer Skizze speziell zu *geometrischen* Themen vorliegen, obwohl es sich bei der Geometrie gerade um einen Themenbereich handelt, der besonders von der Verwendung depiktionaler Darstellungen geprägt ist. Aus diesem Grund befasst sich die vorliegende Arbeit schwerpunktmäßig mit dem Zeichnen von Skizzen zu *geometrischen* Themen (Kapitel 3.5).

3.1 Skizzenzeichnen als mathematische Problemlösestrategie

„[S]uccessful problem solving requires the comprehension of relevant textual information, the capacity to visualize the data".

(Jonassen, 2003, S. 269)

Im Bereich des Lehrens und Lernens von Mathematik wurde das Zeichnen einer Skizze als Strategie vor allem beim mathematischen Problemlösen untersucht. Es hat sich gezeigt, dass die Leistung beim Lösen mathematischer Probleme nicht allein durch mathematische Fähigkeiten begrenzt ist, sondern Problemlöseprozesse durch die Anwendung von Strategien beeinflusst werden können (Krawec, 2014, S. 104 f.). Gerade zu Beginn des Prozesses ist es für erfolgreiches Problemlösen entscheidend, dass das Problem verstanden wird und die gegebenen, verbalen Informationen visualisiert werden (siehe Eingangszitat). Deshalb wird die Verwendung depiktionaler Darstellungen von Expertinnen und Experten nicht nur als nützlich, sondern als unverzichtbar für das mathematische Problemlösen eingeschätzt (Stylianou, 2011). Die Wirksamkeit des Skizzenzeichnens wird vor allem in den ersten Phasen des Lösungsprozesses verortet, in denen die Lernenden mit Hilfe der Skizze die Problemkomponenten konzeptionell erfassen, diese miteinander verknüpfen und dabei eine Herangehensweise an das Problem entwickeln können (Krawec, 2014, S. 111; Verschaffel et al., 2020, S. 6). Denkbar ist aber auch, dass die Skizze für die Erarbeitung der Lösung selbst genutzt wird (Krawec, 2014, S. 111).

Das mathematische Problemlösen wird neben dem mathematischen Modellieren und vier weiteren zentralen mathematischen Kompetenzen als eine grundlegende Fähigkeit erachtet, die Lernende im Mathematikunterricht erwerben sollen. Neben der Bearbeitung vorgegebener oder selbstformulierter Probleme umfasst die Kompetenz die Auswahl und Anwendung von Heuristiken und Strategien zum Problemlösen sowie die Überprüfung und Reflexion von Lösungswegen und -ergebnissen (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012, S. 8 f.). Auch wenn das mathematische Modellieren als separate Kompetenz betrachtet wird, fallen Parallelen zwischen den Kompetenzen auf: In beiden Fällen geht es um das Lösen von Problemsituationen (auch wenn diese beim Modellieren einen stärkeren Realitätsbezug haben), in beiden Fällen werden Strategien und Verfahren zum Lösen eingesetzt (wobei die Strategieanwendung beim Problemlösen stärker etabliert ist) und die Reflexion und Prüfung von Ergebnissen spielt bei beiden Kompetenzen eine wichtige Rolle. Aufgrund der Parallelen kann angenommen werden, dass sich einige theorie- und empirisch basierte Erkenntnisse zum Einsatz der Strategie des Skizzenzeichnens beim Problemlösen auf den Bereich des Modellierens übertragen lassen. Diese Übertragung sollte dennoch stets unter Vorbehalt und in Form von Hypothesen stattfinden, die es empirisch zu belegen gilt.

Das Erstellen von Skizzen hat sich in vielen empirischen Studien als wirksame Strategie beim mathematischen Problemlösen erwiesen und wird von Grundlagenwerken zum Problemlösen als wesentliche Strategie angeführt (Fiorella & Zhang, 2018; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Pólya, 1967; z. B. Van Garderen & Montague, 2003; Van Meter & Garner, 2005). Im Alter zwischen acht und elf Jahren wird bei Kindern die kognitive Fähigkeit des Visualisierens ausgebildet (Van Garderen & Montague, 2003, S. 246). Ab diesem Zeitpunkt sind Kinder demnach in der Lage, sich ausgereifte, mentale Bilder zu machen, externe Bilder mit Stift und Papier zu konstruieren und diese zum Verständnis von Problemstellungen und für mathematische Entdeckungen zu nutzen (Van Garderen & Montague, 2003, S. 246). Es wird angenommen, dass das Skizzenzeichnen als Visualisierungsstrategie dazu beträgt, den Fokus im Lernprozess weg von der Textoberfläche hin zu den Textinhalten zu steuern (Leopold & Leutner, 2015, S. 332). Eine Einordnung in lernstrategische Theorien macht deutlich, dass die Strategie vor allem zur *Organisation* von neuen Informationen sowie zur *Integration* mit bestehendem Vorwissen beitragen kann (vgl. Kapitel 4.7).

Schmidgall, Eitel, & Scheiter (2019, S. 139) benennen drei Faktoren, die die Besonderheit der Zeichenstrategie im Vergleich zu anderen Strategien beim mathematischen Problemlösen ausmachen: die Generierung, die Visualisierung und die Externalisierung.

Der Aspekt der ***Generierung*** beschreibt das Skizzenzeichnen als eine selbstregulierte, generative Lernstrategie, bei der eine Abbildung zu den wesentlichen Inhalten einer verbalen Beschreibung eigenständig erstellt wird (Schmidgall et al., 2019, S. 139). Es wird davon ausgegangen, dass die eigenständige Konstruktion der Darstellung eine Verbesserung der Leistung bewirken kann, indem die Lernenden kognitive Anstrengungen für die Verarbeitung der Informationen aufbringen (Schmidgall et al., 2019, S. 139). Anders als beim bloßen Lesen eines Textes oder beim Verarbeiten eines Textes mit vorgegebenen Zeichnungen ist das Skizzenzeichnen eine konstruktive Tätigkeit, die eine höhere Aktivität der Lernenden erfordert und damit ein tieferes Verständnis bewirken kann (Schmidgall et al., 2019, S. 139; Van Meter & Garner, 2005, S. 286 ff.).

Eine weitere Besonderheit der Strategie des Zeichnens besteht im Aspekt der ***Visualisierung***: das Skizzenzeichen ist modalitätsübergreifend und erleichtert somit die Integration verschiedener Darstellungsformen (Van Meter & Garner, 2005, S. 287). Während bei verbal orientierten Strategien wie dem Anfertigen von Notizen die Informationen im gleichen, sequentiellen Format dargestellt werden, erfordert das Zeichnen einer Visualisierung eine Übersetzung in den zweidimensionalen Raum, wodurch eine Betrachtung der gesamten Struktur des Textes nahezu unumgänglich wird (Larkin & Simon, 1987; Schmeck, 2010, S. 24 f.; Van Meter & Garner, 2005, S. 287). Die einzelnen Informationen werden räumlich angeordnet, um eine depiktionale Darstellung der Gesamtsituation einschließlich aller relevanten Zusammenhänge zu erzeugen (Leopold & Leutner, 2015, S. 223). Eine kohärente Wissensstruktur wird erzeugt, die eine Auslassung einzelner Informationen, die beispielsweise beim Anfertigen von Notizen leicht auftreten kann, erschwert (Fiorella & Zhang, 2018, S. 1117; Leopold & Leutner, 2015, S. 223; Schmeck, 2010, S. 24 f.). Weiterhin kann die depiktionale Darstellung Zusammenhänge explizit machen, die aus dem Text heraus nicht direkt zu entnehmen sind (Larkin & Simon, 1987, S. 70; Schmidgall et al., 2019, S. 139 f.).

Verbale Strategien wie das Paraphrasieren oder Zusammenfassen sind in erster Linie auf die Bildung einer propositionalen Repräsentation ausgerichtet. Das Skizzenzeichnen als depiktionale bzw. modellorientierte Strategie unterstützt dagegen die Konstruktion eines mentalen Modells (vgl. Kapitel 2.2) und damit tiefergehende kognitive Prozesse (Fiorella & Zhang, 2018, S. 1117). Indem das depiktionale Modell anhand der verbalen Informationen erzeugt wird, wird außerdem eine Integration von verbalem und nonverbalem mentalen Modell gewissermaßen erzwungen (Van Meter & Garner, 2005, S. 287). Diese automatisierte Verknüpfung des verbalen und des nonverbalen mentalen Modells kann eine besondere Unterstützung für Lern- und Lösungsprozesse bieten – insbesondere, wenn es sich um Texte handelt, in denen komplexe, räumliche Zusammenhänge beschrieben werden (Fiorella & Zhang, 2018, S. 1117; Leopold & Leutner, 2015, S. 223; Van Meter & Garner, 2005, S. 287) (vgl. Kapitel 3.2.2).

Der dritte Faktor, der die Strategie des Skizzenzeichnens auszeichnet, ist die ***Externalisierung***: Die visuelle Darstellung wird nicht nur mental erzeugt (wie beim bildlichen Vorstellen), sondern mit Hilfe von Stift und Papier externalisiert und somit eine multimediale Repräsentation erstellt (Mayer, 2005; Schmidgall et al., 2019). Durch die Externalisierung können Zusammenhänge deutlich werden, die mental nicht zu erkennen waren, so dass ein tieferes Verständnis erzeugt wird (Schmidgall et al., 2019, S. 139 f.). Auf Grundlage des internen Modells wird die externe Darstellung konstruiert, die wiederum zu einem neuen Material wird, das weiter untersucht und somit neue Erkenntnisse erlangt werden können (Schmidgall et al., 2019, S. 139

f.). Es entsteht ein iterativer Prozess der Modellentwicklung. Die externe Darstellung kann außerdem zur Entlastung des Arbeitsgedächtnisses beitragen, indem verarbeitete Informationen und vollzogene Lösungsschritte anhand der Skizze festgehalten werden können (Ainsworth, 2006, S. 185; Schmidgall et al., 2019, S. 139). Vor allem bei komplexen Problemstellungen, die kognitiv herausfordernd sind, kann der Faktor der Externalisierung zum Tragen kommen. Gleichzeitig ist der Prozess der Externalisierung für die Lernenden aber auch anspruchsvoll und erfordert den Einsatz umfassender kognitiver Ressourcen.

In der empirischen Forschung wurde im Rahmen verschiedener Studien ein positiver Zusammenhang zwischen dem Erstellen depiktionaler Darstellungen und dem erfolgreichen Lösen mathematischer Probleme nachgewiesen (J. L. Booth & Koedinger, 2012; Diezmann, 2002; Elia & Philippou, 2004; Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Allerdings gibt es ebenso Studien, in denen kein Zusammenhang auftrat bzw. in einigen der bereits genannten Studien traten unter bestimmen Bedingungen keine Zusammenhänge zwischen der Strategie des Skizzenzeichnens und dem mathematischen Problemlösen auf (J. L. Booth & Koedinger, 2012; Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Die uneinheitlichen Forschungsergebnisse scheinen auf verschiedene Faktoren zurückzuführen zu sein, wie z. B. die Art der untersuchten Darstellungen, das Anforderungsniveau oder das Themengebiet, in dem die Strategie angewendet wurde (vgl. Kapitel 3.4). Die Forschungsergebnisse zur Wirkung des Skizzenzeichens werden in Kapitel 3.3 näher erläutert. Um diese besser erklärbar zu machen, erfolgt zunächst die Analyse kognitionspsychologischer Theorien, die in Bezug auf das Skizzenzeichnen eine wesentliche Rolle spielen.

3.2 Kognitionspsychologische Theorien zum Skizzenzeichnen

„When a problem solver makes use of external representations, he starts internal communication by producing and receiving signs alternately"

(Reuter et al., 2015, S. 1388)

Um die im Zitat beschriebenen Prozesse der internen Kommunikation beim Skizzenzeichnen genauer beschreiben zu können, bieten die ***Kognitive Theorie des multimedialen Lernens*** (Mayer, 2005) sowie das ***Integrierte Modell des Text- und Bildverstehens*** (Schnotz & Bannert, 2003) hilfreiche theoretische Ansätze, die ursprünglich für die Gestaltung von Lernprozessen entwickelt wurden.

3.2.1 Theorien des multimedialen Lernens

Im Rahmen der ***Kognitiven Theorie des multimedialen Lernens*** nach Mayer (2005, S. 31–48) werden die kognitiven Prozesse beschrieben, die beim Umgang mit multimedialem Material ablaufen. Die zentralen Annahmen der Theorie bestehen darin, dass **(1)** die Verarbeitung von Informationen über zwei verschiedene Kanäle erfolgt, **(2)** die Verarbeitungskapazität der beiden Kanäle jeweils begrenzt ist und **(3)** die Informationsverarbeitung durch die drei aktiven, kognitiven Prozesse der Selektion, Organisation und Integration stattfindet.

Annahme **(1)** leitet sich aus der *Theorie der dualen Kodierung* nach Paivio (2007, S. 25 ff.) ab, die beinhaltet, dass das Denken innerhalb zweier Subsysteme stattfindet: einem verbalen und einem nonverbalen System. Diese Annahme wurde insofern von der *Kognitiven Theorie des multimedialen Lernens* adaptiert, dass hinsichtlich des Präsentationsmodus zwischen einem Kanal zur Verarbeitung verbalen Materials (gesprochene und gedruckte Worte) und einem Kanal zur Verarbeitung depiktionalen Materials (z. B. Bilder, Video) unterschieden wird (Mayer, 2005, S. 33 f.). Das zentrale Prinzip der *Theorie der dualen Kodierung* besteht darin, dass beide Subsysteme zwar unabhängig voneinander agieren können, aber gleichzeitig in einem informationellen Austausch miteinander stehen, der den Abruf von Informationen erleichtern kann (Paivio, 2007, S. 25 ff.).

Annahme **(2)** zur begrenzten Verarbeitungskapazität basiert auf dem *Modell des Arbeitsgedächtnisses* nach Baddeley sowie der *Theorie der kognitiven Belastung* nach Sweller (2005a). Es wird angenommen, dass Lernende nur eine begrenzte Menge an Informationen in jedem der Kanäle gleichzeitig verarbeiten können (Mayer, 2005, S. 35 f.). Das impliziert, dass die Lernenden niemals eine exakte Kopie des gegebenen Materials bilden, sondern immer nur einzelne Elemente fokussieren können (Mayer, 2005, S. 35 f.). Die Grenzen der Verarbeitungskapazität machen eine bewusste Auswahl von Informationen, von Verknüpfungen zwischen diesen und auch von Verknüpfung zum Vorwissen zwingend notwendig (Mayer, 2005, S. 35 f.).

Gemäß Annahme **(3)** ist Lernen ein aktiver Prozess der Wissenskonstruktion, bei dem durch die Selektion von Informationselementen, die Organisation und die anschließende Integration dieser Elemente – untereinander sowie mit vorhandenem Vorwissen – ein kohärentes, mentales Modell gebildet wird (Mayer, 2005, S. 36 f.). Zunächst wird laut Mayer das präsentierte, externe Material für eine kurze Dauer im sensorischen Gedächtnis zwischengespeichert. Anschließend findet eine *Selektion* relevanter Wörter bzw. Bildelemente statt, wodurch die präsentierten, externen Medien in das Arbeitsgedächtnis aufgenommen werden (Mayer, 2005, S. 39). Durch die Selektion entstehen erste mentale Repräsentationen der Wörter bzw. Bilder, die aber noch vorbewusst und nicht miteinander verknüpft sind (Mayer, 2005, S. 39). Die Notwendigkeit der Selektion ergibt sich aufgrund der begrenzten Kapazität der zwei Kanäle des Arbeitsgedächtnisses (Mayer, 2005, S. 35 f.; Sweller, 2005a, S. 22 f.).

Im nächsten Schritt werden die mental repräsentierten, einzelnen Wörter bzw. Bildelemente durch den Prozess der *Organisation* zu einer kohärenten, mentalen Darstellung zusammengefügt, die als verbales Modell bzw. bildliches Modell bezeichnet wird (Mayer, 2005, S. 39 f.). Es werden Verknüpfungen zwischen den einzelnen Elementen innerhalb des jeweiligen Kanals hergestellt (Mayer, 2005, S. 39 f.). Auch hierbei ist die begrenzte Arbeitsgedächtniskapazität ausschlaggebend dafür, dass die Lernenden entscheiden müssen, welche Verknüpfungen sie herstellen (Mayer, 2005, S. 35 f.; Sweller, 2005a, S. 22 f.).

Der letzte und wohl entscheidendste Schritt ist die *Integration*, d. h. die Verknüpfung des verbalen und des bildlichen Modells über die verschiedenen Kanäle hinweg (Mayer, 2005, S. 40

f.). Die zwei verschiedenen Modelle werden zu einer integrierten Darstellung zusammengefügt, indem die korrespondieren Elemente und Relationen aus dem einen Modell auf die des jeweils anderen Modells abgebildet werden (Mayer, 2005, S. 40 f.). Darüber hinaus wird zur Bildung des integrierten Modells das Vorwissen aus dem Langzeitgedächtnis aktiviert und Verknüpfungen dazu hergestellt. Es handelt sich dabei um einen kognitiv besonders anspruchsvollen Prozess, der von Mayer (2005, S. 40) als „epitome of sense making" bezeichnet wird, da sich die Lernenden dabei auf die zugrundeliegende Struktur der verbalen und depiktionalen Darstellung fokussieren.

Eine weitere Theorie, die zur Beschreibung der Verarbeitungsprozesse beim multimedialen Lernen entwickelt wurde, ist das ***Integrierte Modell des Text- und Bildverstehens*** nach Schnotz und Bannert (2003). Es bestehen Parallelen zur *Kognitiven Theorie des multimedialen Lernens* wie zum Beispiel die Annahme zweier Kanäle und eine Postulierung kognitiver Prozesse, allerdings werden diese in der Theorie anders konzeptualisiert und liefern zusätzliche Erkenntnisse zu möglichen kognitiven Vorgängen beim Skizzenzeichnen.

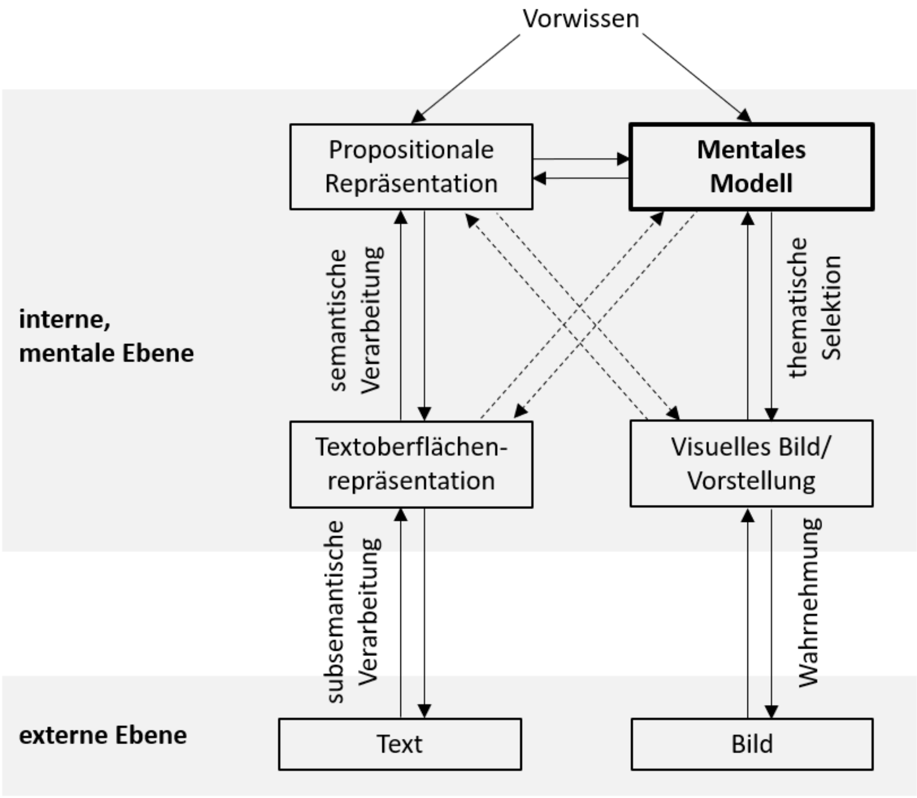


Abbildung 1: Modell des Text- und Bildverstehens, angelehnt an Schnotz und Bannert (2018)

Dem *Integrierten Modell des Text- und Bildverstehens* (Schnotz & Bannert, 2003) (Abbildung 1) zufolge konstruieren Lernende auf Grundlage eines externen Textes durch subsemantische Verarbeitungsprozesse (die sowohl Selektion als auch verbale Organisation umfassen) zunächst eine mentale Repräsentation der Textoberfläche (Schnotz & Bannert, 2003, S. 145). Ausgehend von der Textoberflächenrepräsentation wird durch semantische (d. h. konzeptionell organisatorische) Prozesse eine propositionale Repräsentation gebildet (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Diese löst wiederum die Konstruktion eines mentalen Modells aus, wobei währenddessen ein Übergang von der deskriptiven zur depiktionalen Ebene stattfindet (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Im Gegensatz zur *Kognitiven Theorie des multimedialen Lernens* wird hier herausgestellt, dass in Form von Modellkonstruktion und -inspektion eine kontinuierliche Interaktion zwischen der propositionalen Repräsentation und dem mentalen Modell stattfindet (Schnotz & Bannert, 2003, S. 145). Auf Grundlage des mentalen Modells können in der entgegengesetzten Richtung durch schemageleitete Prozesse Informationen aus dem mentalen Modell abgeleitet, in propositionalem Format kodiert und durch verbale Äußerungen wieder externalisiert werden (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Dabei handelt es sich um den deskriptionalen Zweig des Modells, der auf der Verarbeitung von Symbolen basiert (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146).

Parallel dazu verläuft der depiktionale Repräsentationszweig, der durch die Verarbeitung von Bildern und Diagrammen initiiert wird (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Durch Wahrnehmungsprozesse, die sowohl top down als auch bottom up ablaufen können, wird zunächst ein internes visuelles Bild konstruiert (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Grafische Einheiten werden identifiziert und visuell organisiert (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Bei diesem visuellen Bild handelt es sich um eine Oberflächendarstellung des externen Bildmaterials, die an die visuelle Modalität gebunden ist (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146).

Anschließend erfolgt die semantische Verarbeitung des mentalen, visuellen Bildes, durch die das Bildmaterial nicht mehr nur wahrgenommen, sondern verstanden wird (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Durch schemageleitete Zuordnungsprozesse werden grafische Einheiten auf mentale Einheiten und räumliche Relationen auf semantische Relationen abgebildet und auf diese Weise das mentale Modell konstruiert (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Dieses mentale Modell ist nicht mehr auf die visuelle Modalität beschränkt (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146). Auch die Abbildungsprozesse können sowohl bottom up ablaufen, indem vom visuellen Bild ausgehend das mentale Modell konstruiert wird, als auch top down, indem ein bestehendes mentales Modell anhand des visuellen Bildes überprüft wird (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146).

Gemäß Schnotz und Bannert ist das mentale Modell eine *depiktionale* interne Repräsentation – unabhängig davon, ob es durch Text- oder Bildverstehensprozesse erzeugt wurde (Schnotz & Bannert, 2003, S. 147). Es weist strukturelle Analogien zu visuellen Bildern auf, geht gleichzeitig aber über die Darstellung von räumlichen Informationen hinaus und kann auch abstraktere Zusammenhänge (wie z. B. den Anstieg des Einkommens während eines bestimmten Zeitraums) beinhalten (Schnotz & Bannert, 2003, S. 147). Wie auch beim Textverstehensprozess können auf Grundlage des mentalen Modells durch Modellinspektion Informationen abgelesen werden, wodurch die propositionale Repräsentation weiterentwickelt wird (Schnotz & Bannert, 2003, S. 147).

Eine Besonderheit des *Integrierten Modells des Text- und Bildverstehens* (Schnotz & Bannert, 2003, S. 147) besteht in der Fokussierung der Interaktion zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen. Nicht nur zwischen dem mentalen Modell und der propositionalen

Repräsentation, sondern auch zwischen der Textoberflächenrepräsentation und dem mentalen Modell bzw. zwischen dem visuellen Bild und der propositionalen Repräsentation können Interaktionen stattfinden (dargestellt durch die gestrichelten Pfeile in Abbildung 1). Demnach wird die Modellkonstruktion als ein integrativer Prozess verstanden, bei dem wechselseitige Bottom-up- und Top-down-Prozesse zur schrittweisen Bildung des mentalen Modells beitragen.

3.2.2 Theorien der Zeichenkonstruktion

Auf Grundlage der *Kognitiven Theorie des multimedialen Lernens* wurde zunächst die ***Generative Theorie der Zeichenkonstruktion*** (Van Meter & Garner, 2005) entwickelt und diese anschließend unter Berücksichtigung des *Integrierten Modells des Text- und Bildverstehens* zum ***Kognitiven Modell der Zeichenkonstruktion*** (Van Meter & Firetto, 2013) weiterentwickelt. Im Folgenden wird unter Rückgriff auf die Theorien zur Zeichenkonstruktion sowie der zuvor beschriebenen multimedialen Theorien der Prozess des Skizzenzeichnens aus kognitionspsychologischer Perspektive erläutert.

Während die zuvor dargelegten Theorien die Verarbeitung multimedialen Materials – d. h. vorgegebener verbaler und bildlicher Informationen – beschreiben, leiten die *Generative Theorie der Zeichenkonstruktion* (Van Meter & Garner, 2005) und das *Kognitive Modell der Zeichenkonstruktion* (Van Meter & Firetto, 2013) aus diesen Theorien Erkenntnisse zum Ablauf kognitiver Prozesse beim selbständigen Erstellen von Zeichnungen ab, die allein aufgrund einer Textbasis konstruiert werden. Im Fall der vorliegenden Studie handelt es sich bei der Textbasis um Modellierungsaufgaben, in denen jeweils eine Problemsituation beschrieben wird.

Der Prozess des Skizzenzeichnens (Abbildung 2) beginnt damit, dass die verbalen Informationen durch subsemantische Verarbeitungsprozesse der Selektion und Organisation (Mayer, 2005, S. 38 ff.; Schnotz & Bannert, 2003, S. 145 f.) in eine Textoberflächendarstellung überführt werden, anschließend durch semantische Prozesse unter Rückgriff auf das Vorwissen eine propositionale Repräsentation konstruiert wird und diese wiederum die Konstruktion des mentalen Modells anregt (Schnotz & Bannert, 2003, S. 145 ff.; Van Meter & Firetto, 2013, S. 255 f.).

Wenn multimediale Darstellungen gegeben sind, können die verschiedenen Darstellungen die semantischen Selektions- und Organisationsprozesse des jeweils anderen Kanals steuern (Van Meter & Garner, 2005, S. 317). Aus dem Text werden bestimmte Elemente ausgewählt, die in der bildlichen Darstellung gesucht werden und umgekehrt (Van Meter & Garner, 2005, S. 317). Dabei können die Lernenden die entnommenen Informationen validieren, ggf. verwerfen oder auf neue Informationen stoßen, die sie zu einer erneuten Inspektion des Textes bzw. Bildes veranlasst, wodurch sie weitere Informationen aus dem Text eruieren usw. (Van Meter & Garner, 2005, S. 317). Dieses Wechselspiel zwischen den Darstellungen, das sowohl einschränkende als auch elaborierende Funktionen haben kann, bleibt beim selbständigen Erstellen einer Skizze zunächst aus. Gleiches gilt für die organisatorischen Prozesse, da die gebildeten Strukturen bei multimedialem Material auf verbaler Ebene als Grundlage und Kontrollinstrument für die Organisation der Informationen auf bildlicher Ebene dienen können – und umgekehrt (Van Meter & Garner, 2005, S. 317). Diese Kontrollfunktion ist beim Zeichnen einer Skizze anhand einer Textgrundlage nicht gegeben.

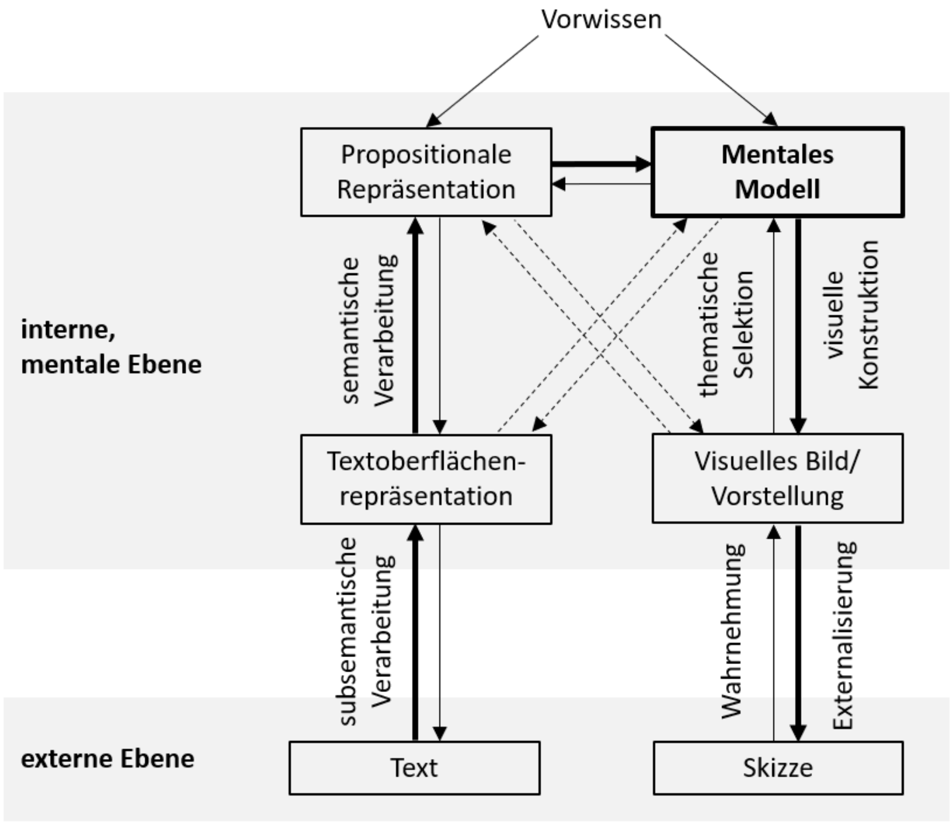


Abbildung 2: Modell der Skizzenkonstruktion aufgrund einer Textbasis; angelehnt an Schnotz & Bannert, 2018, S. 889

Obwohl diese Ausführungen den Wert von *vorgegebenen* multimedialen Lernmaterialien auf theoretischer Ebene verdeutlichen, zeigt sich in der Praxis, dass Lernende Text und Bild häufig nicht integrieren, weil sie die Verknüpfungen zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen nicht herstellen können oder das Bildmaterial gar nicht beachten (z. B. Dewolf et al., 2013). Wenn die verschiedenen Repräsentationen nicht verknüpft werden, können die oben beschriebenen elaborativen und reflektiven Prozesse zwischen den Darstellungen der verschiedenen Kanäle nicht stattfinden. Vor dem Hintergrund des *Integrierten Modells des Text- und Bildverstehens* (Schnotz & Bannert, 2003) kann man es so ausdrücken, dass die Lernenden bei der Verarbeitung multimedialer Darstellungen häufig nur eine propositionale Basis und/ oder ein visuelles Bild, aber kein vollständiges mentales Modell ausbilden.

Der Prozess des Skizzenzeichnens beginnt laut Van Meter & Firetto (2013, S. 257) mit dem ***Setzen von Zeichenstandards***, bei dem sich die Lernenden überlegen, welche Aspekte und Verknüpfungen in der Zeichnung dargestellt werden sollen. Durch das Setzen der Standards wird die Aufmerksamkeit der Lernenden auf die wesentlichen Informationen des Textes gelenkt (Van Meter & Firetto, 2013, S. 257). Anschließend folgt die ***Anwendung der strategischen Prozesse***, d. h. die Selektion und Organisation der verbalen Elemente und Relationen, die zur Bildung der propositionalen Repräsentation benötigt werden, auf deren Grundlage dann das mentale Modell und letztlich auch die externe Skizze erstellt werden (Van Meter & Firetto, 2013, S. 258). Das Zeichnen einer Skizze beeinflusst die Selektion und Organisation insofern, als die Lernenden dies im Hinblick auf ein konkretes Ziel – das Erstellen der Skizze – durchführen. Die Lernenden *müssen* aus dem Text zentrale Elemente auswählen und diese so strukturieren, dass sie schließlich in der Skizze dargestellt werden können.

Anschließend erfolgt die ***Integration der verbalen und bildlichen Repräsentationen*** (Mayer, 2005, S. 40 f.) bzw. die ***Konstruktion des mentalen Modells*** (Schnotz & Bannert, 2003, S. 146 f.). Van Meter & Garner (2005, S. 286) erachten die Funktionsweise des Skizzenzeichnens bei dem Prozess der Integration als besonders zentral. Durch die Zeichenstrategie wird der Integrationsprozess und die Bildung des mentalen Modells gewissermaßen erzwungen (Van Meter & Garner, 2005, S. 287). Eine Skizze kann nur erstellt werden, wenn zuvor ein mentales Modell ausgebildet wurde, auf dessen Grundlage das mentale, visuelle Bild konstruiert wird, welches anschließend in Form der Skizze externalisiert wird (Abbildung 2). Die Informationen aus dem verbalen Kanal werden genutzt, um die depiktionale Darstellung zu erstellen, wodurch Verknüpfungen zwischen beiden Kanälen unumgänglich werden. Diese Integration der verbalen und bildlichen Repräsentation und damit die Konstruktion des mentalen Modells gelten als grundlegend für die Aktivierung von Vorwissen, für Transferprozesse sowie für sinnvolles Lernen (Ainsworth, 2006, S. 189; Van Meter & Garner, 2005, S. 288).

Auf Grundlage des mentalen Modells wird schließlich das ***interne, visuelle Bild konstruiert*** (Van Meter & Firetto, 2013, S. 255). Schnotz und Bannert (2003, S. 164) postulieren, dass die Wahrnehmung und die bildliche Vorstellung auf den gleichen kognitiven Prozessen beruhen, und deshalb eine mentale visuelle Darstellung, die ausgehend von internem Wissen konstruiert wird, als visuelles Bild bezeichnet werden kann. Bei der Konstruktion des internen, visuellen Bildes im Rahmen des Skizzenzeichenprozesses spielt das Vorwissen eine besondere Rolle. Im Unterschied zu multimedialen Verstehensprozessen wird das mentale Modell nicht ausgehend von Text *und* Bild konstruiert, sondern es wird ausschließlich die propositionale Repräsentation genutzt, um adäquate Bildelemente aus dem Vorwissen zu aktivieren (Van Meter & Garner, 2005, S. 217). Diese Elemente werden anschließend zu einem kohärenten visuellen Bild zusammengesetzt (Van Meter & Garner, 2005, S. 217). Demnach stellen Van Meter & Garner (2005) fest, „that a learner's prior knowledge acts as a critical, and as yet unexplored, support when using the learner-generated drawing strategy." (S. 318).

Das interne, visuelle Bild wird anschließend in Form der Zeichnung externalisiert. Sobald die ***Externalisierung als selbst gezeichnete Skizze*** beginnt, findet laut Van Meter & Firetto (2013, S. 259) eine Überwachung des Lernfortschritts statt, indem die Lernenden anhand der entstehenden Skizze die Einhaltung ihrer zu Beginn gesetzten Standards überprüfen. Wenn das Gezeichnete den Standards gerecht wird, wird das Zeichnen fortgesetzt (Van Meter & Firetto, 2013, S. 259). Anderenfalls kehren die Lernenden zur propositionalen Repräsentation oder sogar zur Textgrundlage zurück, um die Standards zu überprüfen, das mentale Modell ggf. anzupassen und anschließend den Zeichenprozess wiederaufzunehmen (Van Meter & Firetto, 2013, S. 259). Es ist daher anzunehmen, dass die Instruktion zum Zeichnen einer Skizze Selbstüberwachungs- und Selbstregulationsprozesse anregt, die einen besonderen Vorteil der Zeichenstrategie ausmachen (Van Meter & Firetto, 2013, S. 259 f.).

Darüber hinaus können durch die Externalisierung neue Zusammenhänge in Erscheinung treten (R. Cox, 1999, S. 353 f.; Nunokawa, 2006, S. 50), die zu einer Modifikation des visuellen Bildes und davon ausgehend zu einer Überarbeitung des mentalen Modells beitragen können. Durch diese Veränderungen des mentalen Modells können – ähnlich wie bei der Überwachung des Lernfortschritts – erneute Modellinspektionsprozesse initiiert werden, die zu einer Anpassung der propositionalen Basis führen, wobei dafür auch noch einmal auf die externe Textbasis zurückgegriffen werden kann, um die Anpassungen zu validieren.

Insgesamt können auch beim Skizzenzeichnen sämtliche kognitive Prozesse auftreten, die im Rahmen der multimedialen Theorien (Mayer, 2005; Schnotz & Bannert, 2003) postuliert werden. Allerdings finden die Prozesse zunächst ausgehend von der textuellen Basis statt und führen dann zur Ausbildung der Repräsentationen im depiktionalen Kanal (dickgedruckte Pfeile). Erst anschließend können auch kognitive Prozesse jeweils von den depiktionalen Repräsentationsformen ausgehen (dünngedruckte Pfeile). Allerdings finden die Prozesse nicht einmalig oder in einer vorgegebenen Reihenfolge statt. Vielmehr ist davon auszugehen, dass die Prozesse vielfach durchlaufen werden und im ständigen Wechselspiel von bottom-up- und top-down-Prozessen erfolgen.

Auch wenn die beschriebenen kognitiven Prozesse eine lernförderliche Wirkung sowie ein tiefes Verständnis von Textmaterial durch die Strategie des Skizzenzeichnens versprechen, sind diese Effekte kein Automatismus (Schwamborn et al., 2010, S. 872). So ist die erfolgreiche Umsetzung der beschriebenen kognitiven Prozesse beim Zeichnen einer Skizze von der Eignung des Textes abhängig (Van Meter & Firetto, 2013, S. 269). Wenn der Text zu abstrakt ist, kann keine ausreichend detaillierte propositionale Repräsentation gebildet werden (Hellenbrand, 2018, S. 25). Infolge der unvollständigen propositionalen Basis wird die Konstruktion des mentalen Modells sowie einer geeigneten visuellen Repräsentation nicht unterstützt – weder intern als visuelles Bild noch extern als Skizze. Im Gegensatz dazu kann die Textgrundlage aber auch zu detailliert oder zu simpel sein. Dann werden einzelne Worte oder Textabschnitte direkt bei der Textrezeption sukzessive in visuelle Vorstellungsbilder übersetzt, ohne dass die Informationen zur Ausbildung des mentalen Modells beitragen (Hellenbrand, 2018, S. 25). Die Verarbeitung der Textgrundlage sowie das Erstellen der Skizze finden in diesem Fall nur oberflächlich statt und tragen nicht zum sinnstiftenden und tiefenstrukturellen Verständnis bei. Die Strategie des Skizzenzeichnens kann nur dann wirksam sein, wenn die Textgrundlage ausreichend detailliert, aber nicht zu simpel gestaltet ist.

Darüber hinaus ist das Zeichnen eine anspruchsvolle Tätigkeit, die kognitive Kapazitäten beanspruchen und damit das Erreichen des Lernziels behindern kann (Schmeck, 2010, S. 86;

Schwamborn et al., 2010, S. 873). Die ***Theorie der kognitiven Belastung*** (Sweller, 2005a; Sweller et al., 1998) nimmt an, dass das Arbeitsgedächtnis eine stark begrenzte Kapazität hat und aus zwei teilweise unabhängigen Teilkomponenten zur Verarbeitung von auditivem bzw. verbalem Material und visuellem bzw. zwei- und drei-dimensionalem Material besteht. Sweller et al. (1998, S. 252) konstatieren, dass „the implications of working memory limitations on instructional design can hardly be overestimated". Um Informationen verarbeiten zu können und auch um bestehendes Vorwissen zu aktivieren, muss dies in das Arbeitsgedächtnis eingebracht werden. Deshalb sind dessen Beschränkungen grundlegend für Lern- und Lösungsprozesse und müssen bei der Gestaltung von Lernumgebungen berücksichtigt werden. Im Arbeitsgedächtnis werden die Informationen extrahiert und bearbeitet, bevor sie anschließend in schematischer Form im Langzeitgedächtnis gespeichert werden können.

Sweller unterscheidet drei verschiedene Arten kognitiver Belastung, die bei den Prozessen im Arbeitsgedächtnis relevant sind (Sweller, 2005a, S. 26; Sweller et al., 1998, S. 259): (1) die intrinsische kognitive Belastung durch die inhärente Komplexität der Lerninhalte, (2) die extrinsische kognitive Belastung durch die Präsentationsform des Materials bzw. durch die von den Lernenden geforderten Aktivitäten und (3) die lernbezogene kognitive Belastung durch Lernanstrengung, die aufgewendet wird, um das Lernmaterial zu verstehen, indem Schemata aufgebaut und automatisiert werden. Die intrinsische Belastung ist konstituiert durch die Interaktivität zwischen den Lernelementen und kann durch didaktische Maßnahmen nicht beeinflusst werden (Sweller, 2005a, S. 26; Sweller et al., 1998, S. 259 f.). Bei der extrinsischen kognitiven Belastung handelt es sich um eine überflüssige Belastungsform, die durch eine adäquate Gestaltung von Lernumgebungen vermieden oder zumindest minimiert werden kann (Sweller, 2005a, S. 26; Sweller et al., 1998, S. 262 ff.). Im Gegensatz dazu ist die lernbezogene kognitive Belastung erwünscht und soll gezielt gefördert werden, da sie für den Lernprozess notwendig ist und zur Konstruktion sowie zur Reaktivierung von Schemata beiträgt (Sweller, 2005a, S. 26; Sweller et al., 1998, S. 264 f.).

Das Ziel des Einsatzes der Skizzenzeichenstrategie besteht demnach darin, die extrinsische Belastung zu reduzieren, während die lernbezogene kognitive Belastung erhöht wird. In der Annahme, dass eine reine Textgrundlage eine hohe extrinsische Belastung darstellt, indem der Aufbau eines elaborierten mentalen Modells nur anhand der Textgrundlage bewältigt werden muss (Reuter et al., 2015, S. 1388), kann das Zeichnen einer Skizze dazu beitragen, vorhandene Schemata zu aktivieren und neue Schemata zu bilden, um so die lernbezogene kognitive Aktivität zu erhöhen.

Gleichzeitig kann aber das Zeichnen der Skizze selbst eine hohe extrinsische kognitive Belastung darstellen. Die Übersetzung der verbalen Informationen in mentale Vorstellungsbilder ist kognitiv anspruchsvoll, ebenso wie die anschließende Externalisierung in Form der Skizze, die eine Konzentration auf den mechanischen Zeichenprozess erfordert (Schwamborn et al., 2010, S. 873). Zur Externalisierung müssen die Lernenden ihre Aufmerksamkeit gewissermaßen aufteilen, um zum einen die Textbasis zu verstehen, zum anderen die Skizze anzufertigen: Der sogenannte ***Split-Attention-Effekt*** entsteht. Zwar sind in diesem Fall nicht verschiedene

Informationsquellen gegeben, die zeitgleich verarbeitet werden müssen, aber es ist davon auszugehen, dass das Erstellen der Skizze durch das Setzen der Zeichenstandards, die Überwachung des Zeichenprozesses usw. ebenfalls kognitive Ressourcen bindet (Ayres & Sweller, 2005, S. 135). Dieser Effekt kann zu einer zusätzlichen extrinsischen Belastung führen, die wiederum eine Leistungsminderung zur Folge hat.

Aber auch ***Redundancy-Effekte*** können durch das selbständige Erstellen von Skizzen zu mathematischen Modellierungsaufgaben erzeugt werden: „The redundancy effect occurs when additional information presented to learners results in learning decrements compared to the presentation of less information.“ (Sweller, 2005b, S. 159) Zwar werden diese zusätzlichen Informationen beim selbständigen Skizzenzeichnen nicht präsentiert, sondern von den Lernenden in Form der Skizze selbst erstellt, aber unter bestimmten Umständen könnten diese „Informationen“ in Form der gezeichneten Skizze gar nicht notwendig sein, um die Aufgabe zu lösen. Wenn es sich beispielsweise um besonders leistungsstarke Lernende handelt oder um Texte mit geringem Anspruchsniveau, wäre denkbar, dass die Bildung des mentalen Modells gelingt, ohne dass die unterstützenden Funktionen des Skizzenzeichnens benötigt werden. Für die Koordination der zwei verschiedenen Darstellungen, also der Textbasis und der Skizze, werden wiederum kognitive Ressourcen benötigt, die dann nicht zum Lernen zur Verfügung stehen (Sweller, 2005b, S. 160). Wenn die selbst erstellte Skizze keinerlei Mehrwert erbringt, würde das Zeichnen der Skizze durch die überflüssige Dopplung von Informationen demnach nur zu einer zusätzlichen extrinsischen Belastung führen.

Aufgrund der begrenzten Arbeitsgedächtniskapazität führen die beschriebenen Effekte dazu, dass die verfügbaren kognitiven Ressourcen zur Integration von Informationen und zum Aufbau des mentalen Modells reduziert würden (Schwamborn et al., 2010, S. 873). Demnach erbringt das Skizzenzeichnen nur dann einen lernförderlichen Effekt, wenn die unterstützenden Funktionen, wie Schemaaktivierung und -bildung, kognitive Entlastung durch Externalisierung usw., die kognitive Belastung durch die zusätzliche, parallele Aktivität des Skizzenzeichnens überwiegen.

3.3 Empirische Erkenntnisse zur Wirkung des Skizzenzeichnens

Die empirischen Erkenntnisse zur Wirkung des Skizzenzeichnens sind diffus und es ist bisher kaum gelungen, ein umfassendes empirisch fundiertes Bild über die Prozesse und Einflussfaktoren beim Skizzenzeichnen zu konstruieren (Quillin & Thomas, 2015, S. 2; Van Meter & Garner, 2005). Insbesondere fehlt es an quantitativen Studien zur Validierung, die sicherstellen, dass die Ergebnisse generalisierbar sind und nicht nur für bestimmte Lernende oder für ausgewählte Themen und Aufgabentypen gelten. Vermutlich ist die fehlende Validierung auch ein Grund dafür, weshalb Forschungserkenntnisse in der Praxisliteratur häufig nicht berücksichtigt werden (Van Meter & Garner, 2005, S. 286). Zudem sind die empirischen Befunde häufig ambivalent, da einerseits positive Effekte des Skizzenzeichnens nachgewiesen werden, andererseits Studien von ausbleibenden oder sogar hinderlichen Effekten berichten. Speziell zum Einsatz von selbst erstellten Skizzen beim mathematischen Modellieren existieren bisher kaum empirische Untersuchungen. Deshalb werden häufig Ergebnisse aus anderen Forschungsbereichen wie der Lese-, Kognitions- oder Problemlöseforschung herangezogen, bei denen ein vergleichbarer Strategieeinsatz untersucht wird.

Ein Bereich, in dem die Wirkung selbst erstellter Zeichnungen bereits intensiv untersucht und der positive Effekt vielfach nachgewiesen werden konnte, ist die Forschung zum Lesen wissenschaftlicher Texte. So schnitten Teilnehmende in einer Untersuchung zur Arbeit mit wissenschaftlichen Texten unter anderem bei einem Transfer- und einem Gedächtnistest besser ab, wenn sie aufgefordert wurden, eine Zeichnung zu erstellen, als wenn diese Aufforderung ausblieb (Schwamborn et al., 2010). In ähnlicher Weise zeigte Schmeck (2010) im Rahmen zweier Studien, dass Lernende, die Zeichnungen zu einem Sachtext erstellen, anderen Lernenden in einem Gedächtnis-, Verstehens- und Transfertest überlegen sind, die nur mit einem Text bzw. einem Text mit vorgegebenen Bildern arbeiteten und gezielt nicht zeichnen durften. Auch im Rahmen der Erwachsenenbildung konnte nachgewiesen werden, dass Hochschul- und Berufsschülerinnen und -schüler, die einen wirtschaftsbezogenen Text bearbeiteten, den inhaltsübergreifenden Transfer besser bewältigen konnten, wenn sie aufgefordert wurden, einen linearen Funktionsgraphen zu erstellen, als wenn sie passiv mit einem vorgegebenen Graphen konfrontiert wurden (Stern et al., 2003). Eine Studie von Leopold und Leutner (2015) ergab, dass Teilnehmende, die eine Visualisierungsstrategie anwendeten, nicht nur gegenüber der Kontrollgruppe, sondern auch im Vergleich zu Teilnehmenden besser abschnitten, die die Rezeptionsstrategie der Textmarkierung nutzten. Allerdings handelte es sich hierbei um das Visualisieren in Form mentaler Vorstellungsbilder und nicht um das Erstellen externer Zeichnungen. Im Rahmen eines Promotionsprojektes, das drei Studien zum Lesen wissenschaftlicher Texte umfasst, analysierte Hellenbrand (2018) die Rezeptions- und Integrationsprozesse von Lernenden, die sinnstiftende Zeichnungen erstellten, mithilfe von Eye-Tracking-Analysen. Er fand heraus, dass es den Lernenden besser gelingt, ihre Aufmerksamkeit verstärkt auf zentrale Textstellen sowie Verknüpfungspunkte zwischen Text und Zeichnung zu richten, im Vergleich zu Lernenden, die mit vorgegebenen Abbildungen arbeiteten oder andere generative Lernstrategien nutzten (Zusammenfassen). Daraus leitet der Forscher die Schlussfolgerung ab, dass sinnstiftendes Zeichnen den Aufbau komplexerer mentaler Modelle fördert.

Das Forschungsgebiet des mathematischen Problemlösens und die Textaufgabenforschung sind ebenfalls Bereiche, in denen das Erstellen von Skizzen und dessen Wirkungsweise bereits umfassender untersucht wurden. Eine 487 Studien umfassende Meta-Analyse von Hembree (1992) ergab, dass die Instruktion zum Zeichnen von Diagrammen im Vergleich zur Instruktion anderer Strategien (z. B. Verbalisieren von Konzepten oder Raten und Testen) einen besonders großen leistungssteigernden Effekt beim mathematischen Problemlösen hat (Glass's $\Delta = 1.16$). Gegenstand einer Studie von Uesaka et al. (2007) waren Faktoren, die die Verwendung selbst konstruierter Diagramme beim mathematischen Problemlösen begünstigen, wofür alltägliche Unterrichtsaktivitäten 291 japanischer und 323 neuseeländischer Schülerinnen und Schüler gegenüber gestellt wurden. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigten, dass die neuseeländischen Lernenden häufiger Diagramme verwendeten und gleichzeitig bessere Ergebnisse beim Problemlösen erzielten als die Lernenden in Japan. Die Autoren deuteten dies als Beleg dafür, dass die Verwendung von Diagrammen beim Lösen von Wortproblemen vorteilhaft ist, auch wenn sie keine erfolgreichen Lösungsprozesse garantieren. Eine weitere Studie der Autoren mit 42 Junior High School-Schülerinnen und Schülern zu den Effekten der Peer-Kommunikation bei der Verwendung von Diagrammen zur Lösung mathematischer Textaufgaben ergab, dass die Versuchsteilnehmenden mehr Diagramme zeichneten, diese mehr relevante Details enthielten und gleichzeitig die Aufgaben erfolgreicher gelöst wurden (Uesaka & Manalo, 2011b). Die Rolle verschiedener Arten vorgegebener Darstellungen sollte eigentlich in der Studie von Elia & Philippou (2004) anhand von Lernenden der sechsten Klasse in Zypern untersucht werden. Allerdings traten in der Studie auch Fälle auf, in denen die Lernenden selbst Zeichnungen erstellten. Die qualitative Analyse der Lösungsprozesse ergab, dass der Visualisierungsprozess sinnvoll war und das Problemlösen erheblich erleichterte (Elia & Philippou, 2004, S. 333). Bei einer Gegenüberstellung der Problemlöseprozesse von Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten, leistungsschwachen sowie durchschnittlichen Lernenden zeigte Krawec (2014), dass ein erheblicher Anteil der Problemlösegenauigkeit durch das Zeichnen von Darstellungen erklärt werden konnte. Bei den Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten korrelierte die Erstellung von Zeichnungen sogar stärker mit dem Problemlöseerfolg als bei Lernenden mit durchschnittlicher Leistung. Auch wenn Lernende also Lernschwierigkeiten haben, sind sie in der Lage, durch ein Zeichentraining zunehmend reichhaltigere Zeichnungen anzufertigen (siehe auch Amir, 2022), die den Lösungsprozess unterstützen können. Ein Programm mit Drittklässlern, bei dem im Rahmen von 20 Lektionen zu 73 Textaufgaben selbständig Zeichnungen angefertigt wurden sowie in Gruppenarbeit und lehrergeleiteten Diskussionen die Dispositionen in Bezug auf das Zeichnen geprägt wurden, führte zu dem Ergebnis, dass es zum Ende des Programms keinen Leistungsunterschied mehr beim Lösen von Textaufgaben gab, während die Experimentalgruppe bei einem Pretest noch einen signifikanten Leistungsnachteil gehabt hatte (Csíkos et al., 2012). Durch das Erstellen der Zeichnungen und durch die Kommunikation darüber konnte die Experimentalgruppe diesen Leistungsnachteil beim Posttest vollständig aufholen. Fuson und Willis (1989; 1988) führten ein Training mit Zweitklässlern durch, bei dem diese darin unterrichtet wurden, schematische Skizzen zu unterschiedlichen Kategorien von Additions- und Subtraktions-Textaufgaben zu erstellen. Dabei konnte ein starker Zusammenhang zwischen korrekt angefertigten Zeichnungen und der korrekten Auswahl der jeweiligen Lösungsstrategie nachgewiesen werden. Kein Training, sondern eine kurze Intervention führten Fagnant und Vlassis (2013) mit Viertklässlerinnen und Viertklässlern durch, bei der den Teilnehmenden problemhaltige Textaufgaben mit vorgefertigten Diagrammen ausgehändigt wurden, ohne dass sie Hinweise oder Instruktionen zu deren Verwendungen erhielten. Sowohl die Anzahl selbst erstellter Darstellungen als auch die Lösungsraten waren beim Posttest signifikant höher als im Pretest, wobei es keine Kontrollgruppe gab, die hätte sicherstellen können, dass die Effekte auf die Intervention zurückzuführen sind.

Zur Wirkung des Skizzenzeichnens speziell beim mathematischen Modellieren gibt es bisher nur wenige empirische Befunde. Eine Studie mit 132 Schülerinnen und Schülern des neunten und zehnten Jahrgangs ergab, dass die Aufforderung zum Zeichnen einer mathematischen Skizze einen positiven Gesamteffekt auf die Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* hatte, wobei der Effekt über die Verwendung der Zeichnungen vermittelt wurde (Rellensmann et al., 2017). In dieser Studie wurde auch der in anderen Forschungsbereichen vielfach berichtete Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Leistung speziell für den Bereich des Modellierens nachgewiesen (Rellensmann et al., 2017). In der Modellierungsforschung wurde die Strategie des Skizzenzeichnens darüber hinaus im Zusammenhang von entwickelten Lernumgebungen und Lösungsplänen bereits mehrfach empirisch untersucht (Schukajlow, Kolter, & Blum, 2015). Ein zweitägiges Experiment mit der Implementation eines Lösungsplans, der unter anderem das Zeichnen einer Skizze enthielt, bewirkte einen signifikanten Leistungsvorteil beim mathematischen Modellieren in der Experimentalgruppe gegenüber einer Kontrollgruppe, die nicht mit dem Lösungsplan arbeitete – allerdings nur beim Thema *Satz des Pythagoras* und nicht beim Thema *Lineare Funktionen* (Schukajlow et al., 2015). Aufgrund der Vielzahl integrierter Strategien konnten keine eindeutigen Schlussfolgerungen gezogen werden, auf welche Strategie die (ausbleibenden) Verbesserungen der Leistungen zurückzuführen sind. Die Autorinnen und der Autor vermuteten dennoch, dass insbesondere die Aufforderung zum Zeichnen einer Skizze beim Thema *Satz des Pythagoras* unterstützend wirkte, da genau diese Strategie beim Thema *Lineare Funktionen* nicht in gleicher Weise genutzt werden könne (Schukajlow et al., 2015, S. 1252). Die Studie von Bräuer, Leiss und Schukajlow (2021) bestärkt das Ergebnis, indem gezeigt wurde, dass die Skizzenqualität beim Thema *Satz des Pythagoras* ein starker Prädiktor ist, während diese beim Thema *Lineare Funktionen* nur eine geringfügige Vorhersagekraft liefert.

Während die berichteten empirischen Befunde aus den Bereichen der Lese-, Strategie-, Problemlöse-, Textaufgaben- und auch der Modellierungsforschung auf eine tendenziell leistungsunterstützende Wirkung des Skizzenzeichnens hindeuten, gibt es in allen genannten Forschungsbereichen ebenso Studien, die von ausbleibenden oder sogar negativen Effekten des Zeichnens einer Skizze berichten. So ergab eine Studie zum Lesen wissenschaftlicher Texte mit Studenten der Natur- und Ingenieurswissenschaften einer japanischen Universität, dass kein signifikanter Zusammenhang zwischen der Verwendung von Diagrammen und den Ergebnissen eines anschließenden Tests vorlagen (Manalo, Uesaka, Pérez-Kriz, Kato, & Fukaya, 2013).

Die oben erwähnte Meta-Analyse von Hembree (1992), die einerseits den Vorteil von Trainings zum Erstellen von Zeichnungen beim Problemlösen herausgestellt hat, ergab andererseits, dass die Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der ausbleibenden Aufforderung keinen Effekt auf die Problemlöseleistung hat. Dieses Ergebnis geht mit dem Ergebnis aus einer Studie zur Textaufgaben-Forschung einher, bei der die Aufforderung, Zeichnungen zu arithmetischen Textaufgaben zu erstellen, keinen Einfluss auf die Leistung bei Lernenden der ersten und zweiten Klasse hatte (Van Essen & Hamaker, 1990). Eine Studie zum

Zeichnen grafischer Darstellung bei der Bearbeitung von Textaufgaben in der dritten Jahrgangsstufe von Ott (2018) beinhaltete eine Intervention, die dazu führte, dass Lernende häufiger passende Darstellungen zur mathematischen Struktur der Textaufgaben anfertigten. Dennoch bewirkte dies keine signifikante Veränderung der Lösungsrate, so dass nicht davon ausgegangen werden kann, dass verbesserte Darstellungen eine Leistungssteigerung mit sich bringen. In ähnlicher Weise zeigten Dewolf et al. (2017), dass das realistische Lösen von Textaufgaben durch den Einsatz von Darstellungen nicht verbessert werden konnte – wobei es sich hier nur um zeichnerische Ergänzungen vorgegebener Darstellungen handelte. Räumliche Fähigkeiten sowie deren Beziehung zur Leistung beim Lösen arithmetischer Problemlöseaufgaben wurden in einer Studie von R. D. L. Booth und Thomas (1999) untersucht. Unter anderem kamen die Wissenschaftler zu dem Ergebnis, dass die Versuchsgruppe mit durchschnittlichen räumlichen Fähigkeiten nur dann bessere Leistungen als die Gruppe mit geringen räumlichen Fähigkeiten zeigte, wenn *kein* Bild oder Diagramm gezeichnet wurde. Wenn ein Bild oder Diagramm gezeichnet wurde, war unabhängig von den räumlichen Fähigkeiten die Wahrscheinlichkeit einer falschen Antwort größer. Die Publizierenden vermuteten, dass dies auf eine mangelhafte Nutzung der Zeichnungen zurückzuführen ist, da diese zwar zum Organisieren der Informationen, aber anschließend nicht mehr aktiv für den Lösungsprozess genutzt wurden (R. D. L. Booth & Thomas, 1999, S. 178 f.). In der Sekundarstufe wurde im mathematischen Themenbereich der Geometrie eine Studie von De Bock et al. (2003) zum Einfluss selbst erstellter grafischer Darstellungen bei der Bearbeitung von Textaufgaben durchgeführt. Dabei wurden 13/14- sowie 15/16-jährige Schülerinnen und Schüler aufgefordert, Zeichnungen zu Textaufgaben anzufertigen und die Aufgaben zu lösen. In den Aufgaben ging es um den nicht-proportionalen Zusammenhang zwischen Fläche und Volumen. Die Studie führte nicht zum erwarteten Ergebnis, vielmehr hatte die Zeichenaufforderung sogar einen negativen Effekt auf die Leistung. Dieser Befund wurde von einer weiteren Studie zur Wirkung des Zeichnens beim Lösen nicht-linearer Geometrieaufgaben bestätigt (Krawitz & Schukajlow, 2020). Auch hier hatte das Zeichnen einen negativen Einfluss auf die Leistung und auch die Verbesserung der Zeichenqualität führte nicht zu einem stärkeren Bewusstsein für fehlerhafte Vorstellungen. Eine mögliche Erklärung liegt gemäß De Bock et al. (2003, S. 459) in der Besonderheit des Themas, da die Zeichnungen unter Nutzung linearer Aspekte anfertigt werden würden (z. B. Seitenlänge), die Lösung der Aufgabe aber gerade in der Nicht-Proportionalität läge.

Der Überblick über die empirischen Befunde verdeutlicht die Ambivalenz des Forschungsbereichs zur Wirkung selbst erstellter Skizzen. Es werden verschiedene Tests zur Leistungsüberprüfung verwendet, verschiedene Altersgruppen von der Grundschule bis zur Erwachsenenbildung fokussiert, unterschiedliche Kontrollbedingungen gewählt und das Ausmaß der Zeichenanleitung sowie die Arten der Zeichnungen unterscheiden sich. Ein Grund für die ambivalenten empirischen Ergebnisse sind daher vermutlich die verschiedenen Einflussfaktoren, die im Rahmen der Studien variiert wurden. Der Forschungsstand ist noch nicht weit genug fortgeschritten, um eindeutige Aussagen über die Bedingungsfaktoren der Wirkung des

Skizzenzeichnens machen zu können. Die Vielfalt der empirischen Resultate wirft auch die Frage nach der Allgemeingültigkeit und Übertragbarkeit der bisherigen Erkenntnisse auf. Zentrales Anliegen der Forschungsarbeit ist es deshalb, die bestehenden Erkenntnisse systematisch zu erweitern und den Einfluss der verschiedenen Faktoren zu prüfen, um Schlussfolgerungen über den Nutzen und die Grenzen der Wirkung des Skizzenzeichnens für reale Lernsituationen und die schulische Praxis ziehen zu können.

3.4 Einflussfaktoren beim Zeichnen von Skizzen

Im Wesentlichen können drei Arten von Einflussfaktoren unterschieden werden, die sich in der bisherigen Forschung zum Skizzenzeichnen als relevant erwiesen haben: aufgabenbezogene, darstellungsbezogene und personenbezogene Faktoren. Zu den aufgabenbezogenen Faktoren können beispielsweise die Art der Skizzenaufforderung, der mathematische Kontext der Aufgabe oder das Anforderungsniveau gezählt werden. Die Skizzenqualität, der Abstraktionsgrad der Skizzen sowie die explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze sind darstellungsbezogene Faktoren, die eine besonders einflussreiche Rolle bei der Wirkung der Skizze auf den Lösungsprozess zu spielen scheinen. Weiterhin haben sich personenbezogene Faktoren als relevant erwiesen, beispielsweise die mathematische Leistung, die Präferenz in Bezug auf das Skizzenzeichnen sowie geschlechterspezifische Differenzen.

In der vorliegenden Studie werden die bestehenden Erkenntnisse über einige der Einflussfaktoren zur Konzeption der Studie genutzt, andere Einflussfaktoren werden in der Studie gezielt untersucht, um zur Validierung und systematischen Erweiterung der bisherigen Forschungserkenntnisse beizutragen.

3.4.1 Skizzenaufforderung

Die Studien zur Untersuchung des Skizzenzeichnens unterscheiden sich häufig darin, ob die Lernenden zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden, inwieweit Hilfestellungen zum Zeichnen der Skizze angeboten oder vorgefertigte Darstellungen zur Verfügung gestellt werden. Entsprechend lassen sich die Ergebnisse der Studien nicht unmittelbar vergleichen. Die Hilfestellung beim Skizzenzeichnen kann als Kontinuum betrachtet werden, wobei das eine Extrem das spontane Skizzenzeichnen ohne jegliche Aufforderung oder Unterstützung darstellt. Das andere Extrem stellen Studien dar, in denen Skizzen(-teile) vorgegeben werden, die von den Teilnehmenden z. B. nur noch zusammengefügt oder mit eigenen Zeichnungen verglichen werden müssen (Schwamborn et al., 2010; z. B. Van Meter, 2001; Van Meter et al., 2006).

Die Schwierigkeit bei der empirischen Untersuchung des spontanen Skizzenzeichnens ohne Aufforderung besteht darin, dass ein hohes Risiko dafür besteht, dass viele Teilnehmende gar keine Skizze erstellen (z. B. Rellensmann et al., 2022; Uesaka et al., 2007) und sich bestimmte Faktoren nur schwer untersuchen lassen: So ist unwahrscheinlich, dass Lernende mit geringer Skizzenzeichenpräferenz eine Skizze erstellen, wodurch die Untersuchung der Wirkung der Strategie unter solchen spezifischen Bedingung erschwert wird.

Eine Studie von Uesaka, Manalo und Ichikawa (2010) ergab, dass verbale Ermutigungen zum Zeichnen von Diagrammen deren Verwendung bereits deutlich erhöhen können. Die bloße Demonstration durch Lehrkräfte im Unterricht reiche dagegen nicht aus. Vielmehr müssten Lernende gezielt dazu aufgefordert werden, Skizzen zu erstellen, damit dies auch erfolgreich umgesetzt wird. Die Autoren validierten dieses Ergebnis in einer weiteren Studie, in der sich zeigte, dass allein der Hinweis auf die Verwendung von Skizzen einen deutlichen Zuwachs bewirkte, während eine Unterweisung durch eine Lehrkraft keinen weiteren Zugewinn ergab (Manalo & Uesaka, 2016). Zudem deuten die Ergebnisse bisheriger Studien zur Förderung des Verständnisses bei wissenschaftlichen Texten darauf hin, das vor allem im Vergleich zum bloßen Lesen oder textorientierten Strategien die Zeichenaufforderung durchweg effektiver zum Verständnis und Transfer von Informationen beiträgt, auch wenn die Lernenden nur eine minimale Zeichenanweisung erhalten (z. B. Fiorella & Zhang, 2018). Rellensmann et al. (2022, S. 414) konnten in ihrer Studie nachweisen, dass allein die Aufforderung zum Zeichnen einer mathematischen Skizze die durchschnittliche Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* verbesserte.

Das andere Extrem, das bloße Zusammenstellen von vorgegebenen Skizzenteilen, hat einerseits den Vorteil, dass der kognitive Aufwand reduziert wird und somit ein besseres Verhältnis zwischen Kosten und Nutzen des Skizzenzeichnens hergestellt wird (z. B. Fiorella & Zhang, 2018; Schwamborn et al., 2010). Andererseits hat diese Implementation den Nachteil, dass das Potenzial der kognitiven Prozesse beim Skizzenzeichnen möglicherweise nicht ausgeschöpft wird. Das Skizzenzeichnen scheint dann besonders wirksam zu sein, wenn es den eigenständigen Aufbau des mentalen Modells durch den aktiven Konstruktionsprozess unterstützt (vgl. Kapitel 3.2.2). Wenn aber schon große Teil der Skizze vorgegeben sind, ist eine aktive eigenständige Konstruktion nur noch eingeschränkt möglich.

Die vorliegenden empirischen Forschungsbefunde legen nahe, dass sich die Aufforderung „Zeichne eine Skizze“ gut eignet, um das Skizzenzeichnen zu Modellierungsaufgaben zu initiieren. Bei der Promotionsstudie von Rellensmann (2019, S. 256) zeigte sich zudem, dass Schülerinnen und Schüler die Skizze als unterstützende Darstellung im gesamten Modellierungsprozess nutzen, selbst wenn die Aufgabenstellung unterteilt wird in *a) Zeichne eine Skizze* und *b) Löse die Aufgabe*. Schmeck (2010, S. 98) fand heraus, dass zusätzliche Aktivitäten wie beispielsweise das Markieren wichtiger Informationen oder die Aufforderung zum Vorstellen keinen zusätzlichen Nutzen beim Skizzenzeichnen bieten, da das Zeichnen der Skizze allein bereits die hilfreichen kognitiven Verarbeitungsprozesse initiierte.

3.4.2 Anforderungsniveau

Ein weiterer kontextbezogener Faktor, der für die Wirkung des Skizzenzeichnens als Lösungsstrategie auschlaggebend zu sein scheint, ist das Anforderungsniveau der zu lösenden Problemsituation. Zahlreiche Studien deuten darauf hin, dass die förderliche Wirkung des Skizzenzeichnens als Lösungsstrategie vor allem bei komplexeren Aufgaben zum Tragen kommt, bei denen die Verknüpfung von Informationen und tiefere Verständnisprozesse notwendig sind; weniger dagegen bei einfachen Anforderungssituationen, die lediglich ein Wiedererkennen bestimmter Strukturen oder die Entnahme einzelner Informationen erfordern (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 501; Mayer & Gallini, 1990, S. 725; Schmidgall et al., 2019, S. 139; Van Meter, 2001, S. 129). Eine qualitative Eye-Tracking-Studie von Peng et al. (2017) unterstützt diese Annahme, indem nachgewiesen wurde, dass Visualisierungen bei komplexeren Aufgaben zum Umgang mit Daten wirksam waren, wenn eine Verknüpfung von Informationen und das Ziehen von Schlussfolgerungen notwendig waren. Bei einfachen Aufgaben zur Entnahme einzelner Daten zeigte sich keine Wirkung der Visualisierungen.

Auch in der mathematikdidaktischen Forschung kamen verschiedene experimentelle Studien zu der Annahme, dass das Skizzenzeichnen dann wirksam ist, wenn anspruchsvollere Aufgaben wie z. B. mathematische Textaufgaben gelöst werden müssen, während die Strategie bei Reproduktionsaufgaben oder einfachen Rechenaufgaben keinen bzw. nur einen sehr geringen Nutzen erzielte (Csíkos et al., 2012; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter et al., 2006; Van Meter & Garner, 2005).

Die besondere Wirksamkeit des Skizzenzeichnens als Strategie bei anspruchsvollen Aufgaben lässt sich laut Van Meter und Garner (2005, S. 308 f.) möglicherweise durch den Prozess der Integration im Rahmen der generativen Theorie der Zeichenkonstruktion erklären: Für die Bearbeitung von Tests zum Wissen niedriger Ordnung ist lediglich das Wiedererkennen oberflächlicher Strukturen erforderlich. Wie in Kapitel 3.2.2 erläutert, wird das besondere Potenzial des Skizzenzeichnens aber vor allem in der Integration verbaler und bildlicher Elemente gesehen, wodurch ein mentales Modell aufgebaut wird. Da dieser Prozess für die Wiedererkennung oberflächlicher Strukturen nicht notwendig ist, liegt nahe, dass das Skizzenzeichnen bei Reproduktionstests nicht zum Tragen kommt (Van Meter & Garner, 2005, S. 320). Dagegen ist beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben die Anwendung von Wissen und ein tieferes Verständnis notwendig. Grundlage dafür ist die mentale Modellbildung durch den Integrationsprozess (vgl. Kapitel 3.2.2), weshalb das Skizzenzeichnen durch die dafür notwendige Integration bzw. Transformation verbaler Informationen in eine bildliche Darstellung hier besonders zum Tragen kommen kann. Diese Annahmen gehen einher mit dem Verständnis des Skizzenzeichnens als generative und modellorientierte Lösungs- und Verstehensstrategie (Leopold & Leutner, 2015, S. 332).

Gleichzeitig weisen Van Meter und Garner (2005, S. 312) darauf hin, dass es Ausnahmen gibt. So hat eine jüngere Meta-Analyse ergeben, dass der positive Effekt des Zeichnens vor allem beim Lernen von Fakten, weniger beim Ziehen von Schlussfolgerungen und noch weniger für das Transferlernen auftritt, wenngleich in allen Bereichen ein positiver Effekt auftrat (Cromley, Du, & Dane, 2020). Teilweise konnten mangelnde Effekte der Skizzennutzung bei herausfordernden Tests auf spezielle Bedingungen zurückgeführt werden. So ergab eine Untersuchung von V. C. Hall et al. (1997), dass das Zeichnen keine positive Wirkung auf die erfolgreiche Lösung hatte, obwohl es sich um einen herausfordernden Test handelte. Die Autorinnen und Autoren führen das Ergebnis darauf zurück, dass den Lernenden bei dieser Untersuchung genau vorgegeben wurde, welche Elemente zu zeichnen waren, und somit die eigenständige Konstruktion stark eingeschränkt wurde (siehe auch Van Meter & Garner, 2005, S. 312 f.).

Uesaka & Manalo (2011a) untersuchten aufgabenbezogene Faktoren im Hinblick auf die Skizzenhäufigkeit, um herauszufinden, welche besonderen Eigenschaften der Problemsituationen für Unterschiede in der Skizzennutzung verantwortlich sein könnten. Dabei wurden zwei Erklärungsansätze untersucht: (1) Der Einbezug von Längen in den Problemkontext und (2) der kognitive Aufwand der Umwandlung der in der Aufgabe beschriebenen Situation in die Skizze. Zwei Experimente wurden mit japanischen und neuseeländischen Schülerinnen und Schülern dazu durchgeführt, in denen Textaufgaben mit verschiedenen Kontexten und Strukturen bearbeitet wurden. Die Ergebnisse beider Experimente deuten darauf hin, dass der zweite Erklärungsansatz geeigneter ist: Je höher der kognitive Aufwand beim Umwandeln der Situationsbeschreibung in die Skizze ist, desto geringer ist die spontane Skizzennutzung (Uesaka & Manalo, 2011a, S. 57). Allerdings lässt das Ergebnis keine Annahmen darüber zu, inwiefern der kognitive Umwandlungsaufwand auch die Wirkung der Skizze im Lösungsprozess beeinflusst. Ergänzend zu dem Erklärungsansatz von Uesaka und Manalo kamen Van Essen und Hamaker in ihrer Untersuchung zu der Annahme, dass Skizzen besonders dann hilfreich sind, wenn es um das Verstehen bestimmter Details des Situationskontextes geht, während das Zeichnen einer Skizze bei grundsätzlichen Schwierigkeiten mit einer Aufgabe wenig hilfreich ist (Van Essen & Hamaker, 1990, S. 310).

3.4.3 Skizzenqualität

Der wohl mit Abstand einflussreichste Faktor bei der Wirkung des Skizzenzeichnens im Modellierungsprozess ist die Qualität der Skizze. In allen Studien, in denen die Skizzenqualität erhoben wurde, hat sich stets gezeigt, dass die Qualität der Skizzen mit der Testleistung zusammenhängt (Bräuer et al., 2021; Rellensmann et al., 2022; Schnotz & Bannert, 2003; Schwamborn et al., 2010; Stern et al., 2003; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter, 2001). Daraus kausale Schlussfolgerungen über die Wirkungsweisen zu ziehen, ist jedoch ein weiterer Schritt. Häufig wird aufgrund des Zusammenhangs darauf geschlossen, dass die Qualität der Skizze den Lernerfolg bestimmt. Dieses Phänomen wird auch als *prognostischer Zeicheneffekt* bezeichnet (Schmidgall et al., 2019; Schwamborn et al., 2010, S. 872) und wird häufig angenommen, sobald der Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Leistung nachgewiesen wird. Allerdings bleibt diese Interpretation kritisch zu betrachten, da es ebenso plausibel wäre, dass die Leistung der Lernenden die Qualität der Skizze bestimmt. Dann wäre die qualitativ hochwertige Skizze als Produkt der hohen Leistung anzusehen, anstatt dass das Zeichnen einer qualitativ hochwertigen Skizze als Strategie zu einer höheren Leistung führt.

Sowohl in der Textverstehens- (Schnotz & Bannert, 2003; Schwamborn et al., 2010; Stern et al., 2003; Van Meter, 2001), als auch der mathematischen Textaufgabenforschung (Van Essen & Hamaker, 1990) und speziell auch in der Modellierungsforschung (Bräuer et al., 2021; Rellensmann et al., 2022) wurde der Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Leistung vielfach belegt. So zahlreich die Belege sind, so unterschiedlich sind jedoch auch die Definitionen einer qualitativ hochwertigen Skizze.

Eine häufig zitierte und verwendete Definition ist die von Van Meter und Garner, in der Skizzenqualität beschrieben wird als „the degree to which completed drawings resemble the represented object(s)“ (Van Meter & Garner, 2005, S. 299). Kritisch anzumerken ist dabei, dass sich eine hochwertige Skizze gerade auch durch die Reduktion der Informationen auf die lösungsrelevanten Elemente auszeichnet, um Übersichtlichkeit und Fokussierung zu ermöglichen. Der Begriff „resemble“ (ähneln) oder auch der häufig verwendete Begriff „Genauigkeit“ suggeriert eine exakte Darstellung sämtlicher Details, die bei hochwertigen Skizzen jedoch nicht im Vordergrund steht. Entscheidend für die Skizzenqualität ist vielmehr, dass die für die Lösung der Problemstellung relevanten Objekte ausgewählt und in korrekten Relationen zueinander dargestellt werden, sodass Denk- und Lösungsprozesse unterstützt werden (Larkin & Simon, 1987, S. 91 f.; Leopold & Leutner, 2015, S. 314 f.). Daher wird in der vorliegenden Arbeit auch auf den – in anderen Studien häufig verwendeten – Begriff der *Genauigkeit der Skizzen* verzichtet und stattdessen der Begriff *Skizzenqualität* bevorzugt.

In den bisherigen Studien wurden unterschiedliche Kategoriensysteme zur Einstufung der Skizzenqualität verwendet. Van Meter (2001) bildete vier Kategorien, in die die gezeichneten Skizzen eingeordnet wurden. Dabei wurden die Skizzen anhand des Umfangs und der Ausgereiftheit des in der Zeichnung dargestellten strukturellen und systemischen Wissens klassifiziert, wobei dies darüber operationalisiert wurde, inwiefern die Strukturen und die Verknüpfungen zwischen diesen in der Skizze enthalten waren. Van Essen und Hamaker (1990) unterschieden die Skizzenqualität anhand einer zweistufigen Skala abhängig davon, ob die Zeichnung die Struktur des Problems adäquat darstellte oder nicht. In ähnlicher Weise wurden die Skizzen bei der Studie zum Zeichnen von Skizzen bei geometrischen Modellierungsaufgaben von Rellensmann et al. (2022, S. 412) entweder als genau oder als ungenau eingestuft, je nachdem ob die Objekte und Beziehungen des Problems in der Zeichnung adäquat dargestellt wurden.

Folgende Kriterien für eine qualitativ hochwertige Skizze haben sich in den bisherigen Kategoriensystemen als einflussreich für den Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Leistung erwiesen (Lopez Real & Veloo, 1993; Ott, 2016; Rellensmann et al., 2022; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter, 2001):

(1) die vollständige und korrekte Darstellung der lösungsrelevanten Objekte in der Skizze

(2) die vollständige und korrekte räumliche Verknüpfung zwischen den Objekten (Darstellung der lösungsrelevanten Relationen) sowie

(3) die vollständige und korrekte Beschriftung mit den lösungsrelevanten numerischen Informationen (Zahlenwerten) der Aufgabenstellung.

Darüber hinaus wurden weitere Kriterien, wie z. B. die Kennzeichnung der gesuchten Information in der Skizze in Erwägung gezogen, haben sich jedoch nicht als relevant für die prognostische Wirkung der Skizze erwiesen (Rellensmann, 2019, S. 268).

3.4.4 Explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze

Zusätzlich zu den als relevant nachgewiesenen Qualitätskriterien der Skizze hat ein weiteres Kriterium in einigen Studien Erwähnung gefunden: die explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze. Auch wenn in zwei verschiedenen Skizzen alle Objekte und Relationen dargestellt sind, können sich die Skizzen zusätzlich darin unterscheiden, wie explizit die mathematische Struktur dargestellt wird, die der Problemstellung inhärent ist.

In der Untersuchung von Rellensmann et al. (2022, S. 413 f.) wurde deutlich, dass das Zeichnen von qualitativ hochwertigen Skizzen nach den üblichen Qualitätskriterien in manchen Fällen nicht ausreicht, um die gegebene Problemsituation mathematisieren zu können. Die Lernenden hatten in diesen Fällen Schwierigkeiten, die mathematischen Beziehungen in der Aufgabe zu erkennen. Ott (2016, S. 155) unterscheidet in dieser Hinsicht zwischen implizit diagrammatischen Darstellungen und explizit diagrammatischen Darstellungen. In beiden Kategorien sind die lösungsrelevanten Objekte und Relationen in den Skizzen enthalten, jedoch variieren die Skizzen darin, inwiefern die mathematischen Aspekte und Verknüpfungen deutlich hervorgehoben werden. Ein positiver Zusammenhang zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und der Modellierungsleistung zeigte sich in einer Studie von Bräuer et al. (2021) zum Skizzenzeichnen bei Modellierungsaufgaben zu den Themen *Satz des Pythagoras* und *Lineare Funktionen*. Obwohl die Darstellung des mathematischen Modells bei einem Vergleich der Themen sehr unterschiedlich ausfiel, da es den Lernenden deutlich besser gelang, das mathematische Modell zum Thema *Satz des Pythagoras* in einer Skizze zu zeichnen als zum Thema *Lineare Funktionen*, lagen in beiden Fällen positive Korrelationen mit der Testleistung vor (Bräuer et al., 2021, S. 517). Ersten Erkenntnissen einer qualitativen Fallstudie zufolge, ist vor allem das zieloffene Entdecken von mathematischen Objekten und Beziehungen in der Skizze eine wirksame Nutzungsform, während das Zeichnen einer Skizze als fertiges mathematisches Objekt keinen Nutzen bringt (Rellensmann, 2019, S. 265 f.).

Diese ersten Hinweise auf die Relevanz und Wirkungsweise der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze sind jedoch noch kaum statistisch abgesichert und erfordern weitere empirische Belege und Validierungen.

3.4.5 Abstraktionsgrad

Besonders relevant und in der Bildungsforschung vielfach verwendet ist die Unterscheidung zwischen situativen und schematischen Skizzen (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Pantziara et al., 2009; z. B. Van Garderen & Montague, 2003). Situative Skizzen zeichnen sich durch eine realitätsnahe Darstellung und einen geringen Abstraktionsgrad aus, während bei schematischen Skizzen die Darstellung von Strukturen im Vordergrund steht und diese einen hohen Abstraktionsgrad aufweisen. Für diese Kategorien werden in der Forschungsliteratur unterschiedliche Bezeichnungen verwendet wie z. B. „Abbilder“ vs. „logische Bilder“, „realistische Bilder“ vs. „Diagramme“, „schematische“ vs. „bildliche Darstellungen“. In der vorliegenden Studie werden die Begriffe ***schematische Skizzen*** und ***Situations- bzw. situative Skizzen*** verwendet, da diese besonders hervorheben, dass im ersten Fall der strukturell-relationale Aspekt im Fokus steht, während im zweiten Fall anschauliche, situationsbezogene Aspekte im Vordergrund stehen.

Die Charakterisierung der zwei Kategorien lässt sich anhand drei verschiedener Aspekte vornehmen: dem *Objekt-, Variations- und Manipulationsaspekt*. Hinsichtlich des *Objektaspekts* zeichnen sich situative Skizzen dadurch aus, dass sie ein konkretes, durch die Sinne wahrnehmbares Objekt bzw. eine Situation mit deren physikalischen Eigenschaften räumlich ähnlich darstellen (Müller-Hill, 2015, S. 101; Oestermeier & Eitel, 2008, S. 5). Die Abbildung erfolgt nach der klaren geometrischen Gesetzmäßigkeit, dass benachbarte Punkte in der Realität auch als benachbarte Punkte in der Abbildung dargestellt werden (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 5). In schematischen Skizzen wird dagegen die innere relationale Struktur einzelner Komponenten abgebildet, sodass die Ähnlichkeit zwischen Bild und Objekt im Sinne von Analogie auf strukturell-relationalen Eigenschaften beruht (Müller-Hill, 2015, S. 102). Der *Variationsaspekt* bezieht sich darauf, dass situative Skizzen nur wenig Variation des Dargestellten zulassen, nämlich nur insofern, dass die Ähnlichkeit der oberflächlichen Eigenschaften erhalten bleiben muss (Müller-Hill, 2015, S. 102). Gewisse Zeichen- und Messungenauigkeiten sind möglich, aber die Variationen einer situativen Skizzen sollten nicht darüber hinausgehen (Müller-Hill, 2015, S. 102). Hingegen dürfen schematische Skizzen im Rahmen des logisch Möglichen variiert werden – unter der Voraussetzung, dass die strukturellen Relationen gewahrt werden (Müller-Hill, 2015, S. 102). Beim *Manipulationsaspekt* geht es darum, inwieweit Skizzen bearbeitet werden dürfen. Situative Skizzen können explorativ manipuliert werden, d. h. es dürfen beispielsweise Vermutungen über strukturell-relationale Eigenschaften durch experimentelle Veränderungen des Bildes überprüft werden (Müller-Hill, 2015, S. 103). Die Manipulation schematischer Skizzen erfolgt dagegen systematisch-regelgeleitet. Die Konstruktion schematischer Skizzen wird auf Grundlage regelhafter Darstellungsmittel durchgeführt und ebenso werden anschließende Bearbeitungen auf Grundlage logisch-konsistenter, darstellungsspezifischer Manipulationsregeln vollzogen (Müller-Hill, 2015, S. 103). Dennoch können auch diese regelhaften Manipulationen im Rahmen des logisch Möglichen gezielt genutzt werden, um mathematische strukturell-relationale Zusammenhänge visuell zu entdecken, die über die anfänglichen, analogiebildenden Eigenschaften hinausgehen (Müller-Hill, 2015, S. 103).

Auch aus kognitionspsychologischer Sicht erscheint die beschriebene Klassifikation sinnvoll, da bei Betrachtung der kognitiven Prozesse eine unterschiedliche Verarbeitung bzw. unterschiedliche Denkprozesse bei der Herstellung der unterschiedlichen Skizzenarten anzunehmen sind (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 4). Bei situativen Skizzen ist die Ähnlichkeit mit dem realen Gegenstand in der Regel offensichtlich, weshalb bei deren Rezeption oder Herstellung schnelle, automatisierte Wahrnehmungsprozesse ablaufen, die auch als ökologische Verstehensprozesse bezeichnet werden können (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 4). Hingegen sind bei schematischen Bildern in der Regel komplexere Verstehensprozesse (indikatorisches Verstehen) erforderlich, bei denen auf das Vorwissen zurückgegriffen und durch schrittweise Schlussfolgerungen der vollständige Sinn der Abbildung entschlüsselt wird (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 4). Allerdings können hier individuelle Unterschiede auftreten, da auch die Betrachtung schematischer Darstellungen bei umfangreichem Vorwissen automatisiert ablaufen kann, während auch Situationsdarstellungen z. B. durch Irritationen höhere Verstehensprozesse erforderlich machen können (Oestermeier & Eitel, 2008, S. 4).

Die Ausführungen legen nahe, dass nicht nur bei der Rezeption, sondern auch bei der Produktion, also dem selbständigen Zeichnen verschiedenartiger Skizzen unterschiedliche kognitive Prozesse auftreten. Davon ausgehend ist anzunehmen, dass das Zeichnen einer schematischen Skizze komplexere Produktionsprozesse erfordert, gleichzeitig aber auch tiefenstrukturelle Verstehensprozesse unterstützt, während das Zeichnen von Situationsskizzen möglicherweise schneller und automatisierter abläuft, gleichzeitig aber auch eher oberflächliches, ähnlichkeitsbasiertes Verstehen initiiert. Schematische Skizzen bringen den Vorteil mit sich, dass sie in gewisser Weise die Vorzüge depiktionaler und deskriptionaler Repräsentationen vereinen: Einerseits gewährleisten sie durch ihre Regelhaftigkeit die kognitive Nachvollziehbarkeit (symbolischer Aspekt), andererseits bieten sie einen gewissen Grad an Ausdruckskraft (ikonischer Aspekt) (R. Cox, 1999, S. 350). Deshalb scheint es in mathematischen Lösungs- oder Denkprozessen zielführend zu sein, eine Darstellung zu zeichnen, die so viel Ausdruckskraft besitzt wie nötig, deren Ausdruckskraft aber gleichzeitig ausreicht, um die Unbestimmtheit der Problemstellung zu beschreiben (R. Cox, 1999, S. 350).

Die Ergebnisse empirischer Forschungsarbeiten weisen darauf hin, dass die Effektivität des Skizzenzeichnens tatsächlich von der Art der Darstellung abhängt (Schnotz & Bannert, 2003, S. 141), wobei diese Abhängigkeit bisher nicht eindeutig geklärt werden konnte. Hinsichtlich der Häufigkeit ergaben bisherige Studien, dass die Lernenden (geringfügig) häufiger Situationsskizzen als schematische Skizzen zeichnen (Hegarty & Kozhevnikov, 1999, S. 687; Rellensmann et al., 2022, S. 410; Van Garderen & Montague, 2003, S. 250). Hingegen scheint für das Lösen mathematischer Problemstellungen vor allem das Zeichnen schematischer Skizzen hilfreich zu sein (R. Cox, 1999; Hasemann & Stern, 2002; Schnotz, 2014, S. 49). Mehrfach wurde ein positiver korrelativer Zusammenhang zwischen schematischen Bildern und der Problemlöseleistung festgestellt, während zwischen situativen Abbildungen und der Leistung kein oder sogar ein negativer Zusammenhang auftritt. So zeigte sich in einer Studie von Hegarty und Kozhevnikov (1999), dass die Verwendung schematischer Darstellungen durch Lernende der sechsten Klasse mit der erfolgreichen Bewältigung von Problemlöseprozessen einherging, wohingegen situative Darstellungen negativ mit dem Problemlöseerfolg korrelierten. Analog ergab eine Untersuchung von Van Garderen und Montague (2003) ebenfalls mit Lernenden der sechsten Klasse, dass erfolgreiches Problemlösen positiv mit der Verwendung schematischer Darstellungen korrelierte, während bei situativen Darstellungen ein negativer Zusammenhang bestand. Hasemann und Stern (2002) fanden heraus, dass ein abstrakt-symbolisches Trainingsprogramm mit Lernenden des zweiten Schuljahres beim Lösen von Textaufgaben wirksamer zur Unterstützung der Aufgabenlösung ist als ein alltagsnahes Training. Für die Lernenden sei es demnach hilfreicher, das Erkennen von Mustern und Strukturen zu fördern, als Konkretes und Offensichtliches in den Blick zu nehmen. Man müsse die Lernenden dabei unterstützen, sich vom Konkreten zu lösen und den Blick für das Abstrakte zu stärken, schlussfolgern die Autorinnen und Autoren. Rellensmann et al. (2022) führten eine Studie mit Schülerinnen und Schülern der neunten und zehnten Klasse zum Skizzenzeichnen beim mathematischen Modellieren durch und kamen zu dem Ergebnis, dass Anweisungen zum Zeichnen schematischer Skizzen die durchschnittliche Modellierungsleistung verbesserten, während Anweisungen zum Zeichnen situativer Skizzen keinen Effekt hatten. Einschränkend ist jedoch zu bedenken, dass bei Betrachtung dieser Zusammenhänge und Pfadanalysen die kausale Interpretation stets unter Vorbehalt erfolgen muss.

Eine Fallstudie von Rellensmann (2019, S. 258 f.) ergab hingegen, dass sowohl mathematische als auch situative Skizzen bei Modellierungsprozessen zum Thema *Satz des Pythagoras* wirksam waren. Bisher wurde häufig angenommen, dass situative Skizzen durch irrelevante Details von der mathematischen Struktur des Problems ablenken. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass das Zeichnen von Situationsskizzen den Lernenden hilft, die Aufgabe überhaupt zu verstehen und die lösungsrelevanten Informationen zu verarbeiten (Saundry & Nicol, 2006, S. 60). Aufgrund der Diskrepanz der bisherigen Forschungsergebnisse erfordert das Kriterium des *Abstraktionsgrades* weitere Untersuchungen, um spezifischere Erkenntnisse über die Wirksamkeit schematischer und situativer Skizzen zu erlangen.

3.4.6 Mathematisches Leistungsniveau

Neben aufgaben- und darstellungsbezogenen Faktoren können auch personenspezifische Aspekte eine Rolle bei der Wirkung des Skizzenzeichnens auf den Lösungserfolg spielen. Einer dieser personenbezogenen Faktoren, der sich bereits in verschiedenen Studien zur Strategieforschung beim Bearbeiten mathematischer Problemstellungen als relevant erwiesen hat, ist das Leistungsniveau der Lernenden. Bisher hat die Forschung dazu jedoch unterschiedliche und zum Teil auch kontroverse Ergebnisse erbracht.

So kam eine Studie aus der Textverstehensforschung von Mayer und Gallini (1990) zu dem Ergebnis, dass grafische Darstellungen für Schülerinnen und Schüler beim kreativen Problemlösen vor allem dann hilfreich sind, wenn die Lernenden ein geringes Vorwissen besitzen. Eine mögliche Begründung sehen die Autoren darin, dass Lernende mit geringem Vorwissen die grafischen Darstellungen als Unterstützung benötigen, um die Inhalte besser nachvollziehen und ein mentales Modell bilden zu können (Mayer & Gallini, 1990, S. 718). Hingegen brächten Lernende mit hohem Vorwissen vermutlich ein großes Repertoire an Strategien mit sich, das sie zum Verstehen des Textes und zum mentalen Visualisieren der Textinhalte nutzen können, ohne externe grafische Darstellungen zu benötigen (Mayer & Gallini, 1990, S. 718).

Im Gegensatz dazu ergab eine Studie zum Einsatz von Diagrammen beim mathematischen Problemlösen, dass Diagramme für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler eine nützliche Ergänzung darstellen, während diese für jüngere (sechste Klasse) sowie leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler keinen Nutzen mit sich bringen (J. L. Booth & Koedinger, 2012). Den Publizierenden zufolge könnte die Verwendung von Diagrammen die kognitive Belastung für die lernschwachen Lernenden noch zusätzlich erhöht haben, sodass sie sich überfordert gefühlt und die Problemlösung aufgegeben haben (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 505). Bei beiden beschriebenen Studien wurden allerdings vorgefertigte Darstellungen zur Verfügung gestellt.

Eine Studie zur Wirkung *aktiven* Erstellens grafischer Darstellungen bei Erwachsenen mit unterschiedlichem Leistungsniveau in Bezug auf mathematische Kompetenzen und domänenspezifisches Wissen ergab, dass sowohl die Experten als auch die Novizen vom aktiven Erstellen grafischer Darstellungen profitierten (Stern et al., 2003, S. 202). Veloo (1996) führte eine Interventionsstudie mit durchschnittlich 15-Jährigen durch, die Textaufgaben bearbeiteten und Diagramme dazu zeichneten. Im Gegensatz zur zuvor beschriebenen Studie zeigte sich hierbei, dass die Anwendung der Zeichenstrategie insbesondere dann zu besseren Ergebnissen führte, wenn die Schülerinnen und Schüler ein eher geringes konzeptionelles Verständnis der Inhalte hatten (Veloo, 1996, S. 585). Zu berücksichtigen ist dabei, dass die Novizen Übungsmöglichkeiten und Hinweise zur Erstellung der grafischen Darstellungen erhielten und somit zumindest eine gewisse Kompetenzgrundlage geschaffen wurde. In einer Untersuchung bei Lernenden mit Lernschwierigkeiten zeigte sich, dass die Problemlöseleistung bei diesen Lernenden stärker mit der aktiven Erstellung visueller Darstellungen korrelierte als bei Lernenden mit durchschnittlichen Leistungen (Krawec, 2014).

Auch die kognitionspsychologische Forschung liefert im Rahmen des *Integrierten Modells des Text- und Bildverstehens* nach Schnotz und Bannert (2003) theoretische Ansätze für mögliche Differenzen bei der Wirkung des Skizzenzeichnens je nach Leistungsniveau. Das Modell nimmt an „that poor readers profit more from illustrations in written texts than good readers“ (Schnotz, 2005, S. 62). Je geringer das Vorwissen der Lernenden ist, desto geringer sind auch ihre internen Ressourcen zum Aufbau mentaler Modelle, so die Annahme. Entsprechend sei es für leistungsschwache Lernende umso hilfreicher, wenn zusätzlich zur textbasierten auch eine bildbasierte Verarbeitung von Informationen stattfindet (Schnotz, 2005, S. 62). Möglicherweise ist dies auch auf die eigenständige, aktive Konstruktion von Skizzen zu übertragen, jedoch fehlen hierfür Belege. Die bisher unzureichende Forschungsgrundlage sowie die teilweise kontroversen empirischen Ergebnisse unterstreichen die Notwendigkeit weiterer Untersuchungen zur Wirkung des Skizzenzeichnens auf den Lösungserfolg in Abhängigkeit des Leistungsniveaus (Pantziara et al., 2009, S. 56).

3.4.7 Präferenzen zum Zeichnen von Skizzen

Nicht nur die kognitiven Eigenschaften einer Person, die eine Skizze erstellt, um damit eine Aufgabe zu lösen, sondern auch affektive Faktoren haben sich bereits vielfach als einflussreich erwiesen. In diesem Bereich wurden bereits empirische Studien zu verschiedenen Konstrukten durchgeführt, wie beispielsweise zu Wahrnehmungen, Ansichten, Emotionen, persönlichen Erfahrungen oder Präferenzen. Häufig sind die verschiedenen Faktoren miteinander verwoben und lassen sich nicht eindeutig voneinander trennen.

Auch Cox (1999) hat sich mit individuellen Unterschieden zwischen Versuchspersonen hinsichtlich ihrer Präferenzen für bestimmte Arten und Modalitäten externer Darstellungen befasst und nehmen an, dass diese Unterschiede auf verschiedene kognitive Stile zurückgehen, da beispielsweise je nach räumlichen Fähigkeiten unterschiedliche Strategien bevorzugt werden (R. Cox, 1999, S. 356). Häufig wird im Zusammenhang mit kognitiven Stilen auch von *Visualisierungs- und Verbalisierungstypen* gesprochen, je nachdem ob die Lernenden eher zu visuellen Darstellungen tendieren oder verbale Darstellungsformen bevorzugen (Presmeg, 2006). Allerdings hat sich auch gezeigt, dass die Zuordnung von Lernenden zu diesen Kategorien nicht immer trennscharf gelingt und die Kategorisierung zudem nicht ausreicht, um die Komplexität der kognitiven Stile zu erfassen (R. Cox, 1999, S. 357 f.). Darüber hinaus ist die Präferenz für verbale oder visuelle Darstellungen vermutlich keine feste Disposition, sondern ist vielmehr bedingt durch das Zusammenspiel von didaktischem Impuls und räumlichen bzw. visuellen Kompetenzen (R. Cox, 1999, S. 356 ff.; Elia & Philippou, 2004, S. 333).

In einer Studie von Uesaka et al. (2007) mit japanischen und neuseeländischen Schülerinnen und Schülern wurden wahrnehmungs- und verhaltensbezogene Faktoren untersucht, die die Verwendung selbst erstellter Zeichnungen beeinflussen. Dabei kam heraus, dass die neuseeländischen Schülerinnen und Schüler häufiger Skizzen zeichneten und die Aufgaben auch erfolgreicher lösten als die japanischen Lernenden. Dies führten die Autoren vor allem auf ein mangelndes Selbstvertrauen sowie die Wahrnehmung von Schwierigkeiten beim Erstellen und Verwenden von Zeichnungen zurück (Uesaka et al., 2007, S. 332 f.). Bei einer Folgestudie konnte dieses Ergebnis bestätigt werden, indem gezeigt wurde, dass die Wahrnehmung der Strategie als effizient mit der spontanen Erstellung von Skizzen bei mathematischen Problemlöseaufgaben einhergeht (Uesaka et al., 2010, S. 207).

3.4.8 Weitere Einflussfaktoren

In der empirischen Wissenschaft zum Skizzenzeichnen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben wurden über die genannten Faktoren, die sich als besonders relevant oder vielversprechend erwiesen haben, weitere Einflussfaktoren erforscht. So hat sich beispielsweise gezeigt, dass *instruktionale Unterstützung* teilweise hilfreich sein kann (z. B. Van Meter et al., 2006), in anderen Fällen brachte sie jedoch keinen Nutzen oder war sogar hinderlich (z. B. Schmidgall, 2017, S. 106). Hinsichtlich des *Alters* der Lernenden deuten Studien darauf hin, dass der Einsatz bzw. das eigenständige Zeichnen von Skizzen bei älteren Lernenden eine positive Wirkung auf den Bearbeitungsprozess haben, während bei jüngeren Teilnehmenden kein Nutzen zu verzeichnen ist (J. L. Booth & Koedinger, 2012; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter et al., 2006). Auch *emotionale Faktoren* erwiesen sich als einflussreich beim Zeichnen von Skizzen zu Modellierungsaufgaben: Während Freude beim Zeichnen von Skizzen dazu führt, dass häufiger Skizzen erstellt werden (Schukajlow, Blomberg, & Leopold, 2019), steht Angst vor der Verwendung der Strategie nicht nur mit einer geringeren Häufigkeit der Skizzennutzung, sondern auch mit vermindertem strategischen Wissen und geringerer Modellierungsleistung in Zusammenhang (Schukajlow, Blomberg, & Rellensmann, 2019). Immer wieder werden in der mathematikdidaktischen Forschung auch *geschlechterspezifische Unterschiede* zwischen Jungen und Mädchen zugunsten der männlichen Lernenden nachgewiesen; so zum Beispiel bei räumlichen Fähigkeiten (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Speziell bei der Wirkung des Skizzenzeichnens ergaben sich bisher jedoch keine geschlechterspezifischen Differenzen. Bei einer Interventionsstudie zur Verwendung visueller Darstellungen beim Lösen von Textaufgaben profitierten Jungen und Mädchen gleichermaßen von dem Interventionsprogramm (Csíkos et al., 2012) und bei einer Studie von Dewolf et al. (2013) gab es beim Einsatz von Darstellungen bei der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben ebenfalls keinen Unterschied zwischen den Geschlechtern. Auch wenn die weiterführende Untersuchung dieser Faktoren interessante Erkenntnisse liefern könnte, liegt der Fokus der vorliegenden Untersuchung auf den zuvor ausführlich beschriebenen und als besonders relevant identifizierten Einflussfaktoren. Die übrigen Faktoren werden nicht bzw. nicht schwerpunktmäßig in die hier durchgeführte Untersuchung einbezogen.

3.5 Mathematischer Kontext

Im Rahmen von Lösungsprozessen in der Mathematik können Zeichnungen in verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen (z. B. Arithmetik, Geometrie, funktionale Zusammenhänge) Anwendung finden. In allen Inhaltsbereichen ist beispielsweise denkbar, dass das Zeichnen einer Skizze dazu beitragen kann, Vorwissen zu aktivieren, Zusammenhänge zu verstehen, Informationen zu ordnen und anschließend die mathematischen Strukturen zu identifizieren.

Der mathematische Kontext einer Aufgabe scheint allerdings einen starken Einfluss auf den erfolgreichen Einsatz von Skizzen als Strategie beim Lösen von mathematischen Modellierungsaufgaben zu haben. Zum einen hängt offenbar die Häufigkeit gezeichneter Skizzen stark vom jeweiligen mathematischen Rahmen ab (Bräuer et al., 2021; Uesaka et al., 2007, S. 332 f.). Zum anderen kann auch die Qualität der Skizzen durch das jeweilige mathematische Thema bedingt sein: Bereits Acevedo Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen und Verschaffel (2009) formulierten die Annahme, dass die grafische Kompetenz, unter die auch das Zeichnen einer Skizze fällt, abhängig vom jeweiligen Kontext sein könnte. Eine Studie zum Zeichnen von Skizzen zu Modellierungsaufgaben zeigte beispielhaft, dass beim geometrischen Thema *Satz des Pythagoras* neben der höheren Häufigkeit auch qualitativ hochwertigere Skizzen erstellt wurden als zum Thema *Lineare Funktionen* (Bräuer et al., 2021, S. 516).

Auch die Wirkung des Skizzenzeichnens im Lösungsprozess kann durch den mathematischen Kontext maßgeblich bestimmt werden. Das Experiment von Schukajlow et al. (2015) ergab, dass die Anwendung eines Lösungsplans beim Thema *Satz des Pythagoras* einen signifikanten Leistungsvorteil beim mathematischen Modellieren erbrachte, während beim Thema *Lineare Funktionen* keine Effekte auftraten. Die Autorinnen und Autoren vermuten, dass vor allem eine erfolgreichere Anwendung der Skizzenzeichen-Strategie beim Thema *Satz des Pythagoras* für diese themenspezifischen Differenzen ausschlaggebend sein könnte. Diese Vermutung bestätigte sich in der Studie von Bräuer et al. (2021, S. 514 f.), in der die Skizzenqualität einen hohen Prädiktor der Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras* darstellte, während sie die Modellierungsleistung zum Thema *Lineare Funktionen* nur geringfügig vorhersagte. Eine mögliche Erklärung bieten Kompatibilitätsmodelle, die besagen, dass je nach Art der Aufgaben unterschiedliche Darstellungen adäquat sind, da sie das Ziehen von Schlussfolgerungen und das Durchführen von Berechnungsvorgängen jeweils auf verschiedene Weise unterstützen (Acevedo Nistal et al., 2009, S. 629 f.). Diese Annahme geht einher mit der Erkenntnis von Stern et al. (2003), dass innerhalb eines Kontextes erworbene Lösungsstrategien nicht unbedingt auf andere Problemkontexte mit isomorphen Strukturen übertragen werden können. Vielmehr seien die kognitiven Aktivitäten im Zusammenhang mit dem Strategieeinsatz stark kontextgebunden.

3.5.1 Skizzenzeichnen in der Geometrie

Vor dem Hintergrund der Spezifika des Inhaltsbereichs Geometrie ist anzunehmen, dass sich das Skizzenzeichnen nicht nur beim spezifischen Thema *Satz des Pythagoras*, sondern überhaupt im Bereich der Geometrie im Besonderen eignet: Zum einen scheint die Geometrie ein vergleichsweise homogener und zugänglicher Inhaltsbereich zu sein, denn der Schwierigkeitsgrad von Aufgaben liegt hier laut Kadunz & Sträßer (2008, S. 195 ff.) bei 60%. Demnach werden durchschnittlich 60% der Aufgaben von Lernenden korrekt gelöst, während der Schwierigkeitsgrad in der Arithmetik und Algebra 40% beträgt. Vor dem Hintergrund, dass auch das Skizzenzeichnen kognitive Anforderungen mit sich bringt, eignet sich der Inhaltsbereich der Geometrie also besonders, um einer kognitiven Überforderung vorzubeugen.

Zum anderen zeichnet sich die Geometrie durch einen starken Bezug zu realweltlichen Themen aus. Sie wird dazu genutzt, Phänomene aus der Umwelt besser zu verstehen und den Umgang damit zu erleichtern. Durch die Entdeckung geometrischer Gesetzmäßigkeiten ergeben sich neue Möglichkeiten und gleichzeitig werden Grenzen realweltlicher Phänomene bzw. des Umgangs damit offenbar (Hayen, 1982, S. 54). Insbesondere der hohe Stellenwert der Anschauung bringt die besondere Nähe der Geometrie zum Erstellen von Zeichnungen mit sich. Das Ziel des Geometrieunterrichts besteht in der Entwicklung von Raumanschauung durch die Sinne, aber auch durch eine „schätzende, messende, wägende und rechnende Darstellung" mathematischer Inhalte (Engel 1921 zitiert nach Hayen, 1982, S. 55). Die Raumanschauung meint das räumlich-visuelle, ganzheitliche Erfassen der Umwelt und zeichnet sich somit durch einen starken räumlich-visuellen Bezug aus, der sich auch in der Strategie des Skizzenzeichnens wiederfindet. Beim Erstellen von Skizzen werden die Komponenten visuell dargestellt und in räumliche Beziehungen zueinander gesetzt. Der Inhaltsbereich der Geometrie zeichnet sich durch eine besondere Konvergenz zwischen der realen Situation und gezeichneten Objekten und Beziehungen aus. Insofern eignet sich die Strategie des Skizzenzeichnens besonders, um die geometrischen Beziehungen zwischen den relevanten Objekten einer gegebenen Situation zu veranschaulichen (Ludwig & Weigand, 2018, S. 46 f.). Empirische Studien stützen die Annahme, indem sie gezeigt haben, dass grafische Darstellungen vor allem bei Aufgaben, in denen es darum geht, Zusammenhänge und Assoziationen herzustellen, ein hohes Unterstützungspotenzial bieten (z. B. Grawemeyer & Cox, 2004).

Da die Themenspezifität des Skizzenzeichnens bisher kaum erforscht ist, ist eine Überprüfung der Generalisierbarkeit von Strategieanwendung und -wirkung für Themen sinnvoll, bei denen der Skizzeneinsatz theoretisch besonders geeignet und unterrichtlich konventionalisiert ist. Für die vorliegende Studie wurden deshalb die geometrischen Themen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I herangezogen, um die Implementation im Rahmen des Schulkontextes zu erleichtern. Die geometrischen Themen des Lehrplans für die Sekundarstufe I lassen sich in folgende Bereiche teilen:

1. Geometrische Körper
2. Geometrische Figuren
3. Symmetrien und Ähnlichkeiten
4. Zeichnen (Skizzen und Konstruktionen)
5. Schrägbilder und Körpernetze
6. Linien im Dreieck und Ortslinien
7. Satz des Thales und Satz des Pythagoras

Eine mögliche Generalisierbarkeit der Strategie sollte zunächst anhand geometrischer Themen untersucht werden, bevor eine Übertragung auf weiter entfernte Themen vorgenommen wird. Zur Implementation erscheint eine Auswahl geometrischer Themen sinnvoll, bei denen das Skizzenzeichnen mit vergleichbarer Zielsetzung durchgeführt werden kann – und bei denen es nicht darum geht, konventionalisierte Darstellungen nach bestimmten Regeln anzufertigen, wie es beispielsweise beim Darstellen geometrischer Körper, Zeichnen von Schrägbildern und Körpernetzen der Fall ist. Aufgrund der geringeren Komplexität sind zweidimensionale Darstellungen stets einfacher zu zeichnen als dreidimensionale. Bei den Themen *Linien im Dreieck und Ortslinien* sowie *Symmetrien und Ähnlichkeiten* sind in der Regel exakte Zeichnungen bzw. Konstruktionen zielführend, während (Freihand-)Skizzen weniger zur Lösung von Problemstellungen in diesen Bereichen beitragen. Somit bleiben noch die Themen *Geometrische Figuren*, *Satz des Thales* und *Satz des Pythagoras*, denn das Thema *Zeichnen* wird ohnehin untersucht. Während bei Berechnungen an geometrischen Figuren und auch beim Satz des Pythagoras i.d.R. Rechnungen mit Längen und Flächen durchgeführt werden, ist beim Satz des Thales auch der Umgang mit Winkeln relevant. Insofern sind die Themen *Satz des Pythagoras* und *Geometrische Figuren* inhaltlich und im Hinblick auf das Skizzenzeichnen am ehesten verwandt. Da anhand geometrischer Figuren unterschiedliche Rechnungen durchgeführt werden können und beim Satz des Pythagoras mit Längen und Flächen gerechnet wird, kommt der Teilbereich *Berechnung von Flächeninhalten geometrischer Figuren* den Inhalten des *Satz des Pythagoras* am nächsten.

3.5.2 Skizzen zum Thema *Satz des Pythagoras*

Beim *Satz des Pythagoras* handelt es sich vermutlich um den bekanntesten geometrischen Lehrsatz aus dem Schulunterricht (Kadunz & Sträßer, 2008, S. 214). Trotzdem ist vielen Menschen einige Jahre nach der Schulzeit nur noch die mathematische Formel bekannt und weniger bewusst, dass es sich im Kern um eine Aussage über Flächeninhalte handelt, die über die Flächenberechnung hinaus Anwendung findet. Denn in der Regel wird der Satz verwendet, um mithilfe der Aussage über die Flächeninhalte Berechnungen von Längen im rechtwinkligen Dreieck vorzunehmen (Kuntze, 2013a, S. 177). Das Skizzenzeichnen ist beim *Satz des Pythagoras* im deutschen Schulunterricht im Verhältnis zu anderen mathematischen Themen stärker konventionalisiert (Diebel et al., 2013; Dormann et al., 2008).

Eine didaktische Besonderheit des *Satzes des Pythagoras* liegt darin, dass in der Schulmathematik erstmalig anstelle von Buchstaben die Bezeichnungen Kathete und Hypotenuse eingeführt werden, die durch konkrete Eigenschaften der Dreiecksseiten bedingt sind (Kadunz & Sträßer, 2008, S. 215). Bei der Anwendung des Satzes findet außerdem eine neuartige Verknüpfung zwischen der Algebra und der Geometrie statt, indem es drei Variablen gibt, die bestimmt werden können (Kadunz & Sträßer, 2008, S. 215). Je nachdem, welche der Variablen zu berechnen ist und je nach Zahlbereich des Ergebnisses sind die Lösungsquoten unterschiedlich hoch. Kadunz und Sträßer (2008, S. 216) geben an, dass die meisten korrekten Lösungen bei Berechnung der Hypotenuse mit rationalem Ergebnis zustande kommen, die Lösungsrate niedriger ist bei irrationalem Ergebnis für die Hypotenuse und am wenigsten korrekte Ergebnisse bei Berechnung einer Kathete generiert werden. Beim Bestimmen von Katheten und Hypotenuse spielt das Zeichnen einer Skizze insofern eine Rolle, dass dabei der rechte Winkel deutlich werden kann und anhand dessen die jeweiligen Seiten im Dreieck als Katheten bzw. Hypotenuse identifiziert werden können. Mithilfe der Zeichnung können auch die Zahlenangaben entsprechend zugeordnet werden, um sie anschließend korrekt in die Formel einzusetzen.

Eine zusätzliche didaktische Hürde bei der Anwendung des *Satzes des Pythagoras* kann darin bestehen, dass Dreiecke manchmal nur dann als rechtwinklig erkannt werden, wenn sie in bestimmten Lagepositionen dargestellt sind; nämlich insbesondere dann, wenn die Katheten parallel zu den Papierkanten sind. Teilweise sind die Dreiecke, für die der *Satz des Pythagoras* angewendet werden soll, auch Teile von Figuren oder räumlichen Konfigurationen (Kadunz & Sträßer, 2008, S. 117). In diesen Fällen muss das rechtwinklige Dreieck zunächst korrekt identifiziert werden, bevor der Satz angewendet werden kann. Selbst erstellte Skizzen können die Möglichkeit bieten, die Rechtwinkligkeit des Dreiecks durch den eigenständigen Zeichenprozess stärker ins Bewusstsein zu bringen. Die Positionierung und Ansicht einer Figur oder Konfiguration wird beim Zeichnen selbständig vorgenommen, sodass das Erkennen des rechtwinkligen Dreiecks erleichtert werden kann. Außerdem sind Vereinfachungen der depiktionalen Darstellung beim Skizzenzeichnen erlaubt bzw. sogar erwünscht, indem eine Beschränkung auf die wesentlichen Ausschnitte vorgenommen wird. Allerdings ist nicht selbstverständlich, dass die Lernenden dabei eine sinnvolle Auswahl an Objekten und

Relationen treffen, die automatisch in die Erkenntnis des rechtwinkligen Dreiecks mündet. Denkbar ist auch, dass der Freiraum beim Skizzenzeichnen dazu führt, dass eine irreführende Darstellung gewählt oder eine wenig zielführende Auswahl relevanter Elemente für die Skizze getroffen wird.

Die Analyse möglicher Funktionen des Skizzenzeichnens vor dem Hintergrund stoffdidaktischer Besonderheiten beim Thema *Satz des Pythagoras* verdeutlicht, dass die Strategie bei diesem Thema ein großes lernförderliches Potenzial besitzt. Bereits in verschiedenen Studien hat sich ein besonders starker Zusammenhang zwischen dem Skizzenzeichnen und dem Erfolg beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben zum *Satz des Pythagoras* gezeigt, der auf eine lernförderliche Wirkung der Strategie schließen lässt (Bräuer & Leiss, 2018; Rellensmann et al., 2022, 2017; Schukajlow et al., 2015). Unklar ist bisher, ob es sich dabei um für das Thema spezifische Vorteile handelt, oder ob sich die Zusammenhänge und Wirkungen generalisieren lassen.

3.5.3 Skizzen zum Thema *Flächeninhalte*

Ein weiterer geometrischer Themenbereich, bei dem das Skizzenzeichnen aufgrund des starken Bezugs zu zeichnerisch darstellbaren Objekten und Relationen eine potenziell wirksame Strategie darstellt, ist die *Bestimmung von Flächeninhalten geometrischer Figuren*, im Folgenden kurz benannt als das Thema *Flächeninhalte*. Das Thema bringt ebenfalls didaktische Besonderheiten mit sich, die beim Zeichnen von Skizzen zum Tragen kommen können.

Bereits in der Grundschule wird das Thema *Flächeninhalte* vorbereitet, indem Größenvergleiche zwischen Figuren und Körpern durch Zuhilfenahme von Gegenständen durchgeführt werden. Die Größenvergleiche werden jedoch weniger mathematisch, sondern in erster Linie alltagsbezogen vorgenommen. Erst in der Sekundarstufe I, in der fünften Jahrgangsstufe, werden die Flächenmessung bzw. -berechnung sowie die dazugehörigen Begrifflichkeiten systematisch entwickelt (Kuntze, 2018, S. 151). Wichtig ist dabei, dass von Beginn an der Bezug zur realweltlichen Umgebung hergestellt wird, indem bei der Betrachtung von Gegenständen und Situationen geometrische Figuren, Körper und Konfigurationen identifiziert werden (Hayen, 1982, S. 43). Aufgrund der hohen Relevanz realweltlicher Bezüge ist die Rolle des Skizzenzeichnens als Übersetzungsmedium zwischen realer Situation und mathematischem Modell beim Lösen von Problemstellungen von besonderer Bedeutung. Nur selten liegen auf den ersten Blick überschaubare und ideale geometrische Figuren in einer realen Situation vor. Deshalb müssen die jeweiligen Objekte oder räumlichen Konfigurationen zunächst so idealisiert werden, dass eine Flächeninhaltsformel darauf angewendet werden kann. Vor allem wenn in einer realen Situation besonders große Figuren gegeben sind, die wenig überschaubar sind, oder die Figuren Teile von Objekten oder räumlichen Konfigurationen sind, kann es hilfreich sein, diese in Form einer selbst erstellten Skizze zu visualisieren. Auf diese Weise können Strukturen und Formen deutlich werden, die zuvor nicht ersichtlich waren.

Die Erarbeitung des Themas *Flächeninhalte* wird in der Sekundarstufe I anhand von Rechtecken exemplarisch durchgeführt, da es sich hierbei um eine einfache Form handelt, bei der die Flächeninhaltsberechnung durch die Vervielfachung von Streifen oder Einheitsquadraten hergeleitet werden kann. Aus dieser Formel kann in den folgenden Jahrgangsstufen die Flächeninhaltsberechnung für weitere Figuren, wie z. B. Parallelogramm, Trapez und Dreieck hergeleitet werden. Hinzu kommen weitere Figuren wie Polygone und der Kreis (Kuntze, 2018, S. 151). Aufgabe des Geometrieunterrichts in der Sekundarstufe I ist es, den Flächeninhaltsbegriff schrittweise und kontinuierlich weiterzuentwickeln (Hayen, 1982, S. 53). Geometrische Figuren finden in vielen folgenden Themen der Geometrie Anwendung. Symmetrien werden anhand von Figuren untersucht; Abbildungen (Verschiebung, Drehung, Spiegelung) von Figuren erstellt; Strecken und Winkel anhand von Figuren gemessen sowie der Oberflächeninhalt bzw. Inhalt von Teilen der Oberfläche von Körpern mithilfe von zweidimensionalen Figuren ermittelt. Hierbei spielt häufig der Flächeninhalt eine Rolle (Hayen, 1982, S. 43).

Schülerinnen und Schüler äußern, dass das Thema *Flächeninhalte* aus ihrer Sicht nicht nur den Inhaltsbereich der Geometrie, sondern auch den der Algebra berührt, indem das Rechnen mit Formeln dabei eine wichtige Rolle spielt (Kadunz & Sträßer, 2008, S. 209). Gemeint sind hiermit die innermathematischen Rechenschritte, die bei der Anwendung der Formel durchgeführt werden müssen. Das deutet erneut auf die Relevanz innermathematischer Kompetenzen (beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben) im Inhaltsbereich der Geometrie hin, die in Kapitel 4.5.2 beschrieben wird.

Ein weiteres didaktisches Spezifikum besteht darin, dass Maßzahlen notwendig sind, um den Flächeninhalt einer geometrischen Figur sinnvoll angeben zu können. Durch die Maßeinheit wird zum einen verdeutlicht, ob es sich bei der jeweiligen Angabe um eine Länge, einen Flächen- oder Rauminhalt handelt und zum anderen wird ein Bezug zur realweltlichen Umgebung hergestellt (Kuntze, 2018, S. 158). Als Maßzahlen werden zunächst natürliche Zahlen verwendet, ab dem sechsten Schuljahr kommen gebrochene Maßzahlen hinzu. Bei einer Skizze kann man die Maßangaben eintragen und auf diese Weise Klarheit darüber erlangen, welche der Angaben relevant für die Lösung einer Problemstellung sind.

Eine weitere didaktische Besonderheit bzw. Schwierigkeit liegt in dem Verständnis von Begrifflichkeiten, denn die bloße Kenntnis impliziert nicht unbedingt auch ein adäquates Verständnis der Begriffe. Das mangelnde Verständnis ist meist durch eine vorschnelle Formalisierung verursacht, indem ein Übergang zur innermathematisch orientierten Verwendung der Formeln erfolgt, bevor die Grundvorstellungen zu den Konzepten ausreichend verinnerlicht sind (Hayen, 1982, S. 53; Kuntze, 2018, S. 159). Das führt beispielsweise zu einer häufigen Verwechslung von Flächeninhalt und Umfang. Obwohl die Formeln zur Berechnung beider Eigenschaften anschaulich hergeleitet werden können, werden sie von Lernenden immer wieder verwechselt (Hayen, 1982, S. 53). Das Zeichnen von Skizzen kann der verfrühten Formalisierung entgegenwirken, indem zunächst die konkrete Situation bzw. die konkreten Objekte veranschaulicht werden, bevor entschieden wird, welche Formel(n) zur Berechnung verwendet werden. Durch die Visualisierung können Grundvorstellungen aktiviert werden, sodass das Risiko einer Verwechselung mit anderen Formeln gemindert wird. Gleichzeitig birgt das Zeichnen der Skizze jedoch auch Risiken, da man beim Zeichnen in erster Linie den Umriss einer Figur darstellt und somit gerade eine Verwechslung mit dem Umfang initiieren könnte.

Ein mangelndes Verständnis geometrischer Figuren und deren Eigenschaften zeigt sich auch daran, dass häufig anstelle von internen Relationen (also Seiten-, Winkel-, Diagonalen- und Symmetrieeigenschaften) externe Relationen, wie z. B. die Positionierung zum Blattrand, als entscheidende Kriterien zur Einordnung von Objekten betrachtet werden (J. Roth & Wittmann, 2018, S. 108). Häufig wird der rechte Winkel in Figuren nicht als solcher erkannt, wenn die Figur in einer untypischen Lage dargestellt ist, da z. B. „senkrecht" häufig als „aufrecht" anstatt als Relation verstanden wird. Ein Quadrat wird häufig als Raute bezeichnet, wenn es auf die Spitze gestellt ist oder ein gleichschenkliges Dreieck nur als solches benannt, wenn die Basis parallel zur unteren Blattkante ausgerichtet ist (J. Roth & Wittmann, 2018, S. 109). Das selbständige Erstellen von Skizzen bietet eine Möglichkeit, sich der internen Relationen bewusst zu werden, indem die Objekte dargestellt und notwendigerweise in räumliche Relationen zueinander gesetzt werden müssen. Gleichzeitig birgt die Selbständigkeit beim Zeichnen aber die Gefahr, dass sich die irrtümlichen Vorstellungen durch fehlerhafte Zeichnungen manifestieren und auf diese Weise zu falschen Mathematisierungen führen.

Zur Wirkung des Skizzenzeichnens beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben zum Thema *Flächeninhalte* gibt es bisher kaum empirische Untersuchungen. Eine Untersuchung von De Bock et al. (2003) ergab einen signifikant negativen Effekt von selbst erstellten Zeichnungen auf den Lösungserfolg beim Bearbeiten nicht-linearer Geometrieaufgaben zu Flächeninhalts- und Volumenberechnungen. Allerdings ist dieses Ergebnis höchstwahrscheinlich auf die Übergeneralisierung des Konzepts der Linearität auf Problemsituationen, in denen das Konzept nicht adäquat ist, zurückzuführen (De Bock et al., 2003; Krawitz & Schukajlow, 2020). In diesem Fall scheint also die Besonderheit des Themas den negativen Effekt bedingt zu haben. Unklar ist bisher, welche Wirkung das Zeichnen einer Skizze bei anderen Flächeninhalts-Problemstellungen hat, die nicht diese Besonderheit der Nicht-Linearität aufweisen. Lässt sich der positive Zusammenhang zwischen Skizzenzeichnen und Leistung, der sich beim Thema Satz des Pythagoras andeutete, auf das Thema *Flächeninhalte* übertragen oder sind der Einsatz und die Wirkung der Strategie stark themengebunden? Diese Frage bleibt bislang ungeklärt.

4 Mathematisches Modellieren

Das Skizzenzeichnen hat sich insbesondere bei anspruchsvollen, komplexen Anforderungssituationen als hilfreich erwiesen, weshalb dessen Einsatz in der vorliegenden Studie am Beispiel von Modellierungsaufgaben untersucht wird. Beim mathematischen Modellieren handelt es sich um einen der grundlegenden Anwendungsbereiche der Mathematik, die im Wesentlichen zwei Bereiche umfasst (Greefrath, 2015, S. 173): Zum einen beschäftigt sich die Mathematik mit der Erkundung und Nutzung abstrakter Strukturen und Konzepte. Zum anderen können mithilfe der Mathematik Modelle generiert werden, die dazu dienen, Phänomene aus unserer Umwelt zu beschreiben und Vorhersagen zu treffen – und dafür ist die Tätigkeit des mathematischen Modellierens zentral.

Gleichzeitig ist das mathematische Modellieren auch wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Winter formulierte bereits 1996 (S. 35) drei Grunderfahrungen, zu denen der Mathematikunterricht maßgeblich beitragen sollte. Eines der Ziele besteht darin, den Lernenden zu ermöglichen, „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.“ Um diese Grunderfahrung zu ermöglichen und die Anwendung der Mathematik für Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen, ist eine Integration von realistischen Modellierungsproblemen in den Mathematikunterricht unabdingbar.

Im folgenden Abschnitt der Arbeit wird zunächst die aktuelle Relevanz des mathematischen Modellierens in der Mathematikdidaktik als zentralem Forschungsbereich, der sich mit der Integration von Modellierungen in den Mathematikunterricht befasst, erläutert (Kapitel 4.1). Anschließend wird geklärt, was unter dem Begriff „mathematisches Modellieren“ zu verstehen ist, und wie dieser zu verwandten Konzepten wie dem Sachrechnen, Anwendungen u. ä. abzugrenzen ist (Kapitel 4.2). Da der Begriff des (mathematischen) Modells eine zentrale Rolle beim Verständnis des Modellierens einnimmt, wird dieser ebenfalls definiert (Kapitel 4.3), bevor anschließend das Kreislaufmodell zum Modellierungsprozess vorgestellt wird (Kapitel 4.4). Da die vorliegende Arbeit sich speziell mit mathematischen Modellierungsprozessen bei Schülerinnen und Schülern befasst, folgt ein Kapitel zum mathematischen Modellieren in der Schulbildung (Kapitel 4.5), in dem zunächst das Modellieren als Kompetenz beschrieben, die innermathematische Kompetenz als zentraler Einflussfaktor vorgestellt wird und abschließend der Einsatz von Modellierungsaufgaben – als zentrale Initiatoren von Modellierungsprozessen – beschrieben wird. Modellierungsaufgaben werden allerdings immer noch wenig in der Praxis des Mathematikunterrichts eingesetzt. Dies ist u. a. auf die hohe Komplexität von Modellierungsprozessen zurückzuführen, die vielfältige kognitive Schwierigkeiten für die Lernenden mit sich bringt (Kapitel 4.6). Um diese Schwierigkeiten im Modellierungsprozess überwinden zu können, stellt der Einsatz von Strategien eine vielversprechende Möglichkeit dar (Kapitel 4.7). Insbesondere das Zeichnen von Skizzen als Lösungsstrategie scheint vielfältige Möglichkeiten und Funktionsweisen zu bieten, um die einzelnen Teilschritte des Modellierungsprozesses zu unterstützen (Kapitel 4.8).

4.1 Aktuelle Relevanz des mathematischen Modellierens beim Lehren und Lernen von Mathematik

Das Ziel ist „a linking of the field of mathematics with some aspects of the world, with the purpose of enhancing knowledge, but also ensuring or advancing the sustainability of health, education and environmental well-being, and the reduction of poverty and disadvantage.“

(Niss, Blum, & Galbraith, 2007, S. 17 f.)

Die aktuelle Relevanz des mathematischen Modellierens in der Schulbildung begründet sich in erster Linie in dem wesentlichen Beitrag, den der Mathematikunterricht zur Allgemeinbildung leistet. Gemäß dem Zitat von Niss, Blum und Galbraith (2007, S. 7 f.) fördert das mathematische Modellieren den Wissenserwerb durch das Herstellen von Verknüpfungen zwischen der Mathematik und anderen Aspekten der Welt, ermöglicht Teilhabe und Verbesserungen in vielen Bereichen wie Gesundheit, Bildung, Wirtschaft und Gesellschaft, fördert kreatives Denken sowie die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten (siehe auch Blum & Borromeo Ferri, 2009, S. 47; Verschaffel et al., 2020, S. 2). Schon 1996 formulierte Winter drei Grunderfahrungen, die durch den Mathematikunterricht ermöglicht werden sollen. Die erste besteht darin, Lernende dazu zu befähigen, „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft, und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter, 1996, S. 35). Diese Grunderfahrung hat nicht an Aktualität verloren. Weltweit gewinnt das mathematische Modellieren aufgrund der zunehmenden Verwendung mathematischer Verfahren und Modelle im alltäglichen Leben, vor allem aber auch in anderen Wissenschaften und der Technologie an Bedeutung (Stillman, Blum, & Salett Biembengut, 2015, S. v). Das mathematische Modellieren wird deshalb auch in der mathematikdidaktischen Forschung als zentrale Tätigkeit für den Umgang mit realweltlichen Erscheinungen erachtet und findet sich nicht nur national, sondern auch international in den Lehrplänen vieler Länder wieder (engl. *Mathematical Modelling*) (Common Core State Standards Initiative, 2010; Kultusministerkonferenz, 2004).

Seit den 1970er/80er Jahren hat das mathematische Modellieren in der mathematikdidaktischen Forschung im Zuge der Bewegung des Neuen Sachrechnens[10] an Bedeutung gewonnen und ist mittlerweile zu einem zentralen Thema der mathematikdidaktischen Diskussion geworden (Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007, S. xi; Borromeo Ferri, Greefrath, & Kaiser, 2013, S. 1; Verschaffel et al., 2020). Seitdem wurden zum Thema „mathematisches Modellieren“ sowohl national als auch international verschiedene Forschungsinstitutionen, Veranstaltungen (z. B. Konferenzen und Arbeitskreise) und Projekte initiiert sowie zahlreiche Publikationen dazu veröffentlicht (Biehler & Leiss, 2010, S. 5; Blum et al., 2007, S. xi; Borromeo Ferri et al., 2013, S. 2; Schukajlow, Kaiser, & Stillman, 2018, S. 6; Verschaffel et al., 2020). Darunter findet

[10] Die Bewegung des Neuen Sachrechnens wird hier nicht weiter erläutert, da diese nicht im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht. Eine umfassende Übersicht über das Verständnis und die historischen Entwicklungen finden sich bei Franke & Ruwisch (2010).

sich insbesondere die Tagungsreihe der ICTMA[11], bei der der aktuelle Stand der internationalen Debatte zum mathematischen Modellieren alle zwei Jahre vorgestellt wird. Auch bei der ICME[12] und der CERME[13] werden Anwendungen und mathematisches Modellieren zunehmend zu essenziellen Themen.

Im Bereich der Publikationen sind die Tagungsbände zur ICTMA unter dem Namen *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* sowie die Serie der ICMI-Studien[14] von besonderer Relevanz, da diese über die internationalen Entwicklungen in der Debatte um das mathematische Modellieren berichten (Greefrath & Vorhölter, 2016, S. 1). Daneben gibt es zahlreiche qualitative und quantitative Studien, die sich mit der Bewältigung von Modellierungsprozessen durch Schülerinnen und Schüler, der Rolle der Lehrkräfte bei der Initiierung von Modellierungsprozessen sowie der Gestaltung von Lernumgebungen zum mathematischen Modellieren befassen (Blum et al., 2007, S. xi; Greefrath & Vorhölter, 2016, S. 1; Verschaffel et al., 2020). Eine Metaanalyse von Schukajlow, Kaiser und Stillman (2018, S. 9) zeigte jedoch, dass sich nur drei Prozent der Beiträge aus drei bedeutenden, internationalen Journalen zwischen 2012 und 2018 auf das Thema „Mathematisches Modellieren“ bezogen. Der Großteil der Studien (92%) zeichnet sich durch qualitative Methoden aus, während es kaum quantitative Untersuchungen (7%) gibt. Ein Prozent der Studien ist mit Mixed-Method-Design gestaltet. Dies zeigt, dass das Thema in der mathematikdidaktischen Forschung nach wie vor unterrepräsentiert und der Forschungsstand in dem Bereich ausbaufähig ist.

Viele innovative Forschungsprojekte zum mathematischen Modellieren wurden in den letzten Jahren initiiert, darunter beispielsweise das DISUM-Projekt[15] oder das KOM^2-Projekt[16] aus Deutschland.[17] Auch in der PISA-Studie[18], der größten internationalen Schulleistungsstudie, wird in Bezug auf den mathematischen Bereich in erster Linie der Umgang der Lernenden mit realweltlichen Problemsituationen getestet (Reinhold, Reiss, Diedrich, Hofer, & Heinze, 2018, S. 188). In der PISA-Studie aus dem Jahr 2022 wurde deutlich, dass sich der Leistungsstand hinsichtlich der mathematischen Kompetenzen im Vergleich zur vorherigen Studie im Jahr 2018 massiv verringert hat (Lewalter, Diedrich, Goldhammer, Köller, & Reiss, 2022, S. 9). Bereits seit 2012 fällt die mathematische Kompetenz in Deutschland kontinuierlich ab, allerdings

---

[11] ***I**nternational **C**onference on the **T**eaching of **M**athematical **M**odelling and **A**pplications*

[12] ***I**nternational **C**ongress on **M**athematical **E**ducation*

[13] ***C**onferences of **E**uropean Society for **R**esearch in **M**athematics **E**ducation*

[14] *Modelling and Applications in Mathematical Education*

[15] ***D**idaktische **I**nterventionsformen für einen **s**elbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten **U**nterricht in **M**athematik*

[16] ***Ko**gnitionspsychologische Analysen von **M**odellierungsprozessen im **M**athematikunterricht*

[17] Eine detaillierte Darstellung der mathematikdidaktischen Entwicklungen zum Thema „mathematisches Modellieren“ findet sich bei Greefrath und Vorhölter (2016).

[18] ***P**rogramme for **I**nternational **St**udent **A**ssessment*; durchgeführt von den Mitgliedsstaaten der OECD

handelt sich bei der Entwicklung zwischen 2018 und 2022 um die am stärksten ausgeprägte Abnahme, die bei der Erhebung der mathematischen Kompetenz im Rahmen von PISA in Deutschland bisher aufgetreten ist. Der Anteil an leistungsschwachen Lernenden, die nicht in der Lage sind, einfache mathematische Aufgaben zu lösen, ist zur vorherigen Erhebung von 23 auf 31 % gestiegen – auch an den Gymnasien (Lewalter et al., 2022, S. 9). Im Gegenzug dazu nahm der Anteil an leistungsstarken Schülerinnen und Schülern seit 2012 von Erhebung zu Erhebung deutlich ab (von 17 % in 2012, auf 13 % in 2018 und 9 % in 2022) (Lewalter et al., 2022, S. 9). Damit unterscheidet sich die mathematische Kompetenz in Deutschland nicht mehr signifikant von der mittleren mathematischen Kompetenz in den OECD-Staaten (Lewalter et al., 2022, S. 10). Aus diesen Ergebnissen wird die große Dringlichkeit deutlich, das mathematische Modellieren im deutschen Mathematikunterricht zu fördern.

Immer wieder wird offenkundig, dass sich die hohe Bedeutung, die dem mathematischen Modellieren in der Mathematikdidaktik und den Lehrplänen beigemessen wird, in der Praxis des Mathematikunterrichts nicht wiederspiegelt (Blum et al., 2007, S. xi; Greefrath & Vorhölter, 2016, S. 35; Stillman et al., 2015, S. v). Der Hauptgrund dafür besteht in der großen Diskrepanz zwischen den Zielsetzungen durch die Didaktik und der alltäglichen Schulpraxis, in der sich zeigt, dass Schülerinnen und Schülern große Schwierigkeiten bei der Durchführung mathematischer Modellierungen haben. Für das Lehren und Lernen mathematischen Modellierens ist vor allem entscheidend, dass ein ausgewogenes Verhältnis zwischen der Anleitung durch die Lehrkraft und der Selbständigkeit der Lernenden geschaffen wird (Blum & Borromeo Ferri, 2009, S. 45; Leiss, 2007).

4.2 Begriffsdefinition: mathematisches Modellieren

Der Begriff des „mathematischen Modellierens“ kann auf unterschiedliche Weise verstanden werden und erfordert deshalb eine konkrete Definition und Abgrenzung. Zum einen kann das mathematische Modellieren als Übersetzungsschritt zwischen einer realen Problemstellung und dem mathematischen Modell verstanden werden (Niss et al., 2007, S. 4). Dies ist eine engere Auffassung des Modellierens, die eher selten vertreten wird. Häufig wird die Übersetzung stattdessen als *ein* Schritt beim mathematischen Modellieren betrachtet, der dann als *Mathematisieren* bezeichnet wird.

Ein breiteres Verständnis des mathematischen Modellierens, das in der aktuellen Forschung häufiger vertreten wird, umfasst den gesamten *Prozess des Modellierens* vom Verstehen des Problems über die Strukturierung der Informationen, die Konstruktion des mathematischen Modells, das mathematische Arbeiten in dem Modell, die Interpretation und Evaluation der mathematischen Lösung, das Darlegen der Problemlösung bis hin zum ggf. wiederholten Durchlaufen des gesamten Modellierungsprozesses. So definiert beispielsweise Greefrath (2010, S. 42) in Anlehnung an Griesel (2005, S. 64): „Mit Modellieren wird die Tätigkeit bezeichnet, durch die ein mathematisches Modell zu einem Anwendungsproblem aufgestellt und bearbeitet wird.“ Hier werden also alle Teilprozesse des Modellbildens und des Arbeitens innerhalb des Modells unter dem Begriff des Modellierens subsumiert. Niss, Blum und

Galbraith formulieren eine sehr differenzierte Definition, bei der die verschiedenen Teilprozesse des Modellierens konkret benannt werden: „The term modelling refers to the entire process, and everything involved in it - from structuring D, to deciding upon a suitable mathematical domain M and a suitable mapping from D to M, to working mathematically within M, to interpreting and evaluating conclusions with regard to D, and to repeating the cycle several times if needed or desirable.“[19] (Niss et al., 2007, S. 4)

Besonders allgemein definieren Blum und Borromeo Ferri (2009, S. 45) in einem Abstract das mathematische Modellieren als „the process of translating between the real world and mathematics in both directions“. Für den Begriff „real world“ wird z.T. auch die Bezeichnung „rest of the world“ verwendet, die maßgeblich von Pollak (1979) geprägt wurde (Blum & Borromeo Ferri, 2009, S. 45). Darunter ist die Welt außerhalb der Mathematik zu verstehen, also die Natur, die Gesellschaft und Kultur, das alltägliche Leben oder auch andere wissenschaftliche Forschungsbereiche. Aus diesen Bereichen können die Probleme stammen, die mithilfe mathematischer Modelle bearbeitet werden. Dabei kann es sich nicht nur um praktische Probleme, sondern auch um Problemstellungen intellektueller Natur handeln, die sich auf das Beschreiben, Erklären, Verstehen oder sogar Entwerfen von Teilen der realen Welt beziehen (Niss et al., 2007, S. 8). Denn in unserer Lebenswelt existieren nicht nur konkrete Objekte, Werkzeuge und Gefüge, sondern auch immaterielle Strukturen, wie z. B. Ideen, Erwartungen, Werte und Kraftbeziehungen.

Zur Konkretisierung des Modellierungsbegriffes für die vorliegende Arbeit wird außerdem die Unterscheidung von Niss et al. (2007, S. 10) herangezogen, bei der die Begriffe *Anwendungen* und *Modellierungen* voneinander abgegrenzt werden. Bei *Anwendungen* stehen die realen Objekte und Strukturen im Vordergrund, die mit Hilfe mathematischer Modelle bearbeitet werden sollen. Der Blickwinkel ist von der Mathematik aus auf die Realität gerichtet unter der Fragestellung, auf welche Aspekte sich bestimmte mathematische Konzepte und Verfahren anwenden lassen. Für manche Forschende ist ein Modellierungsproblem nur dann als solches zu bezeichnen, wenn es sich im Sinne der Anwendungen mit vollkommen realen Fragestellungen befasst, die ausgedehnte Phasen des Treffens von Annahmen, Bewertens und Validierens initiieren (Verschaffel et al., 2020, S. 2). In dieser Arbeit jedoch werden auch solche Aufgaben als *Modellierungen* verstanden, die zwar keine vollkommen realen Fragestellungen beinhalten, sondern für die Schule angepasste, realitätsnahe Probleme beinhalten; die gleichzeitig aber dazu geeignet sind, Modellierungsprozesse zu initiieren. Bei diesen Modellierungen wird der Blick von der realitätsnahen Problemstellung aus auf die Mathematik gerichtet und die Konstruktion des mathematischen Modells sowie die damit verbundenen kognitiven Prozesse stehen im Fokus.

Sowohl Anwendungen als auch mathematische Modellierungen sind untergeordnete Bereiche des *Sachrechnens*. Mathematisches Modellieren und Sachrechnen werden gemäß Greefrath

[19] D steht für „extra-mathematical domain“ und M für „mathematical domain“.

(2010, S. 41) häufig als Gegensätze gesehen, während das Modellieren in dieser Arbeit vielmehr als ein wesentlicher Teilaspekt des Sachrechnens verstanden wird. Der Begriff des Sachrechnens umfasst sämtliche Formen der Auseinandersetzung mit der realen Welt im Mathematikunterricht und damit im Besonderen auch Modellierungsaufgaben. Die genaue Ausdifferenzierung der Sachaufgabentypen wird unterschiedlich vorgenommen und im Kapitel 4.5.3 genauer erläutert. In ähnlicher Weise ist das mathematische Modellieren auch ein Teilbereich der *angewandten Mathematik*. Der Begriff und das Konzept des mathematischen Modellierens haben in diesem Bereich insbesondere durch Pollak (1977) an Bedeutung gewonnen (Greefrath, Kaiser, Blum, & Ferri, 2013, S. 11). Hier werden vier Bereiche unterschieden, von denen zwei den Fokus auf Anwendungen der Mathematik legen, und zwei auf die mathematische Modellierung realer Probleme fokussieren.

Eine weitere Unterscheidung beim Verständnis des mathematischen Modellierens wird hinsichtlich der Bewusstheit bei der Ausführung des Prozesses getroffen (Greefrath, 2010, S. 45). In einer engen Auffassung wird Modellieren als Prozess verstanden, der *bewusst* stattfindet und bei dem die Reflexion über das Modellieren als entscheidendes Kriterium erachtet wird. Demgegenüber steht ein allgemeines Verständnis des Modellierens, das bereits stattfindet, wenn Lernende realitätsbezogene Problemstellungen bearbeiten, auch wenn dies *ohne das Bewusstsein* geschieht, dass dabei ein Modell konstruiert wird. Letzteres Verständnis ist Grundlage der vorliegenden Arbeit, da bei der Untersuchung Lernende im Mittelpunkt stehen, die Modellierungsaufgaben bearbeiten und sich dabei nicht notwendigerweise bewusst darüber sind, dass sie dabei Modelle konstruieren – geschweige denn, den Prozess bewusst reflektieren.

Aus den beschriebenen Kategorisierungen und Abgrenzungen ergibt sich folgende Arbeitsdefinition: Mathematisches Modellieren wird in Anlehnung an Greefrath (2010, S. 42) und Niss et al. (2007, S. 4) breit definiert als Prozess vom Verstehen des Problems, über die Mathematisierung bis hin zur Validierung der Lösung. Im Gegensatz zu Anwendungen werden Modellierungsaufgaben verstanden als für die Schule angepasste, realitätsnahe Problemstellungen, die Modellierungsprozesse in Gang setzen. Mathematisches Modellieren ist ein Teilgebiet des Sachrechnens sowie der angewandten Mathematik. Sobald Lernende realitätsbezogene Problemstellungen bearbeiten und ein mathematisches Modell dazu erstellen, findet mathematisches Modellieren statt – auch wenn sich die Lernenden dessen nicht bewusst sind.

4.3 Das mathematische Modell als zentrale „Station“

In den meisten Definitionen des „mathematischen Modellierens“ nimmt der Begriff des „(mathematischen) Modells“ eine zentrale Rolle ein. Eine ebenso zentrale Bedeutung spielt das mathematische Modell in der Forschung zum mathematischen Modellieren. Weiterhin hat sich das mathematische Modell beim Zeichnen von Skizzen als möglicher Einflussfaktor erwiesen (Kapitel 3.4.4). In der Literatur existieren verschiedene Beschreibungen zum Begriff des

„mathematischen Modells". Greefrath benennt vier wesentliche Beispiele für solche Beschreibungen (Greefrath, 2010, S. 42 f.):

- Das mathematische Modell als *isolierte Wirklichkeit*: vereinfachtes Bild von einem Ausschnitt der realen Welt, dessen Subsysteme durch mathematische Elemente ersetzt werden, während die Gesamtstruktur erhalten bleibt
- Das mathematische Modell als *Vereinfachung*: vereinfachende Darstellung der Realität, die nur einige bestimmte, objektivierbare Aspekte berücksichtigt
- *Anwendung von Mathematik*: Darstellung eines Sachverhaltes, auf den mathematische Verfahren angewendet werden können, um ein mathematisches Resultat zu erhalten
- *Entsprechung*: vollständige, konsistente Menge mathematischer Strukturen, die darauf ausgerichtet ist, ihrem Prototyp (z. B. physikalische, biologische oder soziale Struktur) zu entsprechen

Zusammenfassend kann das mathematische Modell also definiert werden als „eine isolierte Darstellung der Welt, die vereinfacht worden ist, dem ursprünglichen Prototyp entspricht und zur Anwendung von Mathematik geeignet ist" (Greefrath, 2010, S. 43) Ähnliche Definitionen finden sich in verschiedenen mathematikdidaktischen Quellen (z. B. Greefrath, Kaiser, Blum et al. 2013, S. 13; Maaß 2010, S. 287).

Neben den verschiedenen Funktionen hat die Konstruktion des mathematischen Modells aber auch Grenzen, da die Realität in ihrer Komplexität nicht vollständig durch das mathematische Modell abgebildet werden kann (Greefrath et al., 2013, S. 12). In der Regel ist das jedoch auch nicht beabsichtigt, da das Ziel der Modellbildung darin besteht, eine Vereinfachung der Situation zu erreichen. Modelle sind nicht immer eindeutig, denn für ein und denselben Sachverhalt können unterschiedliche Modelle erstellt werden, je nachdem welches Ziel die Modellbildung beispielsweise verfolgt. Ein Problem kann auf unterschiedliche Weise beschrieben werden und die Eigenschaften und Merkmale können verschiedenartig dargestellt werden (Greefrath, 2010, S. 43; Niss et al., 2007, S. 10).

Trotzdem gibt es drei zentrale Kriterien, die erfüllt sein sollten, um ein adäquates Modell zu generieren. Diese drei Kriterien hat Heinrich Hertz bereits 1894 aus physikalischer Perspektive beschrieben (Hertz 1894, S. 2 f.; siehe auch Greefrath, Kaiser, Blum et al. 2013, S. 13)

1. *Logische Zulässigkeit/Widerspruchsfreiheit*: Unzulässig sind Modelle, die einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens enthalten. Deshalb sollten Modelle stets logisch zulässig bzw. widerspruchsfrei sein.
2. *Korrektheit*: Modelle sind inkorrekt, wenn ihre Strukturen den äußeren Strukturen widersprechen. Vielmehr muss das Modell die realen Strukturen korrekt repräsentieren.
3. *Zweckmäßigkeit*: Ein Modell sollte möglichst viele der wesentlichen Strukturen des Sachverhaltes enthalten, also möglichst deutlich sein. Gleichzeitig gilt ein Modell dann

als zweckmäßig, wenn es möglichst wenige überflüssige Strukturen enthält, also möglichst einfach ist. Die Zweckmäßigkeit kann nur im Zusammenhang mit der Problemstellung beurteilt werden.

Der Ausgangspunkt einer Modellbildung besteht immer in einer realen Problemsituation, die mithilfe eines mathematischen Modells repräsentiert und bearbeitet wird. Der Begriff der Modellbildung wird in der vorliegenden Arbeit synonym für den Prozess des mathematischen Modellierens verwendet. Während der Durchführung des Modellierungsprozesses wird häufig *ein* mathematisches Modell konstruiert, teilweise werden auch mehrere mathematische Modelle gebildet. Manchmal sind die Modelle individuelle Eigenproduktionen, häufig sind es Varianten von Standardmodellen (z. B. Antiproportionalität, lineares oder exponentielles Wachstum) (Niss et al., 2007, S. 10). Meist ist eine bloße Anwendung dieser Standardmodelle jedoch nicht ausreichend, um die wesentlichen Merkmale einer Problemsituation wiederzugeben, sodass die Modelle entsprechend modifiziert und spezifiziert werden müssen. Die einzelnen Schritte des Prozesses werden im folgenden Kapitel 4.4 näher erläutert.

4.4 Der Modellierungsprozess im Kreislaufmodell

Um das mathematische Modell zu konstruieren und anschließend wieder im Rahmen der realen Welt einzubetten, sind zahlreiche Teilschritte notwendig, die grundlegend für die Bewältigung des gesamten Modellierungsprozesses sind. Die Struktur des Modellierungsprozesses wird häufig in Form eines Kreislaufmodells dargestellt (Abbildung 3). Dieser sogenannte Modellierungskreislauf stellt den Ablauf der Modellbildung in idealisierter Form dar und ist somit selbst wiederum ein Modell.

Reale Modellierungsprozesse können dagegen sehr unterschiedlich ablaufen, da Lernende häufig zwischen den verschiedenen kognitiven Prozessen hin und herspringen und dabei z. B. eine Phase auslassen oder einen Schritt zurückgehen (Matos & Carreira, 1997). Dennoch wird theoriebasiert davon ausgegangen, dass die Bewältigung eines Modellierungsteilschrittes zumindest die teilweise Bewältigung des jeweiligen vorherigen Schrittes voraussetzt (Blum & Leiss, 2005; Galbraith & Stillman, 2006; Schukajlow, 2011; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). So wird beispielsweise angenommen, dass kein mathematisches Modell gebildet werden kann, ohne die gegebene Problemsituation zumindest ansatzweise verstanden und strukturiert zu haben (Leiss, Schukajlow, Blum, Messner, & Pekrun, 2010). Diese Annahme wurde auch empirisch nachgewiesen (Borromeo Ferri, 2006).

In den letzten Jahrzehnten wurden verschiedene solcher Kreislaufmodelle entwickelt, wobei diese sich vor allem darin unterscheiden, wie detailliert die Teilprozesse beschrieben werden. Entscheidend für die Detailliertheit der Kreislaufmodelle ist vor allem der Zweck, dem das jeweilige Modell dienen soll. So kann das Kreislaufmodell beispielsweise zur Veranschaulichung des Modellierungs-Begriffs dienen, von Schülerinnen und Schülern als Hilfswerkzeug genutzt werden, einen eigenen Lerninhalt darstellen oder als Analyseinstrument für Lehrkräfte oder als Grundlage für die empirische Forschung dienen (Greefrath et al., 2013, S. 14).

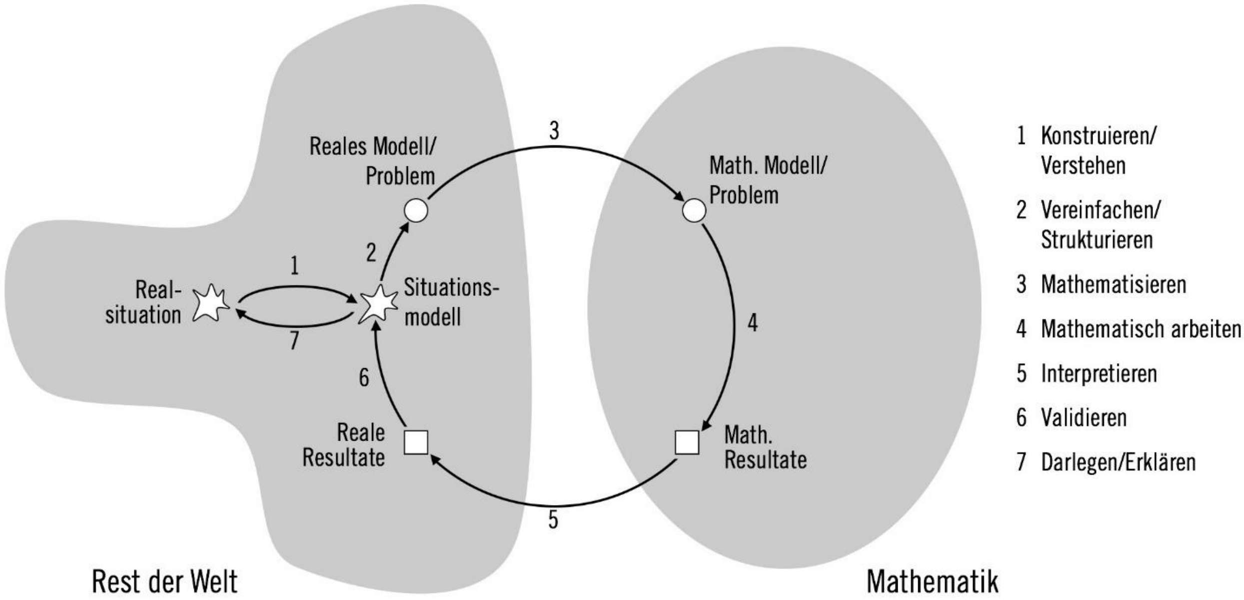


Abbildung 3: Modell des Modellierungskreislaufes nach Blum & Leiss (2005)

Eine mögliche Kategorisierung der Kreislaufmodelle kann nach der Anzahl der Phasen bei der Konstruktion des mathematischen Modells vorgenommen werden. Dabei wird zwischen dem direkten Mathematisieren, dem zweischrittigen und dreischrittigen Mathematisieren unterschieden (Greefrath et al., 2013, S. 14). Etwas differenzierter lassen sich vier Arten von Kreislaufmodellen je nach Anwendungsgebiet kategorisieren[20]. Für die vorliegende Arbeit wird das in Abbildung 3 dargestellte, prototypische Modell des Modellierungskreislaufes verwendet. Dabei handelt es sich um einen diagnostischen Modellierungskreislauf, der die Konstruktion des mathematischen Modells in drei Phasen beschreibt (dreischrittiges Mathematisieren). Diagnostische Modellierungskreislaufmodelle zeichnen sich dadurch aus, dass Situations- und reales Modell nacheinander im Kreislaufmodell angeordnet sind. Die Besonderheit dieses spezifischen Kreislaufmodells besteht darin, dass das Verstehen der realen Situation als separater Teilprozess beim Modellieren dargestellt wird. Das Verstehen wird damit als individueller Konstruktionsprozess hervorgehoben sowie dessen Relevanz als mögliche kognitive Barriere für Schülerinnen und Schüler (Blum & Borromeo Ferri, 2009, S. 47; Leiss, 2007, S. 29) und ist deshalb zentral für die Analyse des Einsatzes kognitiver Strategien (wie dem Skizzenzeichnen) beim mathematischen Modellieren.

Bildung der Situationsmodells durch Verstehen der realen Situation

Der Modellierungskreislauf beginnt mit dem Teilprozess des Verstehens und Strukturierens. Zunächst muss die Aufgabenstellung gelesen werden, in der die reale Situation beschrieben wird. Die Beschreibung der realen Situation kann entweder in Form eines Textes, einer depiktionalen Darstellung oder als multimediales Format vorliegen, bei dem Text und Bild

[20] Für eine umfangreiche Übersicht und nähere Erklärungen zu den verschiedenen Kategorien siehe Borromeo Ferri (2011).

kombiniert sind (Mayer, 2005). Auf Grundlage der jeweiligen Datenquelle werden die relevanten Informationen identifiziert und eine individuelle mentale Repräsentation der Problemstellung, das Situationsmodell, wird konstruiert. Gleichzeitig werden die gefilterten Informationen mit dem Vorwissen des Individuums verknüpft. Zwar wird das Situationsmodell im Wesentlichen durch die Informationen aus der propositionalen und/oder depiktionalen Situationsdarstellung konstituiert. Aber auch die individuellen Erfahrungen der Lernenden mit den Gegenständen und Strukturen, die in der Situationsdarstellung enthalten sind, beeinflussen den Verstehensprozess maßgeblich (Schukajlow, 2011, S. 77 f.).

Darüber hinaus ist die Vergegenwärtigung der Sachstruktur ein weiterer Prozess, der die Konstruktion des Situationsmodells beeinflusst (Reusser, 1997, S. 152). So müssen die handelnden Personen, räumliche und zeitliche Bedingungen, funktionale Aspekte im Handlungsablauf sowie die zu füllende Lücke(n) in der Aufgabenstruktur identifiziert werden. Der Verstehensprozess besteht somit nicht nur in einer Strukturierung und Reduktion der vorliegenden Informationen, sondern auch in einer Erweiterung durch individuelles Vorwissen und semantische Zuschreibungen.

Bildung des realen Modells durch Strukturieren

Anschließend wird das Situationsmodell weiter vereinfacht und strukturiert, sodass das Realmodell entsteht. Die Lernenden reduzieren in diesem Schritt bereits mit dem Blick auf die anschließende Konstruktion des mathematischen Modells die Informationen auf die mathematisierbaren Elemente (Schukajlow, 2011, S. 78). Ggf. müssen in diesem Prozess auch Idealisierungen in Form von vereinfachenden Annahmen vorgenommen und/oder Annahmen über fehlende Angaben getroffen werden (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147). Die Bezugnahme zum mathematischen Modell in diesem Schritt verdeutlicht, dass hier bereits Kenntnisse über mathematische Grundvorstellungen, Begriffe und Operationen relevant sind (Schukajlow, 2011, S. 79).

Konstruktion des mathematischen Modells durch Mathematisieren

Einige Aspekte zu diesem Schritt wurden bereits im Kapitel 4.3 erläutert, da hierbei das mathematische Modell gebildet wird. Die relevanten Gegenstände, Daten, Zusammenhänge, Bedingungen und Annahmen werden aus dem realen Modell in mathematische Objekte und Relationen übersetzt, die zwar noch strukturelle Gemeinsamkeiten mit den realen Sachverhalten aufweisen, gleichzeitig aber eine Anwendung mathematischer Verfahren ermöglichen (Blum & Niss, 1991; Niss et al., 2007, S. 9). Auf diese Weise wird das mathematische Modell konstruiert. Außerdem muss im Mathematisierungsprozess eine Entscheidung darüber getroffen werden, welche mathematischen Verfahren zur Problemlösung zweckdienlich sind. Grundlegend sind in dieser Phase also Kenntnisse über mathematische Operationen sowie konzeptuelle Grundvorstellungen, mit deren Hilfe die Lernenden Handlungsabläufe und Konstellationen innerhalb der Problemsituation erkennen und dafür geeignete mathematische Operationen dafür auswählen müssen (Reusser, 1997, S. 150).

Bestimmen des mathematischen Resultats durch mathematisches Arbeiten

Beim mathematischen Arbeiten werden die mathematischen Verfahren innerhalb des mathematischen Modells angewendet, um ein mathematisches Resultat zu errechnen. Je nach Problemstellung kann die Anzahl und Komplexität der notwendigen mathematischen Verfahren variieren. Dies können beispielsweise Ableitungen aus mathematischen Annahmen, das Lösen von Gleichungen, symbolische Bearbeitungen, algebraische Berechnungen, Simulationen usw. sein. Das mathematische Resultat wird häufig in Form einer Zahl bzw. Zahlen dargestellt, ggf. mit einer zugehörigen Maßeinheit.

Bestimmen des realen Resultats durch Interpretieren

Das mathematische Resultat wird anschließend im Kontext des realen Modells interpretiert. Hier findet also eine „Rück-Übersetzung" aus der Welt der Mathematik in die außermathematische Domäne statt. Dabei werden die mathematischen Resultate mit den realen Strukturen verknüpft und ein reales Resultat wird erzeugt.

Validieren im Kontext des Situationsmodells

Im Validierungsprozess wird das reale Resultat noch einmal anhand der Informationen aus dem Situationsmodell geprüft und bewertet. Dabei ist es wichtig, das Situationsmodell noch einmal in seiner vollen Komplexität zu betrachten. Zum einen wird dabei untersucht, ob sich das Ergebnis auf sinnvolle Weise mit den ursprünglich gegebenen Informationen verknüpfen lässt. Zum anderen wird geprüft, ob das reale Resultat die anfangs identifizierte Lücke schließen und damit die reale Problemstellung adäquat lösen kann (Blum & Niss, 1991; Niss et al., 2007, S. 9). Wenn dies nicht der Fall ist, muss der Modellierungskreislauf erneut durchlaufen werden oder zumindest müssen einzelne Schritte geprüft und modifiziert werden. Dieses Vorgehen wird so lange fortgesetzt, bis ein adäquates Resultat erzeugt wird, das die Lücke im Situationsmodell schließt.

Darlegen des Resultats

Auch wenn in der Regel bereits während des gesamten Modellierungsprozesses die einzelnen Schritte schriftlich festgehalten werden, so erfolgt zuletzt, nach erfolgreicher Validierung des realen Resultats, eine bewusste Darlegung der erarbeiteten Lösung. Diese Darlegung erfolgt meist durch Formulierung eines passenden Antwortsatzes zu der Fragestellung.

4.5 Modellieren im Mathematikunterricht

„Erst das Hin und Wieder zwischen Wissenschaft und Wirklichkeit in beiderlei Richtung erschöpft die Aufgabe, die im materialen Zweck der Mathematik liegt. Ebenso wichtig wie die Anwendung einer mathematischen Tatsache auf die Wirklichkeit, aber ungleich schwerer ist die Aufgabe, in der Wirklichkeit das mathematische Problem zu sehen."

(Lietzmann 1919, S. 66, zitiert nach Greefrath et al., 2013, S. 19)

Mit der Implementation der deutschlandweit gültigen Bildungsstandards durch die Kultusministerkonferenz im Jahr 2003 wurde dem bereits von Lietzman allgemein formulierten und von Winter (1996) speziell als Aufgabe des Mathematikunterrichts beschriebenen Ziel, die Schülerinnen und Schüler zum Umgang mit realweltlichen Phänomenen durch die Nutzung der Mathematik zu befähigen, Rechnung getragen. In der Einleitung der Bildungsstandards für die Sekundarstufe I heißt es: „Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht […]: technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen, und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen“ (Kultusministerkonferenz, 2004).

Hierin besteht jedoch nur eins von zahlreichen Zielen, die durch die Integration des mathematischen Modellierens in den Mathematikunterricht verfolgt werden. Greefrath, Kaiser, Blum et al. (2013, S. 20) unterscheiden drei Arten von Zielen: inhaltsorientierte, prozessbezogene und allgemeine Ziele. Das bereits genannte Ziel stellt das zentrale inhaltsbezogene Ziel mathematischen Modellierens im Mathematikunterricht dar. Unter den prozessbezogenen Zielen wird beispielsweise die Anwendung allgemeiner mathematischer Kompetenzen wie Problemlösefähigkeit, die Anwendung heuristischer Strategien, die Förderung des Kommunizierens und Argumentierens u.v.m. genannt. Die allgemeinen Ziele umfassen die Vermittlung eines ausgewogenen Bildes von Mathematik als Wissenschaft, die Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft und der demokratischen Gesellschaft, eine Erziehung zu einem verantwortungsvollen Gesellschaftsmitglied durch kritische Beurteilung von Modellen sowie die Vermittlung sozialer Kompetenzen durch gemeinsame Arbeit an Modellierungsproblemen.

Durch die Bildungsstandards – als bundesweite Grundlage der fachspezifischen Anforderungen – wurde der Begriff des „mathematischen Modellierens“ flächendeckend in das deutsche Schulsystem eingeführt und auch bei den Lehrkräften bekannt gemacht. Auch in den bundeslandspezifischen Lehrplänen findet sich das mathematische Modellieren wieder (z. B. Bayrisches Staatsministerium für Bildung und Kultus 2016; Freie und Hansestadt Hamburg/Behörde für Schule und Berufsbildung 2011; Niedersächsisches Kultusministerium 2012) sowie international in den Lehrplänen vieler Länder (z. B. Common Core State Standards Initiative 2010). In den deutschen Bildungsstandards wird das mathematische Modellieren als eine von sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Fach Mathematik ausgewiesen und wie folgt charakterisiert:

„Dazu gehört

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.“ (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 8).

Neben dieser Konkretisierung der Modellierungskompetenz für Schülerinnen und Schüler müssen zahlreiche weitere Dimensionen des Einsatzes mathematischer Modellierungen im Unterricht bedacht werden. Niss, Blum und Galbraith (2007, S. 13 f.) unterscheiden hier zwei Dimensionen: Domänen und Bildungsstufen. Die Domänen umfassen erstens Begriffe, Konzepte, Vorstellungen und das Verständnis mathematischen Modellierens; zweitens die Lernumgebung (Klassenraum, Peers, Planung der Lernaktivitäten usw.) und drittens die systembezogene Umgebung (politisch, strukturell, organisatorisch, finanziell usw.). Die Bildungsstufen sind Primarstufe, Sekundarstufe, Tertiärstufe und Lehramtsausbildung. Diese Dimensionen und Ausprägungen gilt es bei der Integration von mathematischen Modellierungsproblemen in den Mathematikunterricht zu beachten. Gleichzeitig bietet dieses zweidimensionale Raster die Möglichkeit, Forschungsthemen darin einzuordnen.

4.5.1 Die mathematische Modellierungskompetenz

Die Modellierungskompetenz ist ein Teil der *allgemeinen mathematischen Kompetenz*, wobei Kompetenzen im allgemeinen nach Weinert definiert wird als „die bei den Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (F. E. Weinert, 2014, S. 27 f.). Dieser Definition folgend umfasst die *mathematische Modellierungskompetenz* die „Fähigkeiten und Fertigkeiten, Modellierungsprozesse zielgerichtet und angemessen durchführen zu können sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten in Handlungen umzusetzen“ (Maaß, 2004, S. 35). In der mathematikdidaktischen Literatur existieren viele ähnliche, allgemeine Definitionen (Blum & Borromeo Ferri, 2009, S. 47; Maaß, 2010, S. 290; Niss et al., 2007, S. 11 f.), allerdings gibt es unterschiedliche Ausdifferenzierungen dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten. Dabei werden die folgenden Komponenten benannt:

(1) Fähigkeiten und Fertigkeiten zur *Ausführung der einzelnen Teilprozesse* des Modellierens, um ein Modell zu konstruieren (Kuntze, 2013a, S. 72; Maaß, 2010, S. 290; Niss et al., 2007, S. 11 f.), also z. B.

- relevante Fragen, Variablen, Beziehungen und Annahmen in einer gegebenen realen Situation zu identifizieren
- diese in die Mathematik zu übersetzen
- die mathematische Lösung in Bezug auf die gegebene Situation zu interpretieren und zu validieren

(2) Fähigkeiten und Fertigkeiten, um gegebene *Modelle zu analysieren* und vergleichend zu beurteilen (Niss et al., 2007, S. 11 f.):

(3) *metakognitive* Modellierungskompetenzen (Maaß 2010, S. 290)

(4) Kompetenzen zum *Argumentieren* in Bezug auf den Modellierungsprozess (um die Vorgehensweise erklären und begründen zu können) (Maaß 2010, S. 290)

(5) *Motivationale und volitionale Dispositionen* zur Ausführung der benannten Fähigkeiten und Fertigkeiten (Kuntze, 2013a, S. 72)

Während sich die ersten zwei Punkte auf den konkreten Umgang mit Modellen beziehen, stellen die Punkte (3) bis (5) übergeordnete Kompetenzen dar, die sich mit anderen Kompetenzbereichen (z. B. Argumentieren) überschneiden. Weitgehend herrscht Einigkeit darüber, dass der erste Aspekt, also die Ausführung der Modellierungsteilprozesse, die maßgebliche Komponente der Modellierungskompetenz darstellt, während die weiteren Punkte Ergänzungen verschiedener Autorinnen und Autoren sind, die sich in der mathematikdidaktischen Literatur finden. Teilweise werden diese als Subkompetenzen des mathematischen Modellierens, teilweise aber auch als isolierte Kompetenzen betrachtet, die einen Einfluss auf die Bearbeitung von Modellierungsproblemen haben. Die Auflistung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, da sich weitere modellierungsbezogene Kompetenzen ergänzen lassen, z. B. durch die Kompetenz des Darstellens der im Problem enthaltenen, mathematischen Objekte oder durch soziale Kompetenzen beim Lösen von Modellierungsproblemen in Gruppen usw. (Niss et al., 2007, S. 12). Insgesamt spiegelt die Auflistung die hohe Komplexität der Modellierungskompetenz wider, die sich – je nach Verständnis – aus zahlreichen Komponenten zusammensetzt bzw. mit zahlreichen Kompetenzbereichen in Zusammenhang steht.

4.5.2 Innermathematische Kompetenz als wesentlicher Einflussfaktor

Bei der Ausdifferenzierung der Modellierungskompetenz haben sich zahlreiche Überschneidungen mit weiteren mathematischen Kompetenzen gezeigt (vgl. Kapitel 4.5.1). Diese Überschneidungen verdeutlichen, dass sich verschiedene mathematische Kompetenzbereiche gegenseitig beeinflussen können. So ist beispielsweise denkbar, dass es Lernenden ausgehend von ihren innermathematischen Kenntnissen von Begriffen, Konzepten und Grundvorstellungen besser oder schlechter gelingt, adäquate Ansätze zur Modellentwicklung zu generieren. Genau dieser Zusammenhang hat sich bereits in verschiedenen, mathematikdidaktischen Studien gezeigt.

In einer Studie von Maaß (2004) zeigte sich beispielsweise, dass die mathematischen Kenntnisse bzw. Fähigkeiten einen Einfluss auf die Entwicklung der Modellierungskompetenzen haben. Auch eine empirischen Untersuchung von Leiss et al. (2010, S. 135) ergab, dass die innermathematische Kompetenz eine hohe, statistisch signifikante Varianzaufklärung der Modellierungskompetenz leistet. Aufgrund der offenbar hohen Relevanz innermathematischer Kompetenzen wird diese auch in der empirischen Untersuchung für die vorliegende Arbeit im Besonderen berücksichtigt.

4.5.3 Modellierungsaufgaben als Initiatoren von Modellierungsprozessen

Zur Initiierung von Modellierungsprozessen werden im Mathematikunterricht meist Modellierungsaufgaben eingesetzt. Überhaupt sind Aufgaben ein wesentliches Element im Mathematikunterricht und nehmen deshalb auch eine zentrale Rolle in der mathematikdidaktischen Forschung ein. Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Aufgabenformate mit Realitätsbezug, von denen jedoch nicht alle den Anspruch eines Modellierungsproblems erfüllen. In der Mathematikdidaktik finden sich verschiedene Kategoriensysteme *realitätsbezogener Aufgaben*, wobei in den Systemen unterschiedliche Bezeichnungen verwendet werden. Ein Vergleich der Kategorien wird zusätzlich dadurch erschwert, dass es sich bei jedem Kategoriensystem um ein Kontinuum handelt, auf dem die Aufgaben eingeordnet werden. Dennoch zeichnen sich in der mathematikdidaktischen Literatur drei Hauptkategorien ab, für die in der vorliegenden Arbeit die folgenden Bezeichnungen verwendet werden:

(1) eingekleidete Aufgaben

(2) Modellierungsaufgaben

(3) Anwendungsaufgaben

Zu (1): Eingekleidete Textaufgaben werden in der englischsprachigen Literatur als „word problems“ (z. B. Niss et al., 2007, S. 11 f.) und in der deutschen Forschung z.T. auch als „eingebettete Sachaufgaben“ bezeichnet (z. B. Kaiser, 1995). Dabei handelt es sich um simple, künstlich formulierte Aufgabenstellungen, bei denen der Sachkontext nicht relevant, sondern beliebig austauschbar ist (Greefrath et al., 2013, S. 23). Ihre Bezeichnung hat den Ursprung darin, dass dabei ein rein mathematisches Problem in realitätsbezogene Worte „eingekleidet“ wird (Niss et al., 2007, S. 11 f.). Zum Lösen der Aufgabe muss die eigentliche mathematische Aufgabe dann durch bloßes Weglassen der realitätsbezogenen Worte entkleidet werden. Das Ziel dieser Aufgaben besteht im Anwenden und Üben kalkülorientierter Rechenfertigkeiten (Greefrath et al., 2013, S. 23).

Zu (2): Beim zweiten Aufgabentyp handelt es sich um Modellierungsaufgaben, die zwar nicht von absolut realitätsgetreuen Problemstellungen ausgehen, die aber dennoch eine realitätsnahe Situation beschreiben, zu deren Lösung das Durchlaufen des Modellierungsprozesses notwendig ist (Verschaffel et al., 2020, S. 2). Bei diesem Aufgabentyp liegt der Schwerpunkt auf der Bildung des mathematischen Modells, das durch Strukturieren und Mathematisieren selbständig entwickelt wird, auf das anschließend mathematische Verfahren angewendet werden und das schließlich zu einer Lösung der Problemstellung führt (Niss et al., 2007, S. 12). Auch das Interpretieren und Darlegen sind Teilprozesse, die durch Modellierungsaufgaben initiiert werden (Niss et al., 2007, S. 12). Die Realität wird bei solchen Aufgaben allerdings nicht in seiner vollumfänglichen Komplexität dargestellt, sodass für die Lösung in der Regel die Anwendung *eines* mathematischen Verfahrens ausreichend ist. In den meisten Fällen laufen die Modellierungsprozesse, die durch diesen Aufgabentyp initiiert werden, linear ab.

Zu (3): Bei Anwendungsaufgaben steht die reale Situation im Vordergrund. Es werden reale Daten zur Verfügung gestellt, zu denen eine vollkommen authentische Fragestellung zu beantworten ist (Greefrath et al., 2013, S. 24). Die in den Aufgabenstellungen beschriebenen Sachverhalte stammen aus außermathematischen Bereichen und zur Lösung der Anwendungsaufgabe muss ein komplexes mathematisches Modell entwickelt werden, dass sich durch die Anwendung verschiedener mathematischer Verfahren auszeichnet. Aufgrund des hohen Stellenwertes der Realität bei diesem Aufgabentyp spielen die Prozesse des Verstehens, des Treffens von Annahmen, des Bewertens und Validierens hierbei eine besondere Rolle (Verschaffel et al., 2020, S. 2).

Jeder dieser Aufgabentypen hat im Mathematikunterricht seine Berechtigung und Funktion. Die Herausforderung besteht deshalb darin, je nach Lernvoraussetzungen und Zielsetzung einen geeigneten Aufgabentyp auszuwählen. Für die vorliegende Untersuchung wurden Modellierungsaufgaben als Initiatoren der Modellierungsprozesse ausgewählt, um ausreichend komplexe Lösungsprozesse zu initiieren, bei denen die Strategie des Skizzenzeichnens wirksam werden kann. Gleichzeitig sollte die Komplexität der Prozesse aber auch in einem gewissen Rahmen gehalten werden (anders als bei Anwendungen), um die Umsetzung und Auswertung der Studie zu ermöglichen.

4.6 Kognitive Hürden im Modellierungsprozess

In der PISA Studie der OECD 2022 hat sich – ähnlich wie in den Jahren zuvor (siehe OECD, 2014; Reiss, Weis, Klieme, & Köller, 2019) – gezeigt, dass gerade einmal neun Prozent der Fünfzehnjährigen im Bereich mathematischer Kompetenz die Kompetenzstufe V oder VI erreichten (Lewalter et al., 2022, S. 10). Demnach besitzen weniger als zehn Prozent der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler die Kompetenzen dafür, komplexe Problemstellungen zu lösen. Neben emotional und motivational bedingten Hindernissen oder mangelndem Interesse an realitätsbezogenen Modellierungsaufgaben seitens der Lernenden besteht eine der zentralen Ursachen für diese Ergebnisse darin, dass der Umgang mit komplexen, realitätsbezogenen Situationen besondere kognitive Herausforderungen mit sich bringt. Wie in Kapitel 4.4 beschrieben, setzt sich jeder Teilschritt des Modellierens wiederum aus verschiedenen kognitiven Teilprozessen zusammen, die jeweils potenzielle kognitive Barrieren im Lösungsprozess darstellen. Insbesondere das Bilden einer mentalen Repräsentation sowie die Konstruktion eines adäquaten mathematischen Modells scheinen für Lernende besonders herausfordernd zu sein (Leiss, Plath, & Schwippert, 2019; Verschaffel et al., 2020, S. 4).

4.6.1 Hürden beim Verstehen und Strukturieren

Beim Verstehen und Strukturieren der Situationsbeschreibung können sprachlich oder repräsentationsbedingte Hürden sowie Einschränkungen hinsichtlich des Arbeitsgedächtnisses oder des Vorwissens auftreten, die das Aufstellen eines adäquaten Situations- bzw. Realmodells erschweren (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147). Im ersten Schritt muss der Aufgabentext dekodiert werden, um die externe, symbolische Textform in eine interne, propositionale Textbasis zu überführen (Schnotz & Bannert, 2003, S. 145). Je nach Ausbildung der Lesekompetenz und der (bildungs-)sprachlichen Kompetenz der Lernenden kann bereits dieser erste Schritt große Schwierigkeiten bereiten. Vor allem der Strukturwortschatz (Präpositionen und Komposita) sowie Verbformen und Satzverbindungen stellen häufige Verstehenshürden dar (Prediger, 2013, S. 30). Können die Lernenden einzelne Textabschnitte oder Wörter nicht verstehen, so fehlt die Grundlage dafür, die Textinhalte weiter zu verarbeiten. Ein falsches oder oberflächliches Situationsmodell ist dann häufig die Folge (Prediger, 2013, S. 26 ff.). Bei hierarchieniedrigen Prozessen wie dem Dekodieren des Textes treten hingegen seltener Schwierigkeiten auf – vor allem mit zunehmendem Alter, da die Wortverarbeitung dann weitgehend automatisiert abläuft (Sturm, 2018, S. 36 f.).

Deutlich häufiger treten Schwierigkeiten bei hierarchiehöheren Abläufen wie Such-, Erkennungsprozessen sowie beim Bilden von Inferenzen auf (Stephany, 2018, S. 79 f.). Insbesondere bei der Bearbeitung komplexer Modellierungssituationen reicht das Dekodieren von Textbausteinen nicht aus. Vielmehr müssen die wesentlichen Informationen identifiziert, Sinnzusammenhänge erkannt und mit bestehendem Wissen verknüpft werden (Stephany, 2018, S. 79 f.). Bei der Identifikation strukturrelevanter Sinneinheiten aus der Aufgabenstellung konzentrieren sich Lernende häufig auf die Oberflächenmerkmale (z. B. entnehmen sie sämtliche Zahlenwerte unabhängig von ihrer Relevanz), anstatt auf die sinngebenden Tiefenstrukturen zu achten. Aus den entnommenen Sinneinheiten müssen wiederum die lösungsrelevanten Elemente – d. h. Objekte, Relationen und Zahlenwerte – selektiert und miteinander verknüpft werden (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147). Auf Grundlage der entstandenen Informationsbasis werden schließlich Inferenzen hergestellt, wobei Schwierigkeiten darin liegen können, dass Lernende nicht wissen, *wann* sie Inferenzen herstellen müssen oder *wie* sie die Informationen verknüpfen müssen, um geeignete Schlussfolgerungen ziehen zu können (Stephany, 2018, S. S. 82 ff.). Wenn die Lernenden sich auf irrelevante Informationen fokussieren oder diese falsch deuten, können lösungsunterstützende Handlungsschemata nicht aktiviert werden und es ist ein hoher kognitiver Mehraufwand nötig, um Lücken oder Fehler im mentalen Modell zu kompensieren (Sturm, 2018, S. 36).

Eine geringe Kapazität des Arbeitsgedächtnisses kann den Aufbau des Situations- und Realmodells erschweren, indem die Lernenden weniger Informationselemente zeitgleich zur Verarbeitung bereithalten und miteinander verknüpfen können (Stephany, 2018, S. 88 f.). Es wird angenommen, dass das Arbeitsgedächtnis aus verschiedenen Komponenten besteht, wobei vor allem die Ausbildung der ‚phonologischen Schleife‘ sowie der ‚zentralen Exekutive‘ für die Qualität des Textverstehens wesentlich sind. Verbale Informationen werden in der phonologischen Schleife kurzzeitig zwischengespeichert. Anschließend steuert die zentrale Exekutive die Verarbeitung der neuen Informationen, die Aktivierung des Vorwissens sowie die integrativen Prozesse. Wenn die genannten Komponenten weniger gut ausgebildet sind – was nicht nur bei jüngeren Lernenden, sondern unabhängig von der Entwicklung auftritt – können die Textverstehensprozesse demnach große Schwierigkeiten bereiten (Stephany, 2018, S. 88 f.)

Das deutet bereits auf den nächsten Faktor hin, denn auch Vorerfahrungen und Vorwissen sind Faktoren, die den Verstehensprozess bedingen. Die Lernenden unterscheiden sich in ihrer Fähigkeit, adäquates Vorwissen zu aktivieren und geeignete Verknüpfungen zu der gegebenen Problemstellung herzustellen (Sturm, 2018, S. 38 f.). Wenn das Vorwissen zu gering ist, wird die Bedeutung einzelner Wörter zwar im assoziativen Netzwerk aktiviert, aber die Informationen werden nicht zu einer Gesamtheit zusammengefügt, die in das Langzeitgedächtnis aufgenommen werden könnte (Stephany, 2018, S. 86 f.). Weiterhin entstehen Schwierigkeiten durch falsche vereinfachende Annahmen und in der Folge ein ungeeignetes Realmodell (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147; Maaß, 2007). Da das durch den Prozess des Textverstehens konstruierte Realmodell die Ausgangsbasis für den Modellierungsprozess darstellt, ist die Überwindung der potenziellen kognitiven Hürden beim Aufstellen des Realmodells besonders entscheidend für die weitere Bewältigung des Lösungsprozesses.

4.6.2 Hürden beim Mathematisieren

Beim Aufstellen des mathematischen Modells besteht eine Schwierigkeit darin, dass die zuvor identifizierten strukturellen Einheiten in mathematische Einheiten übersetzt werden müssen. Die Einheiten müssen in mathematische Beziehungen zueinander gesetzt werden sowie geeignete mathematische Darstellungsformen und Schreibweisen dafür gefunden bzw. entworfen werden (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147; Maaß, 2007, S. 33–36). Lernende haben häufig Schwierigkeiten dabei, geeignete mathematische Verfahren und Algorithmen auszuwählen und ggf. weitere vereinfachende Annahmen zu treffen, um den Einsatz der mathematischen Verfahren zu ermöglichen (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147; Maaß, 2007, S. 33–36). Schwierigkeiten oder Fehler können auch dadurch entstehen, dass falsche Algorithmen zur Bearbeitung der gegebenen Problemstellung ausgewählt werden. Häufig wird das mathematische Modell durch eine inadäquate Schreibweise falsch aufgestellt und dann entsprechend falsch weiterverwendet (z. B. durch falsche Verwendung des Gleichheitszeichens oder von Variablen) (Maaß, 2007, S. 33–36).

Bei einer Untersuchung von Hasemann & Stern (2002) wurde deutlich, dass die Schwierigkeiten bei Textaufgaben weniger von der sprachlichen und inhaltlichen Komplexität der Aufgaben abhängen, sondern vielmehr dadurch bedingt sind, wie leicht oder schwer sich ein mathematisches Modell für eine bestimmte Problemsituation bilden lässt. Aus kognitionspsychologischer Perspektive liegt die besondere Hürde demnach darin, mit dem bestehenden Vorwissen adäquate mentale Modelle zu bilden und Verknüpfungen mit geeigneten symbolischen Darstellungen herzustellen (Hasemann & Stern, 2002, S. 222). Diese Verknüpfungen sind jedoch entscheidend dafür, dass die mathematischen Rechnungen und Verfahrensweisen Sinnhaftigkeit erlangen. Insofern sollten künftige Untersuchungen und Trainings vor allem darauf ausgerichtet sein, die Verknüpfungen zwischen realer Situation, mentalen Modellen und symbolischen Repräsentationen zu stärken (Hasemann & Stern, 2002, S. 223).

4.6.3 Hürden beim mathematischen Arbeiten, Interpretieren und Validieren

Weitere kognitive Hürden ergeben sich bei der Arbeit innerhalb des mathematischen Modells. Die Zahlenwerte müssen korrekt in die Algorithmen eingesetzt und anschließend alle Schritte korrekt ausgeführt werden (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147). Ggf. müssen hilfreiche Heurismen ausgewählt und korrekt angewendet werden (Maaß, 2007, S. 33–36). Dabei kommen zahlreiche mathematische Grundvorstellungen, Rechenarten und Regeln zum Einsatz, die jeweils mögliche kognitive Barrieren im Lösungsprozess darstellen können.

Bei der Interpretation der mathematischen Lösung in Bezug auf den realitätsbezogenen Kontext besteht die Hauptfehlerquelle darin, dass die Lernenden falsche oder gar keine Inferenzen zwischen dem mathematischen Resultat und dem realitätsbezogenen Kontext herstellen können (Maaß, 2007, S. 33–36). Das vorläufige mathematische Rechenergebnis muss für eine adäquate Interpretation vor dem Hintergrund der realitätsbezogenen Informationen analysiert und ggf. angepasst werden (Galbraith & Stillman, 2006, S. 147). Je nach Kontext ist es sinnvoll, beispielsweise das mathematisch exakte Ergebnis zu runden. Dabei können die zuvor festgelegten, mathematischen Restriktionen je nach Kontext wieder gelockert werden. Wenn z. B. für die Anwendung eines mathematischen Modells vereinfachend angenommen wird, dass eine Strecke vollständig geradlinig verläuft, kann es sinnvoll sein, die exakte mathematische Lösung unabhängig von den mathematischen Rundungsregeln aufzurunden, da die Strecke in der Realität nicht exakt geradlinig ist.

Der Prozess des Validierens erfordert eine kritische Reflexion des Ergebnisses, wobei diese häufig vollständig ausbleibt oder nur oberflächlich durchgeführt wird, z. B. indem festgestellt wird, dass das Ergebnis ungenau ist (Maaß, 2007, S. 33–36). Teilweise wird auch erkannt, dass das gewählte Modell zur Bearbeitung der Problemstellung inadäquat war, aber es werden keine Verbesserungen vorgenommen (Maaß, 2007, S. 33–36). Zur Validierung des Ergebnisses muss zunächst ein Abgleich zwischen dem realen Resultat und der ursprünglichen Ausgangssituation vorgenommen werden. Eine weitere Schwierigkeit kann dabei darin bestehen, zu entscheiden, ob das Ergebnis plausibel ist oder von den Erwartungen abweicht. Wenn das Ergebnis inadäquat erscheint, muss die Ursache der Abweichung untersucht werden und gegebenenfalls eine Anpassung der vereinfachenden Annahmen und/oder des mathematischen Modells vorgenommen werden.

4.7 Der Einsatz von Strategien beim mathematischen Modellieren

Die hohe Komplexität des mathematischen Modellierens und die vielfältigen Schwierigkeiten, die beim Bewältigen von Modellierungsaufgaben auftreten können, verdeutlichen die Notwendigkeit, Lernenden Unterstützungsmöglichkeiten zu bieten. Eine besondere Möglichkeit stellt die Kultivierung interner Ressourcen der Lernenden dar, indem die Lernenden ihr Wissen und ihre Fähigkeiten bei der Anwendung von Strategien weiterentwickeln (Pólya, 1967; Schoenfeld, 1992; Verschaffel et al., 2020, S. 5 f.). Strategien können häufig inhaltsübergreifend eingesetzt werden und können zur Überwindung kognitiver Hürden im

Modellierungsprozess beitragen (Galbraith & Stillman, 2006; Schukajlow, 2011). Ein besonderer Vorteil der Strategienutzung besteht darin, dass die Lernenden diese eigenständig und adaptiv einsetzen können. Dies steht im Einklang mit der *Generativen Theorie des Lernens* nach Wittrock (M. C. Wittrock & Farley, 2010), die beinhaltet, dass Lernende ihre Lernprozesse aktiv und konstruktiv gestalten.

Lernstrategien werden in Anlehnung an Weinstein und Mayer (1986) definiert als „jene Verhaltensweisen und Gedanken, die Lernende aktivieren, um ihre Motivation und Prozesse des Wissenserwerbs zu beeinflussen und zu steuern" (Friedrich & Mandl, 2006, S. 1). Aus dem Bereich der Selbstregulationsforschung hat sich eine Kategorisierung von Lernstrategien etabliert, die zudem empirisch gut belegt werden konnte: eine Ausdifferenzierung in ***kognitive***, ***metakognitive*** und ***ressourcenbezogene*** Strategien (Pintrich, 1999, S. 460 ff.; Weinstein & Mayer, 1986). Während sich kognitive Strategien unmittelbar auf den zu erlernenden Inhalt beziehen (d. h. die Informationsaufnahme, -verarbeitung und -speicherung), zielen metakognitive Strategien auf die Überwachung und Steuerung des Arbeits- bzw. Lernprozesses ab und ressourcenbezogene Strategien beinhalten Maßnahmen bezüglich der Lernkontextbedingungen (Weinstein & Mayer, 1986). Auch wenn sich Lernstrategien ursprünglich auf die Vorgänge bei der Aneignung neuen Wissens beziehen, sind sie gut auf die Vorgänge beim Lösen von Modellierungsproblemen übertragbar (z. B. Schukajlow & Leiss, 2011).

Kognitive Strategien werden weiter unterteilt in Wiederholungs-, Organisations- und Elaborationsstrategien. ***Wiederholungsstrategien***, wie z. B. das Anfertigen von Notizen, Unterstreichen relevanter Aspekte oder wiederholtes Lesen, sind vor allem beim Verstehen von Textinhalten hilfreich und können zur Überwindung von Schwierigkeiten beim Dekodieren von Textteilen, aber auch bei Such- und Erkennungsprozessen beitragen. ***Organisationsstrategien*** kommen vor allem bei der Selektion und Strukturierung der relevanten Informationen zum Einsatz, indem die Informationen gegliedert oder neu angeordnet werden (z. B. durch Gliederung in Abschnitte oder Entwurf einer Concept Map) oder in eine andere Modalität übersetzt werden (z. B. durch Zeichnen einer Skizze zur Problemsituation). Zwar unterstützen auch Wiederholungsstrategien Such- und Erkennungsprozesse, allerdings sind Organisationsstrategien dafür in besonderem Maße geeignet, indem sie lokalisierte Gruppierungen ermöglichen und den Bedarf an symbolischen Notationen reduzieren (Larkin & Simon, 1987, S. 67). Darüber hinaus unterstützen Organisationsstrategien wahrnehmungsbezogene Inferenzen, die für Lernende meist einfacher zu verarbeiten sind als informationsäquivalente symbolische Inferenzen (Larkin & Simon, 1987, S. 67 f.). Schwierigkeiten bei der Selektion und Integration neuer Informationen können auf diese Weise erfolgreich kompensiert werden. Auch der Mathematisierungsprozess kann durch den Einsatz von Organisationsstrategien erleichtert werden, indem durch die Neustrukturierung mathematische Zusammenhänge in Erscheinung treten und durch die Reduzierung eine Übersetzung in mathematische Darstellungsformen begünstigt wird. ***Elaborationsstrategien*** sind hingegen darauf ausgerichtet, die neuen Informationen in das bestehende Vorwissen zu integrieren und durch tiefe semantische Verarbeitungsprozesse zu verinnerlichen (Friedrich & Mandl, 2006, S. 2–5). So kann z. B. das

Gelernte in eigenen Worten reformuliert werden oder praktische Beispiele für das Gelernte gefunden werden.

Eine Besonderheit der kognitiven Strategien[21] besteht darin, dass eine Verbesserung im Rahmen kurzfristiger Interventionen möglich ist und damit schnelle Lernerfolge erzielt werden können (Schukajlow et al., 2015, S. 1242; Weinstein & Mayer, 1986). Gleichzeitig ist durch das Erlernen kognitiver Strategien eine längerfristige Einflussnahme auf das Lösungsverhalten möglich, als wenn beispielsweise ressourcenbezogene Strategien angewendet werden. Dennoch kann der Einsatz bzw. das Erlernen von kognitiven Strategien auch Schwierigkeiten mit sich bringen, da der Einsatz von Strategien häufig auf das schnelle Erreichen des Lernziels und weniger auf ein tiefgreifendes Verständnis abzielt (Greefrath, 2015, S. 178). Außerdem handelt es sich um zusätzlichen Lernstoff, der Gedächtniskapazitäten bindet, wenn Lernende sich eine Strategie aneignen müssen (Greefrath, 2015, S. 178). Insofern sollte die Wirksamkeit einer Strategie empirisch belegt und ihre Funktionsweise differenziert untersucht sein, um sie den Lernenden als sinnvolle Unterstützungsmöglichkeit anbieten zu können.

In empirischen Studien zum Leseverstehen und zum mathematischen Problemlösen ist der Zusammenhang zwischen Strategieanwendung und Leistung bisher uneinheitlich und reicht von positiven über ausbleibende bis hin zu negativen Effekten (Greer & Verschaffel, 2007; Hembree, 1992; Leopold & Leutner, 2015; Schoenfeld, 1992). Diese Diskrepanzen konnten bisher nicht hinreichend erklärt werden. Insgesamt macht die Vielfältigkeit der Ergebnisse deutlich, dass der Einsatz von Strategien keinen Lern- oder Lösungserfolg *garantiert*. Dennoch kann die Strategieverwendung ein planvolles und reflektives Vorgehen beim Lernen anregen (Pólya, 1967; Schoenfeld, 1992).

Unter verschiedenen kognitiven Strategien hat sich das Erstellen grafischer Darstellungen als besonders wirksam erwiesen (Hembree, 1992; Larkin & Simon, 1987; Schoenfeld, 1992). Auch wenn das Skizzenzeichnen je nach Implementierung zu verschiedenen Zwecken genutzt wird, kann es im Allgemeinen als Strategie verstanden werden, da es folgende definitorische Kriterien einer Strategie erfüllt: es handelt sich um eine Verhaltensweise, die Lernende aktiv einsetzen, um ihren Lernprozess zu strukturieren und zu unterstützen (Friedrich & Mandl, 2006, S. 2; Van Meter & Garner, 2005, S. 287). Durch das Zeichnen einer Skizze werden kognitive Prozesse initiiert, die zur Lösung von Modellierungsproblemen beitragen können (vgl. Kapitel 3.2.2 und 4.8). Die Strategie ist in dem vorgestellten Kategoriensystem sowohl bei *Organisations*- als auch *Elaborationsstrategien* einzuordnen, da beim Zeichnen der Darstellung einerseits die vorliegenden Informationen geordnet und miteinander verknüpft werden (Organisation), andererseits werden die Informationen aber notwendigerweise auch tiefenstrukturell verarbeitet, da eine Übersetzung in die depiktionale Modalität kaum ohne Aktivierung und Integration in das Vorwissen möglich ist.

[21] Da der Schwerpunkt der Arbeit auf der Strategie des Skizzenzeichnens (als kognitive Strategie) liegt, wird hier auf detaillierte Ausführungen zu metakognitiven und ressourcenbezogenen Strategien verzichtet. Umfassende Erläuterungen dazu sind bei Weinstein & Mayer (1986) zu finden.

Die Meta-Analyse von Hembree (1992) ergab, dass ein Training im Erstellen von Diagrammen im Vergleich zu anderen kognitiven Strategietrainings wie Rate- und Teststrategie, Verbalisierung von Konzepten usw. die größte positive Wirkung auf die Problemlöseleistung hat. Im Bereich des Textverstehens kamen Leopold & Leutner (2015) zu dem Ergebnis, dass das Markieren im Text sowie die Mapping-Strategie (Erstellen einer Concept Map) allein – ohne den zusätzlichen Einsatz metakognitiver Strategien – keinen bzw. sogar einen negativen Effekt haben, während die Verwendung von Visualisierungen eine Verbesserung des Textverstehens bewirkte. Eine empirische Analyse der Strategieanwendung von Schülerinnen und Schülern beim Bearbeiten mathematischer Modellierungsaufgaben zu den Themen *Satz des Pythagoras* und *Lineare Funktionen* von Schukajlow (2011) erwies ebenfalls, dass das Zeichnen einer Skizze eine vielversprechende Lösungsstrategie darstellt. Vor allem bei Problemsituationen mit räumlicher Struktur nutzen Lernende häufig eine selbst erstellte Visualisierung, um die Aufgabe leichter verstehen und/ oder die mathematischen Strukturen besser erkennen zu können (Schukajlow, 2011, S. 195 ff.).

4.8 Skizzenzeichnen im Modellierungsprozess

Verschiedene theoretische und empirische Studien haben gezeigt, dass das Skizzenzeichnen den Modellierungsprozess in vielfältiger Weise unterstützen kann. Einige Erkenntnisse stammen aus der Problemlöse- und Leseforschung, können aber zur Erklärung der Wirkungsweise des Skizzenzeichnens beim Bearbeiten mathematischer Modellierungsprobleme genutzt werden. Erste empirische Ergebnisse speziell zum Zeichnen von Skizzen beim mathematischen Modellieren stützen diese Erklärungen, allerdings sind die Ergebnisse bisher sehr spezifisch und der Umfang ihrer Gültigkeit bleibt zu überprüfen.

4.8.1 Skizzen beim Verstehen und Strukturieren

In der ersten Phase des Modellierens, der Verstehensphase, wird durch das Suchen und Erkennen der lösungsrelevanten Informationen und durch die Verknüpfung mit dem Vorwissen ein mentales Modell der Situation konstruiert. Das Zeichnen einer Skizze kann bei der Informationsauswahl hilfreich sein, indem die ***Identifikation lösungsrelevanter Objekte und Relationen*** unterstützt wird, um eine kohärente, lösungsunterstützende Darstellung zu erhalten (Rellensmann, 2019, S. 252). Beispielsweise Cox (1999, S. 348) hat festgestellt, dass das aktive Erstellen externer Repräsentationen gegenüber der Argumentation mit vorgegebenen Darstellungen ein besonderes Potenzial hat, die Aufmerksamkeit auf lösungsrelevante sowie ungelöste Aspekte eines Problems zu lenken. Das Ziel dieses Prozesses besteht vor allem darin, die spezifischen lösungskritischen Merkmale einer Aufgabe herauszuarbeiten (Reuter, 2016, S. 49).

Ein weiterer Aspekt des *Generierungseffektes* (Schmidgall et al., 2019, S. 139) besteht darin, dass durch das aktive Erstellen der Skizze implizites ***Vorwissen aktiviert*** wird, das dazu genutzt werden kann, noch nicht zusammenhängende Informationen zu integrieren (siehe auch: Cox, 1999, S. 359; Larkin & Simon, 1987, S. 91). Insbesondere Lernschwächeren fällt es vermutlich leichter, ihr Vorwissen in einer informellen Skizze darzustellen, als es unmittelbar in ein formales Modell zu überführen (Leenaars et al., 2013, S. 84 f.).

Darüber hinaus können das selbständige Generieren der Skizze sowie die Übersetzung vom verbalen in das bildliche Format die Lernenden in die Lage versetzen, ihre ***Aufmerksamkeit stärker auf die Semantik*** der vorliegenden Informationen zu richten und auf diese Weise ein tieferes Verständnis zu erlangen (R. Cox, 1999, S. 359; Van Essen & Hamaker, 1990, S. 302 f.). „During model construction, learners often have problems using the model as a tool for understanding as opposed to an artefact that has to "work,"" (Leenaars et al., 2013, S. 84). Durch das Zeichnen der Skizze kann diese vorschnelle Übersetzung in ein Modell als Artefakt vermieden werden und die Lernenden können sich stärker auf die semantischen Beziehungen konzentrieren. Anstatt Zahlen als abstrakte Einheiten zu verstehen, tritt durch das Zeichnen die Bedeutung der Zahlen in den Vordergrund (Lopez Real & Veloo, 1993, S. 175) und im Text beschriebene Handlungen werden durch die Darstellung der räumlichen Strukturen leichter nachvollziehbar (Schukajlow, 2011, S. 195). Nunokawa beschreibt dies als zyklische Prozesse, „through which the solver's understanding of the problem situations and his way of interacting with drawings varied each other" (Nunokawa, 2006, S. 33).

Beim Verstehensprozess werden die Informationen zunächst in das Arbeitsgedächtnis aufgenommen. Wie bereits in Kapitel 3.2.2 ausführlich beschrieben, kann das Zeichnen einer Skizze dazu beitragen, durch die Übersetzung in das visuelle Format die Belastung des Arbeitsgedächtnisses zu verringern, indem sich die kognitiven Prozesse auf die zwei verschiedenen Komponenten – den verbalen und den bildlichen Kanal – aufteilen (R. Cox, 1999, S. 348). Somit steht eine ***höhere Arbeitsgedächtniskapazität*** für den Verstehensprozess (und ggf. auch die darauffolgenden Prozesse) beim Modellieren zur Verfügung.

Die Belastung des Arbeitsgedächtnisses kann zusätzlich dadurch verringert werden, dass die räumliche Anordnung der Informationen in der Skizze ***Suchprozesse erleichtert*** (R. Cox, 1999, S. 348; Larkin & Simon, 1987, S. 69, 92 f.). Häufig beinhaltet ein Suchprozess die Identifizierung mehrerer Attribute eines Objekts (z. B. die Leiter ist auf dem Dach des Feuerwehrautos angebracht und die Leiter reicht bis an das Haus). Während zusammengehörige Informationen in einem Text über mehrere Textstellen verteilt sein können und somit die vollständige Datenmenge oder zumindest eine größere Menge an Daten nach bestimmten Informationen durchsucht werden muss, findet die Speicherung von zusammengehörigen Informationen in der Skizze an einem Ort bzw. in der räumlichen Nähe des Ortes statt (Larkin & Simon, 1987, S. 91 f.). Lernende können sich anhand der Skizze leichter einen Überblick über die Situation verschaffen (Leenaars et al., 2013, S. 84 f.) und effektiver nach Informationen suchen, da die Gruppierung und Zusammenfassung von Informationen durch das Skizzenzeichnen begünstigt wird (Larkin & Simon, 1987, S. 98). Deshalb ist anzunehmen, dass der kognitive Aufwand für die Suche nach Informationen in einer Skizze deutlich geringer ist als bei der Informationssuche im Text (R. Cox, 1999, S. 348).

Das Zeichnen einer Skizze kann den Verstehensprozess beim Modellieren auch insofern beeinflussen, dass die ***Bildung des mentalen Modells*** der Situation unterstützt wird (Ainsworth & Th Loizou, 2003, S. 16; R. Cox, 1999, S. 347). Zum einen wird das Bilden des mentalen Modells gewissermaßen erzwungen, indem wesentliche Elemente und Zusammenhänge erschlossen sein müssen, um die Skizze erstellen zu können (R. Cox, 1999, S. 347; Fiorella & Zhang, 2018, S. 1118 f.; Van Meter & Garner, 2005, S. 317). Zum anderen kann die Skizze als Gerüst bei der Konstruktion des mentalen Modells dienen, indem sie als externer Speicher das Arbeitsgedächtnis entlastet und durch wechselseitige Bottom-up- und Top-down-Prozesse zwischen der internen und externen Repräsentation zur Verfeinerung und Konkretisierung des mentalen Modells beiträgt (R. Cox, 1999, S. 348; Saß, Schütte, & Lindner, 2017, S. 86): Die externe Repräsentation „helps to turn one's initial internal representation into an external stimulus which, upon re-processing, assists with finding a solution." (R. Cox, 1999, S. 353)[22] Auch die Aktivierung sowohl des verbalen als auch des bildlichen kognitiven Systems durch die Externalisierung in Form einer Skizze kann dazu beitragen, den Informationsaustausch zwischen den verschiedenen kognitiven Systemen anzuregen und so die Bildung des mentalen Modells zu fördern.

Grafische Darstellungen zeichnen sich gegenüber sprachlichen dadurch aus, dass sie hinsichtlich des darstellbaren Abstraktionsgrades eingeschränkt sind und eine stärkere Konkretisierung erfordern (Stenning & Oberlander, 1995). Während z. B. eine verbale Beschreibung lauten kann „Ein Löffel liegt in der Brotdose.", müssen in einer Skizze sowohl Eigenschaften als auch Relationen spezifiziert werden: z. B. die Beschaffenheit der Brotdose (eckig/ rund), die Beschaffenheit des Löffels, die Position des Löffels in der Brotdose. Die begrenzte Mehrdeutigkeit schränkt die Interpretation einer Situation ein und fördert auf diese Weise die kognitive Verarbeitung sowie das Ziehen von Schlussfolgerungen (Stenning & Oberlander, 1995, S. 108).

Insbesondere beim Strukturieren kann diese Konkretisierung mit Hilfe der Skizze dazu beitragen, ***fehlende oder implizite Informationen zu erkennen*** (R. Cox, 1999, S. 353 f.; Larkin & Simon, 1987, S. 91 f.). Vor allem topologische und geometrische Informationen, die im Text nicht konkret beschrieben werden, können beim Skizzenzeichnen explizit werden. Wenn man in einen Text eine Information einfügt, wird der Text meist schnell sehr komplex, während das Hinzufügen von Informationen in einer grafischen Darstellung deutlich einfacher möglich ist bzw. sogar automatisch geschieht, indem z. B. zwei Objekte notwendigerweise in einer bestimmten Relation oder mit bestimmten Eigenschaften dargestellt werden müssen. Durch die explizitere Informationsdarstellung in der Skizze werden laut Larkin & Simon (1987, S. 70) somit Erkenntnisprozesse unterstützt, da die menschliche Fähigkeit, Informationen zu erkennen, stark von der Explizitheit der Darstellungsform abhängt.

[22] Die Wirkung der Skizzen bei der Bildung des mentalen Modells wird im Rahmen der Darstellung der kognitionspsychologischen Theorien Kapitel 3.2 detailliert beschrieben.

Das Skizzenzeichnen kann beim Strukturieren auch unterstützend wirken, indem die als lösungsrelevant erachteten Elemente entsprechend der im Text formulierten Verknüpfungen in der Skizze positioniert werden (Rellensmann, 2019, S. 252). Durch die Neuordnung der Informationen können ***Muster und Strukturen hergestellt, erkannt und verfeinert*** werden, die für die Lösung der Modellierungsaufgabe nützlich sind (R. Cox, 1999, S. 348; Van Essen & Hamaker, 1990, S. 302).

Während des Strukturierungsprozesses kann das Skizzenzeichnen weiterhin dazu dienen, spezifische ***Lücken und Inkonsistenzen in den Informationen bzw. dem dazu aufgebauten mentalen Modell aufzudecken*** (Fiorella & Zhang, 2018, S. 1133). Wissenslücken beim Zeichnen einer Skizze zu verbergen ist deutlich schwieriger, als wenn z. B. Notizen angefertigt werden, da bei letzterer Strategie leicht Informationen weggelassen werden können, während das Erstellen einer kohärenten Skizze kaum möglich ist (Hellenbrand, 2018, S. 24; Van Meter & Firetto, 2013, S. 259). Durch das Skizzenzeichnen können Lernende darauf stoßen, dass das mentale Modell an bestimmten Stellen Fehler oder Ungenauigkeiten aufweist. Bei verbalen Darstellungen können Ungenauigkeiten und Lücken dagegen durch abstrakte Formulierungen umgangen werden (R. Cox, 1999, S. 350).

Auch das ***Ziehen von Schlussfolgerungen*** wird durch das Zeichnen einer Skizze vermutlich erleichtert, da die komplexen Verknüpfungen in Modellierungssituationen durch die explizitere Informationsdarstellung in Form der Skizze schneller verarbeitet werden können (Koedinger & Terao, 2002, S. 545; Larkin & Simon, 1987). Zwar könnten dieselben Informationen auch aus textartigen Darstellungen wie dem Aufgabentext abgeleitet werden, allerdings sind die Inferenzprozesse hier herausfordernder, da sich besonders implizite Informationen nicht so leicht identifizieren und verarbeiten lassen (Larkin & Simon, 1987, S. 71).

Cox stellt außerdem fest, dass „graphical ERs, by their limited ability to express abstraction, may provide more salient and vivid feedback to a comprehension-monitoring, self-explaining student than ‘self-talk’ in the linguistic modality.“[23] (R. Cox, 1999, S. 352). Demnach scheint das Zeichnen von Skizzen auch ein besonderes Potenzial zu bieten, um den ***Verstehens- und Strukturierungsprozess zu überwachen***, da die Lernenden durch die konkrete Darstellung in Form der Skizze ein anschauliches Feedback zu ihren bereits bewältigten Schritten erhalten.

4.8.2 Skizzen beim Mathematisieren

Im Mathematisierungsprozess werden anhand des mentalen Modells der Situation mathematische Strukturen und Objekte identifiziert, die eine Anwendung mathematischer Verfahren ermöglichen. Dabei können die Lernenden die Skizze als ***Explorationsinstrument*** nutzen, um die Modellierungssituation im Hinblick auf mathematische Objekte und Relationen zu erkunden (Rellensmann, 2019, S. 252; Stylianou, 2011, S. 277). In der Skizze können unerwartete Kombinationen und Konfigurationen von Elementen entstehen, durch die mathematische

[23] ER = external representations

Zusammenhänge offenbar werden (Nunokawa, 2006, S. 33). Auf diese Weise kann das Erstellen einer Skizze zu einer Erweiterung des Verstehenskontextes beitragen und verschiedene mögliche mathematische Modelle aufzeigen (R. Cox, 1999, S. 353).

Auch zur ***Einführung der mathematischen Notationen und Rechenverfahren*** kann die Skizze beim Mathematisieren genutzt werden, indem sie mit Zahlenwerten und Variablen beschriftet wird und passende mathematische Gleichungen (wie z. B. die Flächeninhaltsformel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks) aufgestellt werden (Rellensmann, 2019, S. 252).

Auch die ***Entlastungsfunktion*** sowie die ***Überwachung des Lösungsprozesses*** durch das Skizzenzeichnen können beim Mathematisieren zum Tragen kommen, indem durch die Skizze ein externer Speicher geschaffen wird (Van Essen & Hamaker, 1990, S. 302), in dem die bereits durchgeführten Mathematisierungen festgehalten werden. Somit werden die begrenzten kognitiven Ressourcen für sinnstiftende Aktivitäten, wie die korrekte Einführung der mathematischen Notationen und Verfahren, freigegeben (Ainsworth & Th Loizou, 2003, S. 685). Zwar kann der Entlastungseffekt während des gesamten Modellierungsprozesses zum Tragen kommen, allerdings ist zu erwarten, dass er beim Mathematisierungsprozess aufgrund des hohen kognitiven Anspruches besonders wirksam ist.

4.8.3 Skizzen beim mathematischen Arbeiten, Interpretieren und Validieren

Nach der Konstruktion des mathematischen Modells folgen die Berechnungen und Anwendungen mathematischer Verfahren innerhalb des mathematischen Modells, um letztlich ein mathematisches Resultat zu erhalten. Van Essen & Hamaker (1990, S. 302 f.) postulieren, dass die Aktivität des Skizzenzeichnens auch eine Strategie sein kann, um die Aufgabe auszuarbeiten, da eine korrekte depiktionale Darstellung der quantitativen Zusammenhänge häufig schon eine Lösung für ein Problem liefert. Auch Stylianou (2011, S. 265) hat festgestellt, dass eine selbst erstellte Skizze als ***Berechnungswerkzeug*** dienen kann, das durch zielgerichteten Einsatz zum mathematischen Resultat führt.

Abgesehen von der Nutzung als Berechnungswerkzeug kann eine selbst erstellte Skizze auch dazu nützlich sein, die ***mathematischen Verfahrensschritte aufzuzeichnen*** oder zumindest visuell zu unterstützen, indem z. B. Umformungsschritte anhand der Skizze nachvollzogen werden können (Koedinger & Terao, 2002, S. 542). Die Skizze dient in diesem Fall als Aufzeichnungswerkzeug, dass durch Visualisierung und Externalisierung den Prozess des mathematischen Arbeitens unterstützt.

Allerdings scheinen die beschriebenen Funktionen nur für bestimmte mathematische Themenbereiche bzw. Aufgabenarten wirksam zu sein, denn in anderen Studien hat sich kein Vorteil durch die Nutzung der Skizze beim mathematischen Arbeiten erwiesen (z. B. Rellensmann, 2019, S. 254).

Die Teilprozesse des Interpretierens und Validierens zeichnen sich dadurch aus, dass das rein mathematische Resultat vor dem Hintergrund der realen Situation gedeutet und überprüft wird. Dies kann ebenfalls mit Hilfe der Skizze vollzogen werden (De Bock et al., 2003, S. 446; Presmeg, 2002, S. 50), indem das mathematische Resultat in der Skizze verortet und somit der Bezug zur realen Situation hergestellt wird. Die Skizze wird hierbei also als ***Speicher des Situationsmodells*** genutzt, sodass während des Interpretations- und Validierungsprozesses darauf zurückgegriffen werden kann (Rellensmann, 2019, S. 245 f.).

5 Forschungsfragen und Hypothesen

Das Ziel der vorliegenden Studie liegt zum einen darin, die vorliegenden, aber kaum quantitativ fundierten Forschungsergebnisse zum Skizzenzeichnen und dessen Zusammenhang mit der Modellierungsleistung durch quantitative Forschung zu validieren sowie deren Übertragbarkeit auf verschiedene geometrische Themen zu überprüfen. Weiterhin besteht ein zentrales Anliegen der Studie darin, die Analyse von Bedingungsfaktoren systematisch zu erweitern, um Schlussfolgerungen für den erfolgreichen Einsatz des Skizzenzeichnens als Strategie beim mathematischen Modellieren in der Praxis zu ermöglichen. Aus der im Theorieteil der Arbeit beschriebenen Forschungslage ergaben sich folgende grundlegende Forschungsfragen für die vorliegende Untersuchung:

Forschungsfrage 1: Häufigkeit, Qualität und Abstraktionsgrad der Skizzen

(1.) Mit welcher Häufigkeit, Qualität und welchem Abstraktionsgrad zeichnen Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs[24] *Skizzen zu geometrischen Modellierungsaufgaben, wenn sie dazu aufgefordert werden?*

Die grundsätzliche Skizzennutzung ist eine Schwierigkeit, die in verschiedenen Studien bereits beschrieben wurde. Es hat sich gezeigt, dass Lernende häufig nicht von selbst eine Skizze zu einer Problemstellung anfertigen (De Bock et al., 2003; Uesaka & Manalo, 2011a). Bei der Aufforderung zum Skizzenzeichnen ist dagegen eine deutlich höhere Skizzenhäufigkeit zu erwarten, wobei sich hier eine starke Abhängigkeit vom jeweiligen mathematischen Teilgebiet zeigt (Bräuer et al., 2021). Da in der vorliegenden Studie ausschließlich geometrische Problemstellungen genutzt wurden, d. h. solche mit räumlichem Kontext, ist zu erwarten, dass die Lernenden beim überwiegenden Teil der Aufgaben Skizzen zeichnen.

Daraus ergab sich folgende Hypothese:

(1.1.) Die Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs zeichnen sowohl zum Thema Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte *beim überwiegenden Teil der Bearbeitungen geometrischer Modellierungsaufgaben Skizzen, wenn sie dazu aufgefordert werden.*

Hinsichtlich der Skizzenqualität ergab sich in bisherigen Studien, dass die Lernenden häufig Schwierigkeiten dabei haben, gute Skizzen zu mathematischen Problemstellungen anzufertigen (Diezmann, 2002, S. 4; Van Meter & Garner, 2005). Allerdings handelte es sich in diesen Fällen auch nicht um Aufgaben, die räumlich-visuelle Bezüge aufwiesen. Bei Aufgaben zum *Satz des Pythagoras* wurden in der Studie von Bräuer et al. (2021, S. 513) im Durchschnitt Skizzen von mittlerer bis hoher Qualität erstellt. Zum Thema *Flächeninhalte* liegen bisher keine

[24] Für eine bessere Übersichtlichkeit werden die Zahlen zu den Jahrgängen in der Forschungsfragen nicht ausgeschrieben.

expliziten Erkenntnisse zur Skizzenqualität vor, allerdings ist auch hier aufgrund des gleichermaßen räumlich-visuellen Schwerpunktes kein Unterschied zu erwarten.

Demnach ließ sich folgende Hypothese ableiten:

(1.2.) *Die von Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs gezeichneten Skizzen zu geometrischen Modellierungsaufgaben sind sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte *von mittlerer bis hoher Qualität.*

Die einzelnen Qualitätskriterien der Skizze sind bisher kaum untersucht. Bräuer et al. (2021, S. 513 f.) zeigten, dass die Darstellung der Objekte und Relationen sowie die Beschriftung der Skizze mit den relevanten Zahlenwerten zumindest bei geometrischen Themen (hier am Beispiel *Satz des Pythagoras*) ähnlich gut gelingen, während bei algebraischen Themen starke Differenzen auftreten. Da bei der vorliegenden Studie nur geometrische Themen betrachtet werden, ist davon auszugehen, dass sowohl die Darstellungen der Objekte, der Relationen und der Zahlenwerte bei beiden Themen überwiegend gut gelingen.

Die folgende Hypothese wurde aus diesen Ergebnissen hergeleitet:

(1.3.) *Beim Zeichnen von Skizzen zu geometrischen Modellierungsaufgaben gelingt den Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte *hinsichtlich der als relevant befundenen Skizzenqualitätskriterien*[25]*...*

- *überwiegend die Darstellung der lösungsrelevanten Objekte,*
- *überwiegend die Darstellung der lösungsrelevanten Relationen*
- *und überwiegend die Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten.*

In bisherigen Studien, in denen der Abstraktionsgrad der Skizzen untersucht wurde, wurden häufig mehr situative als schematische Skizzen erstellt oder etwa gleich viele von beiden Arten (z. B. Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Pantziara et al., 2009; Van Garderen & Montague, 2003). Dies galt für verschiedene mathematische Themen, sodass davon ausgegangen werden kann, dass dies ebenso für beide Themen in der vorliegenden Studie gilt.

[25] Als Skizzen***qualitäts***kriterien werden nur die Kriterien verstanden, die sich in der Literatur bereits mehrfach als relevant für die Qualität einer Skizze erwiesen haben (Darstellung der lösungsrelevanten Objekte, Relationen, Zahlenwerte).

Die Begriffe „Skizzenkriterien“ oder „Skizzenvariablen“ werden verwendet, wenn *alle* in der vorliegenden Studie untersuchten Kriterien bezüglich der Skizzen gemeint sind (sowohl die Skizzenqualitätskriterien, als auch die Skizzenhäufigkeit, der Abstraktionsgrad der Skizzen und die explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze).

Aus diesen Forschungserkenntnissen ergab sich die Hypothese:

(1.4.) *Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs zeichnen sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte *in etwa zu gleichen Teilen schematische und situative Skizzen bei der Bearbeitung geometrischer Modellierungsaufgaben.*

Forschungsfrage 2: Zusammenhang zwischen Skizzenzeichnen und dem Lösungserfolg beim Modellieren

(2.) Inwiefern besteht ein Zusammenhang zwischen der Skizzenhäufigkeit, der Skizzenqualität und dem Abstraktionsgrad der Skizzen mit dem Lösungserfolg bzw. der erfolgreichen Bewältigung der Teilprozesse beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben?

Die empirischen Erkenntnisse zum Generierungseffekt des Skizzenzeichnens (Schmidgall, 2017, S. 57; Schwamborn et al., 2010) deuten darauf hin, dass das bloße Erstellen von Skizzen – unabhängig von ihrer Qualität – keinen Mehrwert für die erfolgreiche Bewältigung mathematischer Modellierungsprozesse bringt. Hingegen ist die Skizzenqualität den bisherigen empirischen Erkenntnissen zu Folge ein ausschlaggebender und vielfach nachgewiesener Einflussfaktor und steht in einem starken Zusammenhang mit dem erfolgreichen Lösen von mathematischen Problemsituationen (Bräuer et al., 2021; Rellensmann et al., 2022; Schnotz & Bannert, 2003; Schwamborn et al., 2010; Stern et al., 2003; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter, 2001) – und das unabhängig vom jeweiligen Thema. Hinsichtlich des Abstraktionsgrades liefern die bisherigen Studien keine eindeutigen Ergebnisse: Auf der einen Seite zeigten Studien, dass ein hoher Abstraktionsgrad von Skizzen (schematische Skizzen) mit erfolgreichen Aufgabenlösungen einhergeht (z. B. Hasemann & Stern, 2002; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Van Garderen & Montague, 2003). Auf der anderen Seite ergab eine Untersuchung von Rellensmann (2019, S. 258 f.), dass sowohl mathematische als auch situative Skizzen beim mathematischen Modellieren unterstützend wirken können. Letztlich überwiegen die Belege dafür, dass schematische Skizzen hilfereicher sind als situative.

Aus den beschriebenen Forschungserkenntnissen ergab sich folgende Hypothese:

(2.1.) *Die Skizzenqualität selbst erstellter Skizzen von Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs steht sowohl beim Thema* Satz des Pythagoras *als auch beim Thema* Flächeninhalte *in einem starken positiven Zusammenhang, der Abstraktionsgrad in einem geringfügigen positiven Zusammenhang und die Skizzenhäufigkeit in keinem Zusammenhang mit dem Lösungserfolg beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben.*

Zu den einzelnen Teilprozessen des mathematischen Modellierens liegen bisher keine expliziten Forschungsergebnisse vor. Die Analyse der Funktionen des Skizzenzeichnens bei den einzelnen Teilprozessen des Modellierens (Kapitel 4.8) legt allerdings nahe, dass die

Anwendung der Strategie vor allem in den ersten Schritten des Modellierungsprozesses seine Wirksamkeit entfaltet, d. h. beim Verstehen, Strukturieren und Mathematisieren. Beim mathematischen Arbeiten, Interpretieren und Validieren konnten zumindest theoriegeleitet nur wenige Funktionen der Skizze angenommen werden.

(2.2.) *Die erfolgreiche Bewältigung des Verstehens-, Strukturierungs- sowie Mathematisierungsprozesses steht sowohl beim Thema* Satz des Pythagoras *als auch beim Thema* Flächeninhalte *in einem starken positiven Zusammenhang mit der Skizzenqualität, einem geringfügigen positiven Zusammenhang mit dem Abstraktionsgrad und in keinem Zusammenhang mit der Skizzenhäufigkeit.*

Die erfolgreiche Bewältigung des mathematischen Arbeitens, Interpretierens und Validierens steht sowohl beim Thema Satz des Pythagoras *als auch beim Thema* Flächeninhalte *in keinem Zusammenhang mit der Skizzenqualität, dem Abstraktionsgrad und der Skizzenhäufigkeit.*

Forschungsfrage 3: Explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze

(3.) *Wie häufig gelingt Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs die explizite Darstellung des mathematischen Modells beim Zeichnen einer Skizze und inwiefern besteht ein Zusammenhang zwischen der Darstellung und dem Lösungserfolg beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben?*

Über die gängigen Qualitätskriterien hinaus hat sich die explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze in einigen Studien als relevant erwiesen (Bräuer et al., 2021, S. 515; Ott, 2016, S. 155). Auch wenn dieses Kriterium bisher selten untersucht wurde, deutet sich an, dass eine korrekte und explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze für Lernende weniger leicht umzusetzen ist als die übrigen Qualitätskriterien. Gleichzeitig scheint die erfolgreiche Darstellung des mathematischen Modells aber über die bisherigen Qualitätskriterien hinaus in einem starken Zusammenhang mit dem Lösungserfolg beim Modellieren zu stehen (Bräuer et al., 2021, S. 515).

Daraus ergaben sich die folgenden Hypothesen:

(3.1.) *Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs gelingt es sowohl beim Thema* Satz des Pythagoras *als auch beim Thema* Flächeninhalte *teilweise, das mathematische Modell beim Zeichnen einer Skizze zu geometrischen Modellierungsaufgaben explizit darzustellen.*

(3.2.) *Die explizite Darstellung des mathematischen Modells in selbst erstellten Skizzen von Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs steht sowohl beim Thema* Satz des Pythagoras *als auch beim Thema* Flächeninhalte *über die Qualitätskriterien der Darstellung der lösungsrelevanten Objekte und Relationen hinaus in einem starken Zusammenhang mit dem Lösungserfolg beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben.*

Forschungsfrage 4: Einfluss der Skizzenaufforderung auf den Lösungserfolg beim Modellieren

(4.) *Welchen Einfluss hat die Aufforderung zum Skizzenzeichnen im Vergleich zu der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf den Lösungserfolg bzw. die erfolgreiche Bewältigung der Teilprozesse beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben (in bestimmten Gruppen hinsichtlich Leistung, Skizzenpräferenz, Geschlecht, Alter)?*

In zahlreichen Studien hat sich gezeigt, dass das Skizzenzeichnen eine positive Wirkung auf die erfolgreiche Lösung von Aufgaben hat (Elia & Philippou, 2004; Hembree, 1992; Leopold & Leutner, 2015; Uesaka et al., 2007). Gleichzeitig gibt es aber auch wissenschaftliche Belege dafür, dass sich das Zeichnen einer Skizze gar nicht oder sogar negativ auf Lösungsprozesse auswirken kann (De Bock et al., 2003; Krawitz & Schukajlow, 2020; Manalo et al., 2013; Van Essen & Hamaker, 1990). Dies wurde meist auf mangelnde Umsetzung der Strategie oder spezielle Besonderheiten der Aufgaben zurückgeführt. Daher ist anzunehmen, dass sich die Skizzenaufforderung positiv auf die geometrische Modellierungsleistung auswirkt. Da die unterstützenden Funktionen der Strategie auf Grundlage der Theorie vor allem für die Teilprozesse des Verstehens, Strukturierens und Mathematisierens angenommen werden (Kapitel 4.8), ist zu vermuten, dass die Skizzenaufforderung vor allem für diese Teilprozesse einen Vorteil bewirkt. Hingegen ist bei den Teilprozessen des mathematischen Arbeitens, Interpretierens und Validierens kein besonderer Nutzen zu erwarten.

Demnach wurden folgende Wirkhypothesen abgeleitet:

(4.1.) *Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs lösen geometrische Modellierungsaufgaben sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte *erfolgreicher, wenn sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden, als wenn sie dazu aufgefordert werden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen.*

(4.2.) *Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs bewältigen die Teilprozesse des Verstehens, Strukturierens und Mathematisierens beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte *erfolgreicher, wenn sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden, als wenn sie dazu aufgefordert werden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen. Hingegen treten beim mathematischen Arbeiten, Interpretieren und Validieren keine Unterschiede je nach Aufforderung auf.*

In der Forschung zum Skizzenzeichnen und zur Verwendung von Darstellungen wurde in verschiedenen Studien deutlich, dass der Einsatz der Strategie vor allem dann hilfreich ist, wenn die Lernenden ein geringes Vorwissen haben bzw. eher geringe Leistungen aufweisen (Krawec, 2014; Mayer & Gallini, 1990, S. 718; Schnotz, 2005, S. 62). Auch wenn die Lernenden offenbar eine gewisse Wissens- und Fähigkeitsgrundlage brauchen, um die Strategie sinnvoll einsetzen zu können (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 505), scheinen vor allem Lernschwächere von dem Einsatz der Strategie zu profitieren, indem sie ihnen eine bildbasierte Verarbeitung erleichtert.

Folgende Hypothesen wurden daher aufgestellt:

(4.3.) *Je geringer die* ***allgemeine Mathematikleistung*** *der Lernenden, desto eher hat die Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, einen positiven Einfluss auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte*.*

(4.4.) *Je geringer die* ***geometriebezogene Leistung*** *der Lernenden, desto eher hat die Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, einen positiven Einfluss auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte*.*

Hinsichtlich der Präferenz zum Skizzenzeichnen lassen bisherige wissenschaftliche Erkenntnisse darauf schließen, dass eine positive Wahrnehmung des Skizzenzeichnens als effiziente Strategie eine wichtige Rolle bei der Wirkung des Skizzenzeichnens spielt:

(4.5.) *Je höher die* ***Skizzenpräferenz*** *der Lernenden, desto eher hat die Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, einen positiven Einfluss auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs sowohl zum Thema* Satz des Pythagoras *als auch zum Thema* Flächeninhalte*.*

6 Design und Erhebungsmethode

Die zentralen Konstrukte in den zuvor beschriebenen Forschungsfragen und -hypothesen sind zum einen das Skizzenzeichenverhalten beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben, zum anderen die Modellierungsleistung sowie eine theoriebasierte Auswahl an Einflussfaktoren. Zur Erhebung dieser Konstrukte wurden entsprechende Instrumente entwickelt (Kapitel 6.1): ein Test zur Modellierungsleistung, ein Test zur geometriebezogenen Leistung sowie ein personenbezogener Fragebogen, der zur Erhebung verschiedener Einflussfaktoren diente. Diese Instrumente wurden zunächst im Rahmen einer Pilotierung im Feld erprobt, um daraus Erkenntnisse und Konsequenzen für die Hauptuntersuchung ableiten zu können (Kapitel 6.2). Davon ausgehend und vor dem Hintergrund der bestehenden Forschung wurde schließlich das Design der Hauptstudie entwickelt (Kapitel 6.3). Im letzten Abschnitt des Kapitels wird die Durchführung der Haupterhebung beschrieben.

6.1 Entwicklung der Instrumente

Den Kern der geplanten Untersuchung bildeten die Modellierungsaufgaben, da diese dazu eingesetzt werden sollten, zum einen die Modellierungsleistung zu erheben, zum anderen aber auch, um das Skizzenzeichenverhalten in Bezug auf die Aufgaben analysieren zu können. Ein weiteres wichtiges Instrument der Studie bildete der Test zur geometriebezogenen Leistung, da sich diese als vielversprechender Einflussfaktor erwiesen hat. Um weitere mögliche Einflussfaktoren erheben zu können, wurde außerdem ein personenbezogener Fragebogen entwickelt.

6.1.1 Modellierungsaufgaben

Sowohl bei der Modellierungskompetenz als auch bei der Skizzenzeichenleistung handelt es sich um leistungsbezogene Konstrukte, zu deren Messung psychologische Leistungstests notwendig sind. Dafür galt es zunächst, eine sinnvolle Auswahl an Modellierungsaufgaben zu treffen, die Modellierungsprozesse initiieren, die sich aber gleichzeitig auch zum Erstellen von Skizzen eignen. Bei der Skizzenzeichenleistung haben sich verschiedene Dimensionen als relevant erwiesen: Die Skizzenqualität, der Abstraktionsgrad der Skizzen sowie die explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze. Da eine Bearbeitung von Subtests für die verschiedenen Dimensionen die Untersuchung jedoch unnötig komplex gestaltet hätte, wurden Hinweise auf die verschiedenen Dimensionen aus jeweils ein und derselben Skizzen abgeleitet.

Da das Aufgaben-Sampling bei einer quantitativen Untersuchung repräsentativ sein sollte, wurde zunächst ein umfangreicher Aufgabenpool von 21 Modellierungsaufgaben entwickelt, die sich durch verschiedene Ausprägungen schwierigkeitsbedingender Aufgabenmerkmale auszeichneten. Die Aufgaben wurden zum einen auf der Grundlage von erprobten Items aus dem Forschungsprojekt DISUM erstellt (Blum & Leiss, 2003). Zum anderen wurden eigenständig vergleichbare Testitems anhand von Schulbuchaufgaben entwickelt. Während es zum *Satz des Pythagoras* bereits einige empirisch getestete Modellierungsitems gibt, konnte bei der Entwicklung von Modellierungsaufgaben zum Thema *Flächeninhalte* nicht auf vorliegende Aufgaben zurückgegriffen werden, die die Anforderungen der Studie erfüllt hätten. Diese Anforderungen bestanden darin, dass die Aufgaben Modellierungsprozesse initiieren, gleichzeitig aber nicht zu komplex sind (z. B. im Sinne von Anwendungen, siehe Kapitel 4.5.3), um ausreichend Zeit für die anderen Aufgaben und Testteile zu lassen. Keines der Items zum *Satz des Pythagoras* wurde mit exakt dem gleichen Wortlaut wie in einer vorherigen Studie verwendet, sodass auch diese Aufgaben zunächst in einer Voruntersuchung pilotiert wurden.

Die Aufgabenentwicklung erfolgte mit dem Ziel, daraus eine Mischform zwischen Speed- und Powertest zusammenstellen zu können (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 30): Die Modellierungsaufgaben sollten sich durch unterschiedliche Schwierigkeitsgrade auszeichnen, sodass das Anforderungsniveau je nach Item variiert. Da Modellierungsaufgaben für Lernende im Allgemeinen als anspruchsvoll gelten, wurde davon ausgegangen, dass zumindest ein Teil der Aufgaben auch bei unbegrenzter Testzeit nicht für alle Teilnehmenden lösbar ist (Power). Der Zeitaspekt steht bei der vorliegenden Untersuchung zwar nicht im Vordergrund, spielte durch die begrenzte Testzeit, innerhalb der eine hohe Anzahl von Items gelöst werden musste, aber dennoch eine Rolle (Speed). Das Antwortformat der Aufgaben ist offen, da die Skizzen und Modellierungsprozesse vollkommen eigenständig produziert werden sollten.

Für die Festlegung des Geltungsbereichs waren sowohl Heterogenität als auch Homogenität leitende Prinzipien der Aufgabenentwicklung (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 29). Die Heterogenität war bei der vorliegenden Studie insofern relevant, als dass Aufgaben mit unterschiedlichen Leistungsanforderungen entwickelt wurden, um die verschieden Fähigkeitsspektren der Lernenden abzudecken. Gleichzeitig wurden bestimmte Variablen wie z. B. das mathematische Thema der Aufgabe konstant gehalten, um ein reliables Testinstrument zu erhalten. Hier kam das Prinzip der Homogenität zum Tragen. Zur Festlegung relevanter Aufgabenkriterien wurden bisherige Erkenntnisse zu schwierigkeitsbedingenden Aufgabenkriterien gesichtet (z. B. Franke & Ruwisch, 2010, S. 80). Die folgenden Kriterien wurden bei der Entwicklung der Modellierungsaufgaben konstant gehalten:

- mathematische Themen (*Flächeninhalt* und *Satz des Pythagoras*)
- keine Notwendigkeit, Annahmen zu treffen
- Anzahl überbestimmter Zahlenwerte
- Textlänge

Bei einer Variation dieser Merkmale wäre ein zu großer Einfluss auf die Testleistung der Teilnehmenden zu erwarten gewesen, sodass die statistische Auswertung der Ergebnisse erschwert worden wäre. Gleichzeitig wurde angenommen, dass durch die Variation anderer Variablen Aufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit entstehen, die dazu geeignet sind, zwischen den Probandinnen und Probanden hinsichtlich der Modellierungsleistung zu differenzieren. Deshalb wurden die folgenden Kriterien variiert und zu jeder Ausprägung eine Aufgabe zugeordnet bzw. entwickelt:

- Mathematisches Modell/ mathematischer Inhalt
- Aufgabenschwierigkeit in der Abstufung leicht / mittel / schwierig

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht darüber, welche Aufgabe welcher Ausprägung der Kriterien jeweils zuzuordnen ist:

Tabelle 1: Übersicht über Schwierigkeitsgrade der Aufgaben

Themen-bereich	Mathematisches Modell	Schwierigkeitsgrad *leicht*	*mittel*	*schwierig*
Flächeninhalte	***Rechteck***	Zimmer streichen	Carport	Rasenmähen
	Dreieck	Dachfenster	Sonnensegel	Erbstück
	Kreis	Feuerschale	Rasensprenger	Kreisverkehr
	Besondere Formen	Bürogebäude	Erker	Verkleiden einer Hauswand
Satz des Pythagoras	***Berechnung der Hypotenuse ohne Zusatzschritte***	Umgeknickter Baum	Weitwurf	Bauschutt
	Berechnung einer Kathete ohne Zusatzschritte	Rutsche	Langer Löffel	Laderampe
	Berechnung der Hypotenuse mit Zusatzschritten	Sprint	Technik-Masten	Wettschwimmen
	Berechnung einer Kathete mit Zusatzschritten	Ausbesserungsarbeit	Maibaum	Feuerwehr

Anmerkungen: Die mit dunklerem Grau hinterlegten Aufgaben wurden nach der Labor-Pilotierung ausgeschlossen. Die hellgrau hinterlegten Aufgaben wurden nach der Feld-Pilotierung ausgeschlossen. Die Erläuterungen zum Ausschluss folgen in den Kapiteln 6.1.2 und 6.2.

Zur Einschätzung des *Schwierigkeitsgrades* wurden die Verwendung alltagsferner Begrifflichkeiten, die für die Aufgabenlösung erforderlichen Rechenarten, die für die Aufgabenlösung erforderlichen Rechenschritte, der Zahlbereich der relevanten Zahlenwerte (natürliche/ rationale Zahlen) sowie die Anzahl der relevanten Objekte, Relationen und Zahlenwerte in der Aufgabe betrachtet. Anhang A zeigt eine detaillierte Übersicht über die Aufgabenmerkmale, die für die Einschätzung des Schwierigkeitsgrades herangezogen wurden.

Die Kriterien für die Auswahl der Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* sowie eine Analyse der Themen im Hinblick auf den Einsatz von Skizzen wurden bereits im Kapitel 3.5 dargelegt. Im folgenden Kapitel werden die spezifischen Charakteristika der Modellierungsaufgaben, die für die Studie entwickelt wurden, analysiert. Dazu wird aus jedem Themenbereich je eine Aufgabe anhand der Stationen des Modellierungskreislaufes nach Blum und Leiss (2005) sowie im Hinblick auf die aus der Theorie hergeleiteten Funktionen der Skizze beim Modellieren (vgl. Kapitel 4.8) analysiert.

6.1.1.1 Aufgabe Technik-Masten als Beispiel für das Thema *Satz des Pythagoras*

Technik-Masten

Mitte Januar gibt DJ Domi in der Schützenhalle ein Konzert. Dafür werden Technik-Masten in der Halle aufgebaut, an der die Beleuchtung befestigt wird. Allein an der Bühne gibt es knapp 60 Scheinwerfer für die Licht-Show. Zwischen zwei Technik-Masten fehlt noch ein Kabel. Der eine Mast ist 9 m hoch, der andere nur 4 m hoch und sie stehen 12 m auseinander.

Wie lang muss das Kabel sein, damit es von einer zur anderen Mastspitze reicht?

a) Zeichne eine Skizze, die dir hilft, die Aufgabe zu bearbeiten.
b) Beantworte die in der Aufgabe gestellten Frage und notiere deinen vollständigen Lösungsweg!

Die Aufgabe Technik-Masten[26] ist – ebenso wie alle übrigen Aufgaben zum Thema *Satz des Pythagoras* – gemäß des Niedersächsischen Kerncurriculums für die Integrierten Gesamtschulen (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012) in die Jahrgänge 9 und 10 einzuordnen, da das Thema dort behandelt wird, wobei die tatsächliche Durchführung der Unterrichtseinheit in der Regel im neunten Schuljahr stattfindet. Das Thema *Satz des Pythagoras* ist dem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Größen und Messen" zugeordnet und wird in jedem Leistungsniveau behandelt.

Reale Situation

In den Aufgabentexten werden jeweils authentische Situationen beschrieben, die aus verschiedenen Alltags- und Berufskontexten stammen. Bei der Aufgabe „Technik-Masten" geht es beispielsweise um eine Situation, die aus dem Berufsfeld der Elektrotechnik stammt. Die Situationsbeschreibungen beinhalten neben den relevanten Informationen weitere Informationen, die für die Lösung der Aufgabe nicht relevant sind, hier die Zahlenangabe „60 Scheinwerfer", aber auch weitere inhaltliche Informationen wie zum Beispiel das Stattfinden eines Konzerts Mitte Januar. Die Fotos neben den Aufgabentexten dienen jeweils zur Veranschaulichung, wobei durch die Fotos keine für die Lösung der Aufgabe unmittelbar relevanten Informationen gegeben werden. Sie können zwar die Konstruktion des Situationsmodells unterstützen, aber die informative Funktion des Aufgabentextes steht bei allen Aufgaben deutlich im Vordergrund.

Situationsmodell

Zu Beginn des Lösungsprozesses gilt es stets, die reale Situation zu verstehen und ein individuelles, mentales Modell der Situation zu konstruieren. Bei dieser Aufgabe bedeutet dies konkret: Zwei verschieden hohe Technikmasten stehen in der Konzerthalle, die 4 m und 9 m

[26] Quelle: selbsterstellte Aufgabe, Foto: https://pixabay.com/de/konzert-leistung-publikum-lightshow-336695/

hoch sind. Der Abstand zwischen den Masten beträgt 12 m. Die Frage besteht darin, wie lang ein Kabel sein muss, das von der einen zu anderen Mastspitze reicht. Beim Prozess des Bildens eines Realmodells werden bereits erste irrelevante Informationen herausgefiltert. So ist beispielsweise unwichtig, wann das Konzert stattfindet oder wie viele Scheinwerfer angebracht sind. Gleichzeitig können auch Informationen ergänzt werden, die für die Konstruktion des Situationsmodells relevant sind, z. B. der Verlauf des Kabels von einem zum anderen Mast oder die Befestigung des Kabels an den Masten. Auch bei den übrigen Aufgaben zum Thema *Satz des Pythagoras* müssen in ähnlicher Weise zunächst die relevanten Angaben und Informationen identifiziert und gegenüber irrelevanten abgegrenzt werden.

Realmodell

Im zweiten Schritt wird das Situationsmodell durch Vereinfachungen und Strukturierungen in der Weise modifiziert, dass anschließend mathematische Strukturen und Verfahren darauf anwendbar sind. Gleichzeitig soll aber die strukturelle Ähnlichkeit mit dem Situationsmodell aufrechterhalten werden. So lässt sich beispielsweise vereinfachend annehmen, dass das Kabel nicht durchhängt, sondern straff gespannt ist. Außerdem könnte man die Befestigung des Kabels vernachlässigen. Da weder auf dem Bild noch aus der Aufgabenstellung ablesbar ist, welche Form und Bauweise die Technikmasten aufweisen, ist es sinnvoll, diese als geradlinige Objekte anzunehmen, die im rechten Winkel zum Boden stehen. Alle Modellierungsaufgaben zum *Satz des Pythagoras* sind ähnlich konzipiert in der Hinsicht, dass Objekte als gerade Linien idealisiert werden müssen. Auch der rechte Winkel ist in der Regel eine Idealisierung, die vorgenommen werden muss, um den mathematischen Satz anwenden zu können.

Mathematisches Modell

Anschließend erfolgt die Übersetzung des Realmodells in das mathematische Modell durch Nutzung mathematischer Begriffe, Operationen und Grundvorstellungen. Durch Nutzung der Grundvorstellungen kann im Realmodell das rechtwinklige Dreieck identifiziert werden, das aus dem Abstand zwischen den Masten (der nicht am Boden, sondern auf Höhe der Spitze des kleineren Mastes gedacht werden kann), dem oberen Abschnitt des höheren Mastes sowie dem Kabel gebildet wird. Dabei stellt das Kabel die Hypotenuse und die zwei anderen Seiten die Katheten dar. Durch die Identifikation des rechtwinkligen Dreiecks wird der *Satz des Pythagoras* als geeignetes mathematisches Verfahren erkannt. In ähnlicher Weise muss auch in den übrigen *Satz des Pythagoras*-Aufgaben das rechtwinklige Dreieck durch Aktivierung von Grundvorstellungen erkannt werden. Bei manchen ist dabei das rechtwinklige Dreieck offensichtlicher (wenn drei Objekte gegeben sind, die gemeinsam das rechtwinklige Dreieck bilden, ohne dass bestimmte Abschnitte betrachtet werden müssen). Bei anderen Aufgaben ist das mathematische Modell ähnlich komplex bzw. komplexer als bei der Aufgabe „Technik-Masten“, indem zusätzliche Angaben berücksichtig werden müssen (z. B. Höhe der Feuerwehrautos bei der Aufgabe „Feuerwehr“, Haltehöhe der Bänder bei der Aufgabe „Maibaum“).

Mathematisches Resultat

Innerhalb des mathematischen Modells wird anschließend das mathematische Verfahren – der *Satz des Pythagoras* – zur Berechnung der gesuchten Größe angewendet, welches bei der Beispielaufgabe die Kabellänge darstellt. Dazu müssen die Zahlenwerte entsprechend eingesetzt und durch Anwendung der Grundrechenarten, des Quadrierens und Wurzelziehens (bei einigen Aufgaben in der Studie auch Äquivalenzumformungen) eine mathematische Lösung generiert werden. Dieses Vorgehen ist bei allen Aufgaben ähnlich, allerdings sind bei einigen Aufgaben – wie auch bei der beispielhaften – zusätzliche Rechenschritte notwendig, während diese bei anderen Aufgaben entfallen.

Bei der Aufgabe „Technik-Masten" muss zunächst die Höhendifferenz zwischen den Masten z. B. durch Subtraktion bestimmt werden:

$$9m - 4m = 5m$$

Anschließend kann der *Satz des Pythagoras* angewendet werden, und auf diese Weise die Hypotenuse berechnet werden:

$$c = \sqrt{(5m)^2 + (12m)^2} = 13m$$

Das mathematische Resultat sind demnach 13 m Länge für die Hypotenuse. Bei allen Aufgaben zum Thema *Satz des Pythagoras* ist dieses mathematische Verfahren zielführend. Allerdings muss bei einigen Aufgaben die Länge der Hypotenuse, bei anderen die Länge einer Kathete bestimmt werden.

Interpretieren

Anschließend wird das mathematische Resultat in Bezug auf das Realmodell interpretiert, um ein reales Resultat zu erhalten. Bei der Beispiel-Aufgabe könnte die Interpretation wie folgt lauten: Das Kabel, das zwischen den zwei Masten gespannt wird, muss mindestens 13 m lang sein.

Validieren

Anschließend erfolgt die Validierung des Ergebnisses, indem vor dem Hintergrund der gesamten Komplexität des Situationsmodells das reale Resultat noch einmal überprüft wird. Wünschenswert wäre hier, dass z. B. bedacht wird, dass das Kabel nicht ganz straff gespannt sein kann, sodass etwas Länge hinzugerechnet wird. Wichtig wäre auch, wie das Kabel an den Masten befestigt wird, und dass auch hier ggf. zusätzliches Kabel benötigt wird, sodass man insgesamt z. B. auf 14 m Kabel kommen könnte. Auch bei den übrigen Pythagoras-Aufgaben ist eine vergleichbare Validierung erforderlich, indem z. B. Verschnittmaterial ergänzt oder Krümmungen berücksichtig werden.

Darlegen

Der letzte Schritt bei der Aufgabenbearbeitung besteht in der Darlegung des validierten, realen Resultates, welche in der Regel in Form eines Antwortsatzes erfolgt. Der Antwortsatz zur Aufgabe „Technik-Masten" könnte beispielsweise wie folgt lauten:

„Das Kabel muss mindestens 13 m lang sein, damit es von der einen zu anderen Mastspitze reicht. Zu beachten ist dabei, dass das Kabel nicht ganz straff gespannt werden kann und an den Masten befestigt werden muss, weshalb eine Kabellänge von etwa 14 m sinnvoll ist.“

Funktionen des Skizzenzeichnens

Beim Verstehen kann das Zeichnen einer Skizze dazu dienen, sich die Situation zu veranschaulichen, konkret bei der Aufgabe „Technik-Masten“ also die zwei Masten zu zeichnen und diese an den Spitzen mit einem Kabel zu verbinden. Der Abstand zwischen den Masten kann auf einer beliebigen Höhe im rechten Winkel zu beiden Masten eingezeichnet werden. Außerdem können die Zahlenangaben – 9 m, 4 m und 12 m – jeweils den Objekten zugeordnet werden. In ähnlicher Weise kann die Skizze bei den übrigen *Pythagoras*-Aufgaben fungieren, indem die Objekte in ihren Relationen zueinander dargestellt und die relevanten Zahlenwerte zugeordnet werden. Eine Skizze, die zum Verstehen und zur Konstruktion des Situationsmodells dient, kann sich dadurch auszeichnen, dass die Objekte eher realitätsnah dargestellt werden – z. B. dreidimensionale Masten, die durch Stangen stabilisiert sind, ein durchhängendes Kabel usw.

Anschließend kann die Skizze zur Vereinfachung im Hinblick auf das Realmodell so modifiziert werden, dass überflüssige Informationen entfernt oder die Objekte zusätzlich in vereinfachter Form dargestellt werden (z. B. werden realitätsnahe Objekte durch Linien vereinfacht). Alternativ, oder wenn eine solche erste Skizze zur Konstruktion des Situationsmodells gar nicht erstellt wurde, kann eine neue Skizze gezeichnet werden, in der die Objekte unmittelbar in vereinfachter Form, hier also durch gerade Linien, dargestellt werden. Eine derart vereinfachte Skizze kann dazu beitragen, die Übersetzung des Situationsmodells in das vereinfachte und strukturierte Realmodell zu unterstützen.

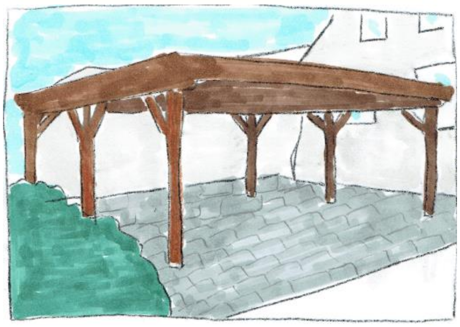
Im darauffolgenden Schritt, dem Mathematisieren, kann die Skizze weiter genutzt werden, um die mathematischen Objekte und Strukturen zu identifizieren. Möglich wäre aber auch, eine neue Skizze zu erstellen, in der die mathematischen Strukturen besonders verdeutlicht werden, also z. B. nur das rechtwinklige Dreieck zu zeichnen, den rechten Winkel durch einen Viertelkreis mit Punkt darin zu kennzeichnen. Bei der Aufgabe „Technik-Masten“ kann die Skizze zu der Erkenntnis führen, dass der Abstand von 12 m zwischen den Masten nicht nur am Boden besteht, sondern auf jeder beliebigen Höhe zwischen den Masten, da diese zwei Parallelen darstellen. Gleichzeitig kann so erkannt werden, dass sich der Abstand in rechtwinkliger Lage zu beiden Masten befindet. Auf diese Weise wird das rechtwinklige Dreieck in der Situation erkennbar und der *Satz des Pythagoras* kann als adäquates Verfahren identifiziert werden. In der Skizze wird auch der rechte Winkel offenbar, wodurch das Erkennen des Kabels als Hypotenuse unterstützt wird. Bei allen in für die Studie entwickelten Aufgaben handelt es sich um vergleichbare Situationen, bei denen das rechtwinklige Dreieck Teil einer räumlichen Konfiguration ist. Somit sollte die Skizze bei allen Aufgaben in ähnlicher Weise das Erkennen des rechtwinkligen Dreiecks sowie dessen konstituierender Bestandteile unterstützen.

Bei der Berechnung des mathematischen Resultats kann die Skizze genutzt werden, um die Berechnungen schrittweise nachzuvollziehen und zu überprüfen sowie das Resultat in das mathematische Modell einzuordnen. Als erster Schritt kann die berechnete Höhendifferenz in der Skizze verortet werden und als zweiter Schritt die berechnete Hypotenuse. Dafür können die jeweiligen gesuchten Größen mit Variablen gekennzeichnet oder ihrer Bedeutung entsprechend mit Wörtern beschriftet werden. Bei der Interpretation kann die Skizze dazu dienen, das konstruierte Realmodell noch einmal zu rekapitulieren und das mathematische Modell in dieses einzubetten. Ähnlich kann vor allem eine Skizze, in der die Objekte realitätsnah dargestellt wurden (so wie beim Verstehen der Aufgabe), hilfreich dabei sein, realitätsbezogene Überlegungen zur Überprüfung des Ergebnisses anhand des Situationsmodells einzubeziehen, wie z. B. das durchhängende Kabel oder die Befestigung des Kabels an den Technikmasten.

6.1.1.2 Aufgabe Carport als Beispiel für das Thema *Flächeninhalte*

Carport

Petra und Thomas haben sich ein zweites Auto gekauft und möchten sich dafür einen großen Doppel-Carport aufbauen. Im Prospekt der Firma „Holzi" finden sie einen schönen Carport für 1.879,00 €. Der Carport ist 5 m breit und 4 m lang. Die Fläche für den Carport soll vorher gepflastert werden und zwar so, dass zusätzlich zu der Fläche unter dem Carport noch ein 1m-breiter Streifen um den Carport herum gepflastert wird.



Für wie viele Quadratmeter müssen Petra und Thomas insgesamt Pflastersteine bestellen?

a) Zeichne eine Skizze, die dir hilft, die Aufgabe zu bearbeiten.
b) Beantworte die in der Aufgabe gestellten Frage und notiere deinen vollständigen Lösungsweg!

Bei der Aufgabe „Carport"[27] handelt es sich um eine Beispielaufgabe zum Thema *Flächeninhalte*. Innerhalb des Niedersächsischen Kerncurriculums ist dieses Thema ebenfalls dem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Größen und Messen" zugeordnet (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012, S. 30 f.). Das Thema *Flächeninhalte* findet sich in allen Jahrgangsstufen wieder, da in jeder Stufe neue geometrische Figuren hinzukommen, deren Flächeninhalte berechnet werden. Speziell die Aufgabe „Carport" ist in den Jahrgängen 5 und 6 zu verorten, da hier bereits die Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken behandelt wird. Weitere Formen, die in der Studie vorkommen, sind das Dreieck (Jahrgang 7 / 8, (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012, S. 31), sowie der Kreis (Jahrgang 9 / 10, (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012, S. 31).

Reale Situation

Der Aufgabentext zur Aufgabe „Carport" beschreibt – ebenso wie bei allen übrigen *Flächeninhalts*-Aufgaben – eine realitätsbezogene, authentische Situation, die in diesem Fall aus dem privaten Bereich stammt (da es sich bei Petra und Thomas um ein Paar handelt, welches privat

[27] Quelle: selbsterstellte Aufgabe, Bild: selbst gezeichnet

ein Carport aufbauen möchte). In den weiteren Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* werden ebenso alltags- sowie berufsbezogene Themen behandelt. Neben den lösungsrelevanten wurden in allen Aufgaben auch einige überflüssige Angaben und Informationen gegeben. In der Beispiel-Aufgabe „Carport“ sind dies z. B. der Preis des Carports oder der Firmenname. Durch das Bild neben der Aufgabe werden auch im Themenbereich *Flächeninhalte* keine zusätzlichen Informationen geliefert, sondern es dient zur Veranschaulichung der Situation. Zu beachten ist, dass Aufgabentext und Bild nicht exakt übereinstimmen, da auf dem Bild kein 1-m-breiter Streifen um das Carport herum dargestellt ist. Das Bild ist somit keine direkte Verbildlichung des Aufgabentextes, sondern gibt lediglich Anhaltspunkte zum Verstehen der realen Situation, ähnlich wie bei der Aufgabe „Technik-Masten“. Vergleichbare Bilder wurden bei allen übrigen Aufgaben hinzugefügt. Die Frage bei der Beispielaufgabe lautet, für wie viele Quadratmeter Petra und Thomas Pflastersteine bestellen sollen.

Situationsmodell

Im ersten Schritt wird durch Verstehen des Aufgabentextes das mentale Situationsmodell konstruiert. Ein Carport, das 5 m breit und 4 m lang ist, soll aufgebaut werden. Dazu wird eine Fläche aus Steinen gepflastert, die an den Rändern des Carports jeweils um einen Meter über die Carport-Fläche hinausragen soll. Einerseits können die irrelevanten Informationen wie die Anzahl der Autos oder der Preis des Carports aus dem Aufgabentext bereits bei der Konstruktion des Situationsmodells vernachlässigt werden. Andererseits können Überlegungen ergänzt werden – z. B., dass bei der Bestellung von Baumaterialien immer ein Verschnitt mitberechnet werden sollte. Alle Flächeninhaltsaufgaben wurden so konzipiert, dass stets in ähnlicher Weise Situationsmodelle zu bilden sind, bei denen Informationen aus dem Aufgabentext vernachlässigt werden können, während aber auch zusätzliche Überlegungen sinnvoll sind.

Realmodell

Anschließend wird das Situationsmodell vereinfacht und strukturiert, um das Realmodell zu konstruieren. Dabei soll die Struktur des Situationsmodells erhalten bleiben und gleichzeitig die Anwendbarkeit mathematischer Operationen ermöglicht werden. Vereinfachend kann man annehmen, dass die zu pflasternde Fläche exakt geradlinige Kanten und rechte Winkel hat, und dass die Fläche an jeder Kante exakt um einen Meter über die Carportfläche hinausragt. Allen Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* in der vorliegenden Studie ist gemeinsam, dass reale Formen und Gegenstände zu geometrischen Figuren (Rechteck, Dreieck, Kreis) idealisiert werden müssen.

Mathematisches Modell

Mithilfe mathematischer Grundvorstellungen, Begriffe und Verfahren wird das Realmodell anschließend mathematisiert. Die zu pflasternde Fläche wird als Rechteck identifiziert, welches die Seitenlängen 6 m und 7 m hat. Da eine rechteckige Figur vorliegt, wird die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks als adäquates Verfahren gewählt. In ähnlicher Weise würde je nach geometrischer Figur bei den übrigen Flächeninhaltsaufgaben die jeweils passende Formel zur Berechnung des Flächeninhalts herangezogen werden. Allerdings sind häufig verschiedene Mathematisierungen denkbar: Bei der Beispielaufgabe „Carport“ könnte auch die Carportfläche berechnet und der Rand um das Carport in einzelne Rechtecke aufgeteilt werden.

Mathematisches Resultat

Mithilfe der Flächeninhaltsformel für das Rechteck kann das gesuchte mathematische Resultat, der Flächeninhalt des Rechtecks berechnet werden. Zunächst müssen bei dem exemplarischen Lösungsweg zu jeder Seitenlänge des Carports 2 m (1 m an jedem Ende der Seitenlänge) hinzugerechnet werden:

$$a = 4m + 2\,m$$

$$b = 5m + 2m$$

Anschließen werden die Seitenlängen in die Formel eingesetzt und durch Multiplikation miteinander verrechnet:

$$A_{Rechteck} = 6m \cdot 7m = 42m^2$$

Als mathematisches Resultat ergeben sich 42 m^2. Bei allen Aufgaben zum Thema Flächeninhalt in der vorliegenden Studie müssen Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken, Kreisen und Dreiecken angewendet werden, die in erster Linie die Grundrechenarten sowie z.T. auch das Quadrieren und Bruchrechnen beinhalten.

Interpretieren

Das mathematische Resultat wird anschließend mit Blick auf das Realmodell interpretiert. Im Beispiel bedeutet dies: Die errechneten 42 m^2 sind die Fläche, für die Pflastersteine bestellt werden müssen.

Validieren

Anschließend erfolgt die Validierung des realen Ergebnisses im Rahmen des Situationsmodells. So kann berücksichtigt werden, dass bei der Bestellung der Pflastersteine etwas dazu gerechnet werden sollte, da bei baulichen Arbeiten stets ein Verschnitt entsteht. Bei einem Verschnitt von beispielsweise 5% sollten also etwa 2 m^2 hinzugerechnet werden, sodass sich insgesamt 44 m^2 ergeben. Auch bei den übrigen Flächeninhalts-Aufgaben ist häufig ein Verschnitt oder Vergleichbares zu berücksichtigen.

Darlegen

Im letzten Schritt wird das reale, validierte Ergebnis dargelegt, was so wie bei allen übrigen Aufgaben in der Regel in Form eines Antwortsatzes erfolgt. So könnte der Antwortsatz im Beispiel lauten: „Petra und Thomas müssen für 44m^2 Steine bestellen, da die zu pflasternde Fläche 42m^2 beträgt und etwa 5% Verschnitt hinzugerechnet werden.“

Funktionen des Skizzenzeichnens

Eine selbst erstellte Skizze kann beim Verstehen der Aufgabe dazu genutzt werden, Aspekte des Situationsmodells zu veräußerlichen, diese somit zu konkretisieren, Strukturen und

Zusammenhänge zu erkunden und neu zu entdecken. Dazu können die Objekte realitätsnah dargestellt werden, z. B. der Carport als dreidimensionales Gebilde oder die gepflasterte Fläche durch einzelne Steine. So kann deutlich werden, dass einzelne Steine abgeschnitten werden und somit Verschnitt entsteht. Vor allem ist bei dieser Aufgabe aber das Verstehen der Beschreibung zu dem Streifen um das Carport relevant, der an *jeder* Seite der Carportfläche um einen Meter über die Fläche hinausragen soll. Auch dies kann anhand der Skizze verdeutlicht werden. Bei den übrigen Flächeninhalts-Aufgaben kann die Skizze in ähnlicher Weise dazu beitragen, sich die Objekte konkret und realitätsnah zu veranschaulichen, um alle Aspekte der Situation berücksichtigen zu können.

Eine Skizze, die zur Vereinfachung und Strukturierung des Situationsmodells beiträgt, könnte die gepflasterte Fläche (und / oder die Carportfläche) als geradlinige, zweidimensionale Form darstellen. Auch kann an einer solchen Skizze die Position des 1-m-breiten Streifens verdeutlicht werden. Durch die Zuordnung der Zahlenangaben wird offensichtlich, dass zu jeder Seitenlänge des Carports *an beiden Seiten jeweils* 1 m, also insgesamt 2 m, Länge hinzukommen. Auf diese Weise kann die Skizze dazu beitragen, die lösungsrelevanten Relationen der Objekte hervorzuheben. Bei den weiteren Aufgaben zum Themenbereich *Flächeninhalte* können die Objekte ebenfalls als geradlinige, zweidimensionale Objekte dargestellt werden und die Skizze kann Positionen und Relationen der Objekte zueinander zu verdeutlichen.

Beim Mathematisieren ist die selbst erstellte Skizze potenziell hilfreich, um anhand der Zeichnung die geometrischen Formen, in diesem Fall also das Rechteck/die Rechtecke zu erkennen und die mathematischen Verfahren entsprechend daraus abzuleiten. Da bei den Seitenlängen an jedem Ende je 1 m hinzukommt, müssen die Angaben entsprechend addiert werden. Weiterhin wird die gepflasterte Fläche als Rechteck in der Skizze identifiziert und entsprechend kann die Formel ausgewählt werden.

Beim mathematischen Arbeiten kann die Skizze dazu dienen, die einzelnen Berechnungsschritte zu überwachen und zu überprüfen. Zunächst werden die Seitenlängen berechnet, anschließend der Flächeninhalt. Außerdem kann anhand der Skizze das mathematische Resultat eingeordnet werden, indem es entsprechend in der Skizze eingetragen wird. Dies unterstützt die Interpretation des mathematischen Resultats, da anhand der Skizze nachvollzogen werden kann, dass es sich um die gepflasterte Fläche handelt, die berechnet werden soll. Beim Validieren könnte die Betrachtung zu einer realitätsnahen Skizze (wie sie im ersten Schritt des Verstehens beschrieben wurde) sinnvoll sein, um zu bedenken, dass ein Verschnitt bei der Bestellung von Pflastersteinen berücksichtigt werden sollte.

6.1.2 Labor-Pilotierung der Modellierungsaufgaben

Da die Modellierungsaufgaben für die vorliegende Studie selbst entwickelt wurden, um den Anforderungen der Untersuchung gerecht zu werden, wurde zunächst eine Pilotierung der Aufgaben im Rahmen von Labor-Sitzungen durchgeführt. Die Labor-Pilotierung diente zum einen dazu, die Modellierungsaufgaben auf Besonderheiten zu prüfen (z. B. missverständliche

Formulierungen, besondere Schwierigkeiten während der Aufgabenbearbeitungen), die zu einer Verzerrung von Ergebnissen führen könnten. Außerdem sollte anhand der Labor-Pilotierung untersucht werden, wie viel Bearbeitungszeit die Lernenden für die Aufgaben in etwa benötigen. Ein weiteres zentrales Ziel der Labor-Pilotierung lag darin, die Testheftformate zu testen – dabei insbesondere die Verwendung von Linien bzw. leeren Kästen und deren Auswirkungen auf das Skizzenzeichenverhalten.

Die Labor-Pilotierung wurde über zwei Wochen verteilt an sechs verschiedenen Terminen durchgeführt und beanspruchte pro Sitzung ca. 70 Minuten. Die Sitzungen wurden jeweils mit zwei Schülerinnen und Schülern durchgeführt, die in Partnerarbeit zwölf Modellierungsaufgaben bearbeiteten und dabei mit einer Videokamera aufgenommen wurden. An der Labor-Pilotierungsstudie nahmen zwölf Schülerinnen und Schüler (8 weiblich, 4 männlich) teil. Davon besuchten zehn Lernende die zehnte Klassenstufe eines Gymnasiums, ein Schüler die elfte und ein weiterer die zwölfte Klasse eines Gymnasiums.

Zunächst erhielten die Teilnehmenden Instruktionen durch die Versuchsleiterin und hatten anschließend etwa 60 Minuten Zeit, um die Aufgaben zu bearbeiten (Abbildung 4). Auch wenn im Durchschnitt etwa fünf Minuten pro Aufgabe veranschlagt waren, so wurde den Teilnehmenden in der Regel so viel Zeit zur Verfügung gestellt, wie sie benötigten. Wenn es anhaltende Schwierigkeiten bei einer Aufgabe gab, wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, zunächst die übrigen Aufgaben zu lösen und sich am Ende noch einmal der jeweiligen Aufgabe zu widmen.

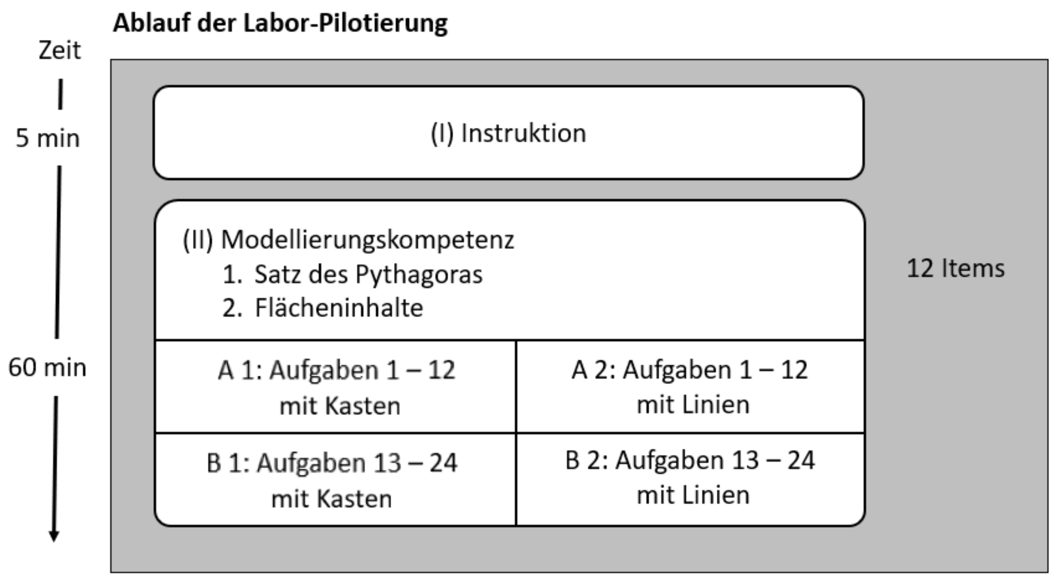


Abbildung 4: Schaubild zum Ablauf der Labor-Pilotierung

Die Testhefte der Pilotierung waren so gestaltet, dass sich bei der einen Version unter der Aufgabenstellung ein Kasten, bei der anderen Version Linien zur Notation der Aufgabenlösung befanden. Auf diese Weise sollte getestet werden, inwiefern die unterschiedlichen Formate das Skizzenzeichnen unterstützen bzw. hemmen. Dahinter stand die Absicht, ein Format für die Versuchsgruppe zu generieren, in der keine Skizzen gezeichnet werden sollten. Auch wenn bisher nicht wissenschaftlich untersucht ist, welchen Effekt das Einzeichnen von Linien auf das Zeichnen von Skizzen hat, so ist doch üblich, dass auf weißem oder auf Karo-Papier und nicht auf Linien gezeichnet wird.

Insgesamt wurden 24 Modellierungsaufgaben entwickelt, von denen ein Schülerpaar jeweils zwölf bearbeitete. Da alle Aufgaben einmal in dem Format mit Kasten und einmal in dem Format mit Linien eingesetzt wurden, gab es somit vier verschiedene Testhefte bei der Labor-Pilotierung (A 1, A 2, B 1, B 2, vgl. Abbildung 4). Jede Partnergruppe bearbeitete immer nur eine der vier Testheftvarianten. Die Testheftvarianten A 1 und B 1 (mit Kasten) wurden je einmal bearbeitet, die Varianten A 2 und B 2 (mit Linien) je zweimal – also häufiger, um den Effekt der Linien auf das Skizzenzeichenverhalten mehrfach zu testen.

Um die Aufzeichnung von verbalen Äußerungen und damit den Zugang zu kognitiven Prozessen zu ermöglichen, wurde die Bearbeitung in Partnergruppen als Format gewählt. Eine stille Bearbeitung durch einzelne Schülerinnen und Schüler hätte dagegen nicht die Möglichkeit eröffnet, zu beobachten, an welchen Stellen der Denkprozesse Konflikte und Schwierigkeiten auftreten oder was ausschlaggebend dafür ist, ob eine Skizze gezeichnet wird oder nicht.

Alternativ hätten die Teilnehmenden bei der Bearbeitung auch laut denken können. Allerdings kann die Methode des Lauten Denkens sowohl zu einer positiven (z. B. durch stärkeres Bewusstwerden aufgrund der Externalisierung), als auch einer negativen Beeinflussung (z. B. Erhöhung der kognitiven Belastung wegen der Notwendigkeit des Verbalisierens) führen und so die Lösungsprozesse verzerren (Sandmann, 2014, S. 187). Der Vorteil des Lauten Denkens besteht darin, dass dabei individuelle Lösungsprozesse entstehen und diese nicht erst herausgefiltert werden müssen. Für die Ziele der Labor-Pilotierung (die Identifikation von Hürden in den Lösungsprozessen sowie die Beachtung des Skizzenzeichen-Verhaltens) war es jedoch weniger relevant, den individuellen Lösungsprozess zu identifizieren als gewohnte Situationsbedingungen zu schaffen, in denen die Schülerinnen und Schüler ihr natürliches Lösungsverhalten zeigen.

Zur Bearbeitung der Aufgaben waren Taschenrechner und eine Formelsammlung erlaubt, die später auch für die Hauptuntersuchung verwendet wurden (Anhang F). Die Ergebnisse der Labor-Pilotierung wurden also nicht nur dazu genutzt, die entwickelten Modellierungsaufgaben zu evaluieren, sondern auch die Testheftformate sowie den Einsatz der Unterstützungsmittel zu erproben.

Die Aufzeichnungen der Bearbeitungsprozesse wurden mit Hilfe einer Videokamera durchgeführt. Die Kamera wurde dabei so positioniert, dass sie von hinten über die Schultern der Probandinnen und Probanden filmte, um die schriftlichen Lösungen bestmöglich nachvollziehen zu können. Die Aufnahmen wurden nicht transkribiert, da das Ziel der Pilotierung nicht darin lag, einzelne Aussagen zu analysieren. Vielmehr ging es darum, herauszufinden, bei welchen Aufgaben besondere Schwierigkeiten z. B. durch Formulierungen auftreten und warum die Teilnehmenden zu bestimmten Aufgaben Skizzen zeichnen und zu anderen nicht. Da sich diese Ziele auch ohne Transkripte analysieren lassen, wurde auf eine Transkription verzichtet.

Insgesamt lag die mittlere Bearbeitungszeit der Modellierungsaufgaben bei 3,77 Minuten je Item. Zu berücksichtigen ist allerdings, dass in der Labor-Pilotierung ausschließlich Lernende des gymnasialen Niveaus teilnahmen. Daher wurde zur Festlegung der Itemanzahl für die Hauptuntersuchung mit einem Durchschnitt von 4 Minuten gerechnet. Für die Hauptuntersuchung waren 72 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Modellierungsaufgaben angedacht, wodurch sich eine Anzahl von 18 Items ergab. Um mit Hilfe der Pilotierungsergebnisse diese 18 Items auszuwählen bzw. sechs weniger geeignete Items auszuschließen, wurden verschiedene Kriterien herangezogen, die zu einer Verzerrung der Ergebnisse beitragen könnten:

(1) **missverständliche Formulierungen** in den Aufgabentexten

(2) vollständiges **Fehlen von Skizzen** zu der jeweiligen Aufgabe (da das Zeichnen von Skizzen von grundlegender Bedeutung für Zielsetzung der Studie ist)

(3) eine außergewöhnlich **niedrige oder hohe Lösungsrate** (um Boden- und Deckeneffekte zu vermeiden)

(4) außergewöhnlich **viel benötigte Zeit** für die Lösung einer Aufgabe (aus zeitökonomischen Gründen)

(5) **vollständig fehlende Hürden im Modellierungsprozess** (da theoriebasiert angenommen wird, dass Skizzen bei der Überwindung von Hürden im Modellierungsprozess hilfreich sind, ist bei solchen Aufgaben eine positive Wirkung von Skizzen unwahrscheinlicher (vgl. Kapitel 4.6 bis 4.8)).

(6) **fehlende Varianz in der Lösungsrate** (da die jeweilige Aufgabe somit nicht dazu dient, Leistungsunterschiede zu erklären) und der **Skizzenqualität** (da auch diesbezüglich Unterschiede für spätere Zusammenhangsanalysen wünschenswert sind)

Die Videoaufnahmen wurden im Hinblick auf diese Kriterien durchgesehen und ausgewertet. Zunächst wurde dabei auf missverständliche Formulierungen geachtet (Kriterium **(1)**), die allerdings bei keiner der Aufgaben vorkamen. Anschließend wurde die Skizzenqualität bzw. -häufigkeit betrachtet (Abbildung 5)(Kriterium **(2)**). Dabei fiel auf, dass bei der Aufgabe „Zimmer streichen“ keine einzige Skizze erstellt wurde, sodass diese Aufgabe aus dem Pool ausgeschlossen wurde. Bei den Aufgaben „Carport“ und „Rasensprenger“ wurde zwar nur in je einem Fall eine Skizze gezeichnet, allerdings war eine gewisse Varianz in der Skizzenhäufigkeit erwünscht, daher wurden die Aufgaben beibehalten.

Hinsichtlich der Lösungsraten zeigte sich bei der Aufgabe „Erbstück“ ein auffällig geringer Wert (Abbildung 6) (Kriterium **(3)**) und gleichzeitig eine auffallend hohe Bearbeitungszeit (Abbildung 7) (Kriterium **(4)**), weshalb diese Aufgabe zur Vermeidung von Boden- bzw. Deckeneffekten, die eine geringe Trennschärfe zur Folge haben könnten, ausgeschlossen wurde.

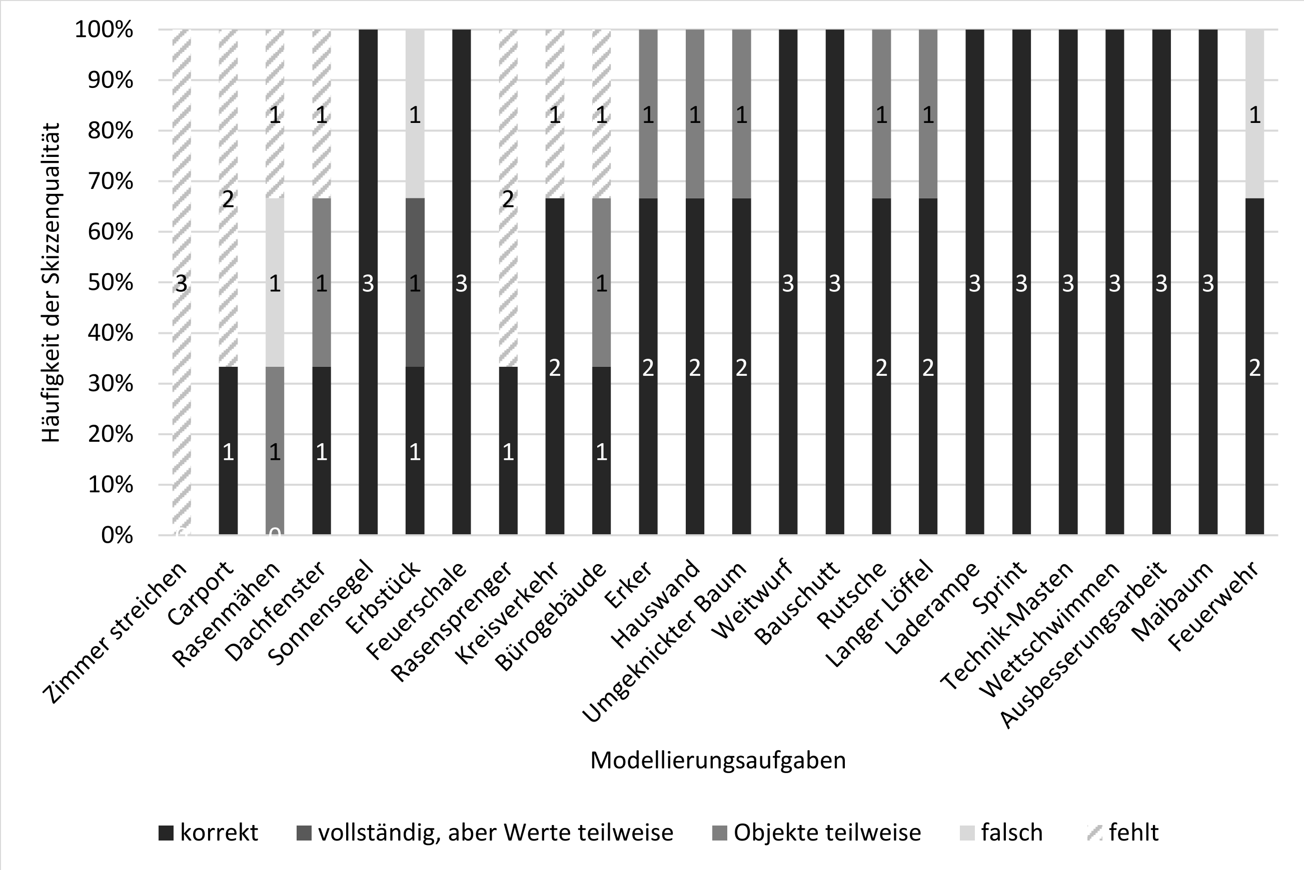


Abbildung 5: Absolute und relative Häufigkeit der Qualität selbst erstellter Skizzen zu den Modellierungsaufgaben in der Labor-Pilotierung

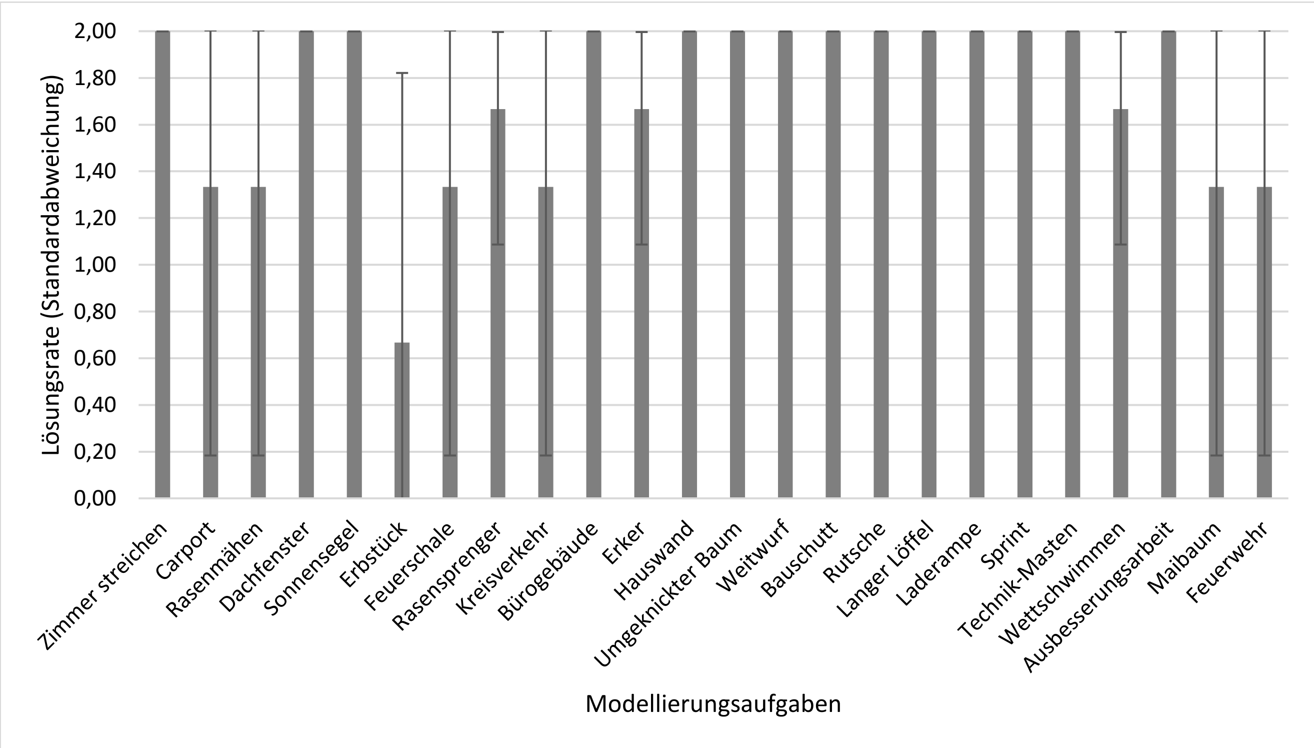


Abbildung 6: Mittlere Lösungsrate und Standardabweichung zu den Modellierungsaufgaben in der Labor-Pilotierung

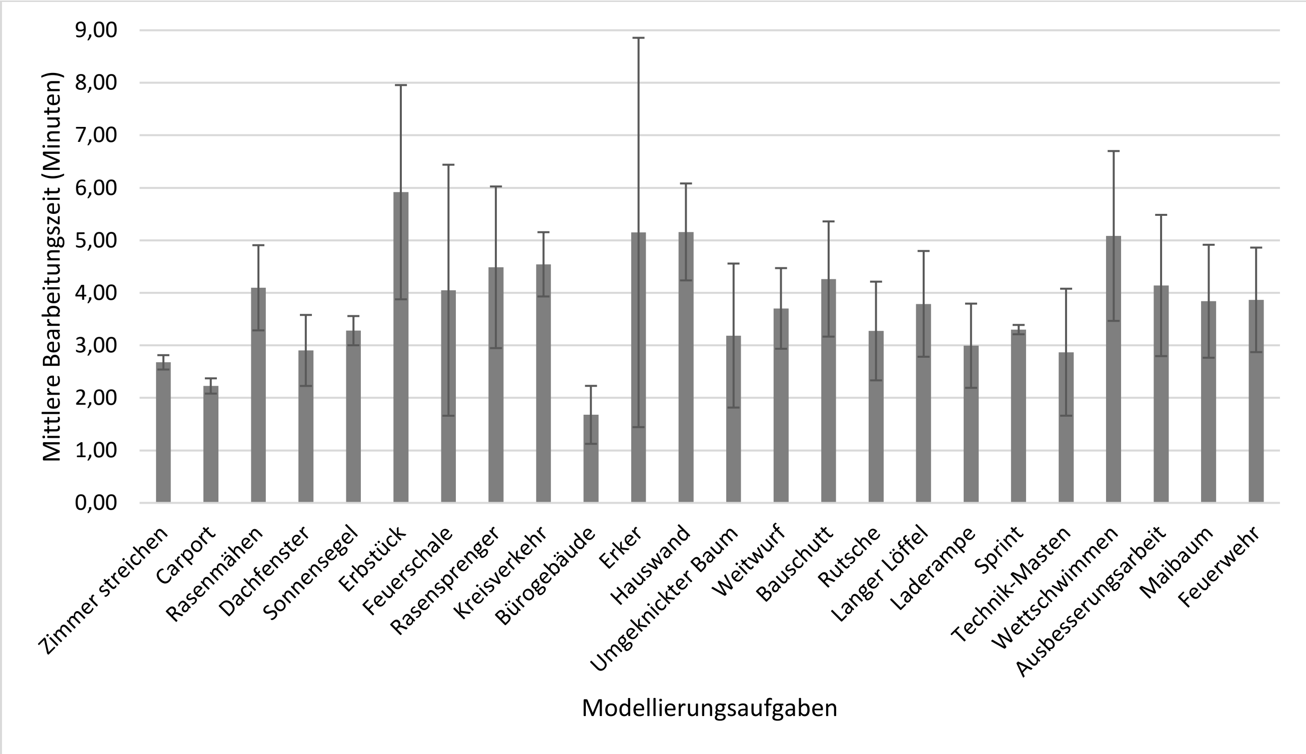


Abbildung 7: Mittlere Bearbeitungszeit und Standardabweichung zu den Modellierungsaufgaben in der Labor-Pilotierung

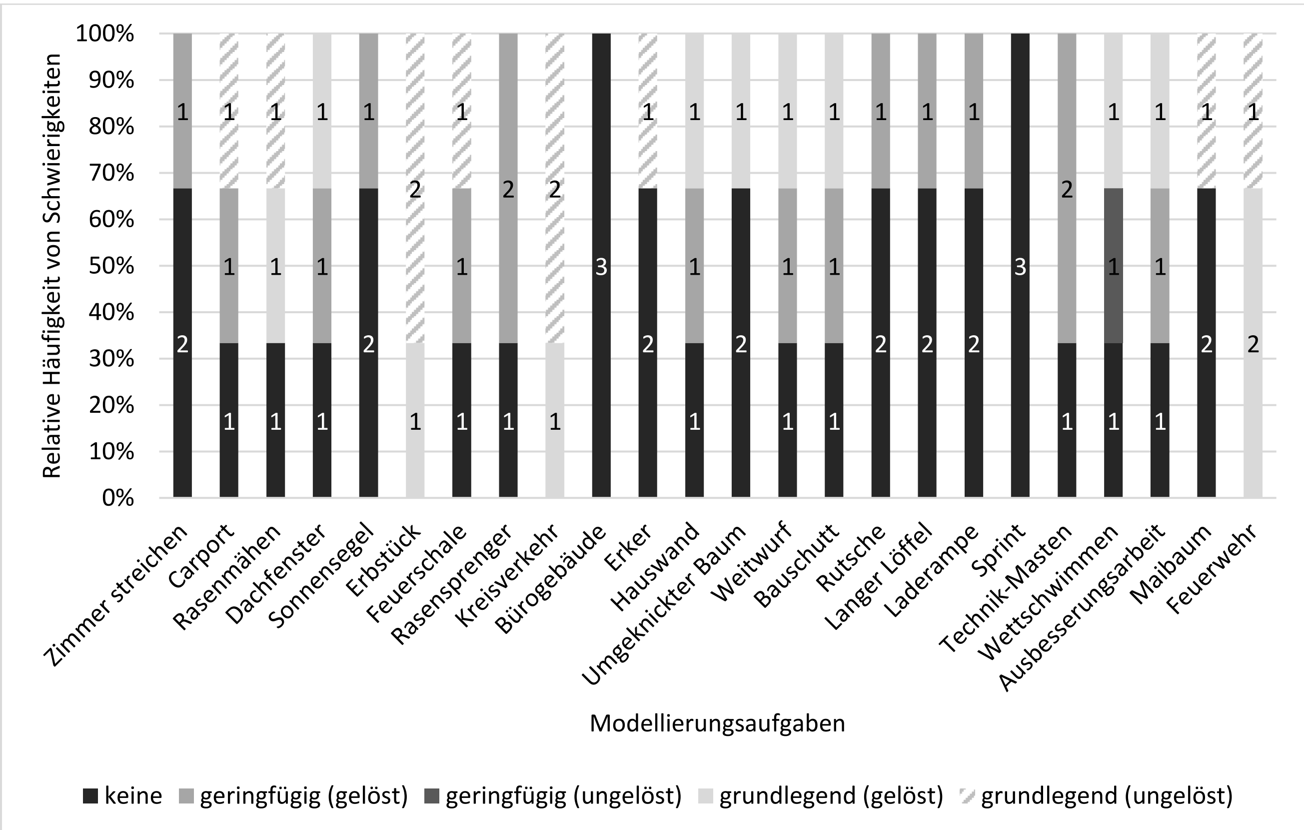


Abbildung 8: Absolute und relative Häufigkeiten des Auftretens von Schwierigkeiten im Lösungsprozess (geringfügig = Rechenfehler o. ä., grundlegend = falsches Situationsmodell, falsches mathematisches Modell o. ä.)

Weiterhin wurde das Auftreten von Schwierigkeiten im Lösungsprozess untersucht (Kriterium **(5),** Abbildung 8), da sich gezeigt hat, dass Skizzen vor allem dann hilfreich sind, wenn der Modellierungsprozess Hürden beinhaltet, die den Einsatz von Lösungsstrategien wie dem Skizzenzeichnen notwendig und sinnvoll machen. Bei den Aufgaben „Bürogebäude“ und „Sprint“ wurde deutlich, dass keinerlei Hürden im Modellierungsprozess auftraten, weshalb diese Aufgaben von der weiteren Untersuchung ausgenommen wurden. Zwei weitere Aufgaben aus dem Themenbereich *Satz des Pythagoras*, „Weitwurf“ und „Laderampe“, wurden ausgeschlossen, indem berücksichtigt wurde, welche der Aufgaben keine Varianz in der Lösungsrate (Abbildung 6) und der Skizzenqualität (Abbildung 5) aufwiesen (Kriterium **(6)**) und indem gleichzeitig darauf geachtet wurde, dass nicht mehr als eine Aufgabe aus einer Kategorie zum mathematischen Modell (Tabelle 1) herausgenommen werden.

6.1.3 Test zur geometriebezogenen Leistung

Ein weiteres Konstrukt, das sich in der Forschung als relevant erwiesen hat und deshalb im Rahmen der Erhebung als Kontrollvariable erfasst werden sollte, war die Fähigkeit zur Anwendung algorithmischer Verfahren und zur Lösung innermathematischer Problemstellungen, kurz benannt als innermathematische Kompetenz. Diese Kompetenz sollte vor allem im Hinblick auf die Themen der vorliegenden Studie erfasst werden, um herausfinden zu können, ob das Skizzenzeichnen bzw. die Aufforderung zum Skizzenzeichnen möglicherweise für Lernende mit einem bestimmten innermathematischen, themenbezogenen Leistungsniveau wirksamer ist als für andere. Der einzige bereits vorliegende Test zur Messung dieses Konstrukts, der für die neunte Klasse eingesetzt werden kann, auf Reliabilität und Validität geprüft und umfassend geeicht ist, ist der *Deutsche Mathematiktest für neunte Klassen* (DEMAT 9). Aufgrund der besonderen Eignung wurden die Aufgaben des DEMAT 9 als Orientierung zur Entwicklung der geometriebezogenen Items für die vorliegende Studie verwendet. Entsprechend der Testart des DEMAT 9 handelt es sich auch bei dem vorliegenden Test zur geometriebezogenen Leistung um einen psychologischen Leistungstest, der sich durch eine Mischform zwischen Speed- und Powertest auszeichnet. Die Bearbeitungszeit war begrenzt. Für die Bearbeitung des ersten Teils zum Thema *Satz des Pythagoras* hatten die Teilnehmenden 4:30 Minuten Zeit und für den Teil zu *geometrischen Flächen* 4 Minuten. Die Zeit wurde entsprechend den Themen aufgeteilt, damit alle Probandinnen und Probanden unabhängig vom Leistungsniveau Aufgaben zu beiden Themen bearbeiteten und sich nicht zu lange an den Aufgaben zum ersten Thema aufhielten. Bei den Aufgabenstämmen der Items handelt es sich sowohl um einschrittige, kalkülorientierte Aufgaben als auch um mehrschrittige Problemstellungen. Für jeden Themenbereich wurden gleichermaßen vier Aufgabenstämme erstellt, die die verschiedenen Anforderungsbereiche abdecken. Die Aufgaben zeichnen sich durch ein freies Antwortformat aus, bei dem mindestens eine Zahl in ein freies Kästchen eingetragen werden muss. Außerdem wurde Platz für einen Rechenweg gelassen, der aber nicht in die Bewertung einbezogen wurde (außer in Ausnahmefällen, wenn das Ergebnis in der Rechnung eindeutig erkennbar war, aber nicht in das Lösungskästchen übertragen wurde). Die

Aufgabenreihung wurde (innerhalb der themenbezogenen Testteile) nach aufsteigender Schwierigkeit vorgenommen, da eine Reihung nach „Sägezahnmuster“ wie bei den Modellierungsaufgaben aufgrund der geringen Itemanzahl hier nicht möglich war. Eine Reihung mit ansteigendem Schwierigkeitsniveau bot sich aus motivationalen Gründen an, um möglichst allen Teilnehmenden das Lösen der ersten Aufgaben zu ermöglichen.

6.1.4 Personenbezogener Fragebogen

Zur Erhebung der Hintergrundvariablen wurde den Modellierungsaufgaben ein personenbezogener Fragebogen vorangestellt (Abbildung 9). Im Rahmen des Fragebogens wurden Angaben zur Klasse, Kursniveau, Geschlecht, Mathematiknote auf dem letzten Zeugnis sowie zur Häufigkeit der Skizzennutzung und zur Einschätzung des Nutzens von Skizzen erhoben. Diese Angaben wurden als Indikatoren für die Konstrukte *Jahrgangsstufe*, *Geschlecht*, *allgemeine Mathematikleistung* und *Skizzenpräferenz* genutzt. Vor allem die allgemeine Mathematikleistung, geometriebezogene Leistung und Skizzenpräferenz haben sich in der empirischen Forschung als mögliche Einflussfaktoren erwiesen (vgl. Kapitel 3.4). Aber auch das Geschlecht und der Jahrgang wurden mit erhoben. Zwar haben sich diese in der bisherigen Forschung zum Skizzenzeichnen nicht als ausschlaggebend erwiesen, dennoch gibt es Studien, die altersbedingte Wirkungen beim Skizzenzeichnen zeigen (Van Essen & Hamaker, 1990) und geschlechtsspezifische Unterschiede werden zumindest in der allgemeinen Mathematikbildung immer wieder thematisiert (Reiss et al., 2019, S. 203 f.).

Jahrgangsstufe, *Geschlecht* und *Mathematiknote* wurden unmittelbar abgefragt, wohingegen zur Erhebung der *Skizzenpräferenz* verschiedene Items entwickelt wurden. Die *Skizzenpräferenz* stellt eine Verhaltensdisposition dar, bei der nicht die Leistung, sondern eine spontane und wahrheitsgemäße Selbstauskunft Aufschluss über die Ausprägung gibt. Die Operationalisierung des Konstrukts *Skizzenpräferenz* erfolgte...

(1) zum einen über die Frage, wie häufig die Person selbst Skizzen im Mathematikunterricht erstellt,

(2) zum anderen über die Frage, inwiefern die Person erwartet, dass sie Aufgaben besser löst, wenn eine Skizze dazu gezeichnet wird.

Diese beiden Fragen stellten jeweils den Aufgabenstamm dar. Bei der Entwicklung von Fragenstamm (2) wurde ein bereits erprobtes Item aus der Studie von Csíkos et al. herangezogen, das wie folgt lautet: „Do you agree that having drawn a good drawing about a word problem, you will find the solution easier?“ (Csíkos et al., 2012, S. 61). Aus der Frage wurde eine Ich-Aussage formuliert, um das Item stärker zu personalisieren, da sich Personalisierungen im Rahmen multimedialen Lernens als hilfreich erwiesen haben (Mayer, Fennell, Farmer, & Campbell, 2004; Moreno & Mayer, 2000).

Der Geltungsbereich beider Fragen ist zwar breit, allerdings handelt es sich um gleichsam unspezifische Fragestellungen, die breite und ungenaue Interpretationen bewirken können. Deshalb wurde der Geltungsbereich jeweils durch spezifische Angaben auf die prototypischen geometrischen Themen *Flächeninhalte*, *geometrische Körper*, *Satz des Pythagoras* und *Symmetrie* eingegrenzt, die im Rahmen des Mathematikunterrichts bis zur neunten Klasse behandelt werden (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 33). Durch diese Eingrenzung konnten sich die Teilnehmenden konkrete Situationen ins Gedächtnis rufen und präzisere Angaben machen. Die Fokussierung auf geometrische Themen erfolgte, da auch die Modellierungsaufgaben aus dem geometrischen Inhaltsbereich stammen und somit ein Zusammenhang dabei theoretisch am wahrscheinlichsten ist.

Wie häufig zeichnest du im Durchschnitt Skizzen im Mathematikunterricht?

in (fast) jeder Mathe-Stunde	ca. einmal pro Woche	ca. einmal im Monat	seltener als einmal im Monat
☐	☐	☐	☐

Wie häufig zeichnest du in der Regel Skizzen bei Aufgaben zum Thema...

	bei (fast) jeder Aufgabe	zu vielen Aufgaben	zu wenigen Aufgaben	zu (fast) gar keiner Aufgabe
... „Flächeninhalt“	☐	☐	☐	☐
... „Körper“	☐	☐	☐	☐
... „Satz des Pythagoras“	☐	☐	☐	☐
... „Symmetrie“	☐	☐	☐	☐

Ich bin der Meinung, dass ich Aufgaben besser löse, wenn ich eine Skizze zeichne...

	Trifft zu	Trifft eher zu	Trifft eher nicht zu	Trifft nicht zu
...im Allgemeinen	☐	☐	☐	☐
...zum Thema „Flächeninhalt“	☐	☐	☐	☐
...zum Thema „Körper“	☐	☐	☐	☐
...zum Thema „Satz des Pythagoras“	☐	☐	☐	☐
...zum Thema „Symmetrie“	☐	☐	☐	☐

Abbildung 9: Fragebogen zur Skizzenpräferenz

Die Formulierung der Themen ist hinsichtlich der begrifflichen Hierarchie nicht auf der gleichen Ebene, da z. B. nach dem Thema „Flächeninhalt“ (als Maß, das anhand von ebenen Figuren berechnet wird) und nach dem Thema „Körper“ gefragt wird, dem das Thema „ebene Figuren“ entsprechen würde. Die Formulierungen wurden dennoch so gewählt, da auf der einen Seite die Benennung der Themen in den Items möglichst allgemein gehalten (um ein breites Anwendungsgebiet der Skizze zu erfassen), auf der anderen Seite aber die in der Studie fokussierten Themen explizit benannt werden sollten. Auf diese Weise ergab sich die Itemstruktur des Fragebogens (Abbildung 9).

Wie bei Persönlichkeitstests üblich wurde der Zustimmungs- bzw. Ablehnungsgrad im Hinblick auf den Aufgabenstamm als Indikation für die Ausprägungen der Skizzenpräferenz verwendet. Da nicht davon auszugehen ist, dass die Präzision einer kontinuierlichen Analogskala die tatsächliche Präzision der Konstruktausprägung widerspiegelt, wurde eine diskret gestufte Ratingskala für die Antwortmöglichkeiten gewählt. Aufgrund der Subjektivität der Beantwortung ist eine Verfälschung in beiden Richtungen möglich. Sowohl eine Simulation einer scheinbar höheren Merkmalsausprägung als auch eine Dissimulation einer scheinbar niedrigeren Merkmalsausprägung können auftreten. Insofern wurde eine vierstufige Antwortskala als sinnvoll erachtet, da bei höheren Skalenstufen kein Zugewinn an Informationen mehr zu erwarten ist und bei eher wenigen Antwortkategorien das Risiko auf extreme Antworten gemindert wird (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 51). Durch die gerade Anzahl an Skalenpunkten wurde außerdem die neutrale Mitte vermieden, die häufig als Ausweichkategorie verwendet wird, wenn das Item unverständlich ist oder die Antwort verweigert wird (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 53). Es handelt sich um verbale Ratingskalen, damit eine möglichst gleichmäßige Interpretation der Antwortmöglichkeiten sichergestellt werden konnte. Je nach Inhalt wurden für die Formulierungen der vorliegenden Aufgabenstämme Häufigkeits- bzw. Intensitätsstufen genutzt. Wenn möglich, wurden konkrete Häufigkeitsanagaben gemacht, um den subjektiven Interpretationsspielraum so weit wie möglich einzugrenzen (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 52).

6.2 Erprobung der Instrumente im Feld

Bei der Feld-Pilotierung wurden die 18 übrigen Modellierungsaufgaben, aber auch der Einsatz des Fragebogens zur Skizzenpräferenz sowie der Test zur geometriebezogenen Leistung erprobt. Ziel der Feld-Pilotierung bestand zum einen darin, eventuelle Schwierigkeiten beim Einsatz der Instrumente in einer größeren Probandengruppe identifizieren zu können, zum anderen aber auch, um den Gesamtablauf der Studie zu testen, um letzte notwendige Optimierungen für die Hauptuntersuchung vornehmen zu können. Darüber hinaus galt es herauszufinden, ob die Experimentalbedingungen wirksam sind, d. h. ob die Schülerinnen und Schüler weitgehend Skizzen zeichnen, wenn sie dazu aufgefordert werden, und keine Skizzen zeichnen, wenn sie aufgefordert werden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen. Die Erprobung im Feld sollte außerdem genutzt werden, um anhand der Ergebnisse die Auswertungsschemata für die Hauptstudie zu entwickeln.

6.2.1 Ablauf

An der Feld-Pilotierungsstudie nahmen *n* = 23 Schülerinnen und Schüler (davon 5 weiblich, 8 männlich) aus der zehnten Klasse einer Oberschule mit gymnasialem Angebot teil. Es handelte sich dabei um eine Klasse, die auf dem Realschulniveau unterrichtet wurde, und der Altersdurchschnitt betrug 16 Jahre und 3 Monate (*SD* = 10.5 Monate).

Die Feld-Pilotierung begann mit Anweisungen und Informationen zum Ablauf, die ca. drei bis vier Minuten in Anspruch nahmen (Abbildung 10). Anschließend wurden die Testhefte, bestehend aus vier Teilen, bearbeitet. Zuerst füllten die Teilnehmenden den Fragebogen zu den personenbezogenen Daten aus. Anschließend wurde in einem zeitlichen Rahmen von 72 Minuten der Test zur Modellierungskompetenz – bestehend aus 18 Items, von denen neun zum *Satz des Pythagoras* und neun zum Thema *Flächeninhalte* waren – bearbeitet. Von diesem Teil des Testheftes gab es zwei unterschiedliche Versionen: in der ersten Version wurden die Lernenden dazu aufgefordert, die Aufgaben zu lösen, ohne etwas zu zeichnen; in der zweiten Version erhielten sie die Aufforderung, erst eine Skizze zu erstellen und dann die Aufgabe zu lösen. Der nächste Teil des Testhefts war für alle Probandinnen und Probanden identisch und bestand aus einem Fragebogen mit zehn Fragen zur Skizzenpräferenz. Zur Beantwortung des Fragebogens waren fünf Minuten vorgesehen. Der vierte und letzte Teil war ein Test zur geometriebezogenen Leistung, der zeitlich auf achteinhalb Minuten begrenzt war und acht Aufgaben umfasste. Das Testheft wurde in der Feld-Pilotierung in zwei Teile geteilt, um die Nutzung einer Formelsammlung im ersten Teil zu ermöglichen, die im zweiten Teil nicht mehr verwendet werden sollte, und gleichzeitig Priming-Effekte zu vermeiden.

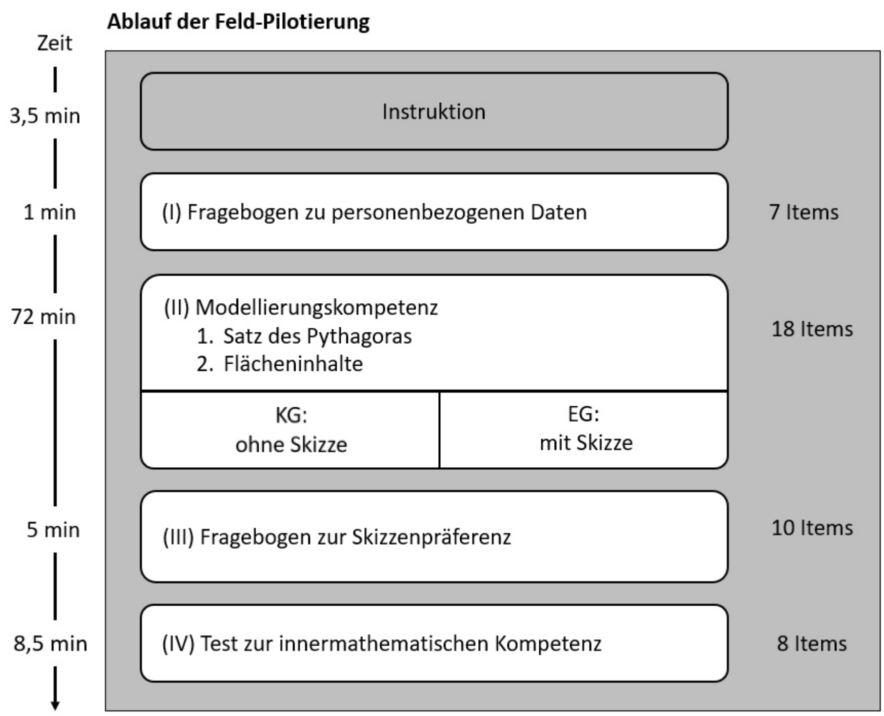


Abbildung 10: Schaubild zum Ablauf der Feld-Pilotierung

6.2.2 Entwicklung der Kategorienschemata

Anhand der Aufzeichnungen der Teilnehmenden in der Pilotstudie wurden die Kategorienschemata für die Auswertung der Modellierungsprozesse und der Skizzen in der Hauptstudie entwickelt. Als Methode wurde dabei die qualitative Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2018; Mayring, 2015) genutzt, mit dem Ziel, die Inhalte der Aufgabenbearbeitungen und Skizzen zu quantifizieren, um sie für statistische Analysen zugänglich zu machen. Es gibt einige Alternativen, wie die Grounded Theory, die Diskursanalyse, die Konversationsanalyse und die Narrative Analyse, um die wesentlichen, alternativen Analysemethoden der qualitativen Forschung zu nennen. Diese verfolgen anstelle der Quantifizierung jedoch andere Ziele, wie z. B. die Interpretation einzelner Analyseeinheiten, die Erarbeitung von Implikationen aus dem Material oder die Generierung struktureller und sozialer Implikationen. Im Hinblick auf die hypothesenprüfende Ausrichtung der vorliegenden Studie war die *Quantifizierung* zentrales Ziel der Analysen, weshalb sich die qualitative Inhaltsanalyse als zentrales Analyseverfahren erwies.

Der Unterschied zur klassischen, quantitativen Inhaltsanalyse besteht vor allem in der hermeneutisch orientierten Interpretation des Materials, die es als Ausschnitt eines Kommunikationszusammenhangs betrachtet. Die qualitative Form der Inhaltsanalyse ist von menschlichen Verstehens- und Interpretationsprozessen geprägt. Dagegen wird bei der klassischen Inhaltsanalyse das bloße Vorhandensein einer Kodiereinheit für sich allein – ungeachtet des Kontextes – ausgewertet.

Im Folgenden werden die zentralen Charakteristika qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) und Kuckartz (2018) kurz erläutert, um die Passung der Methode zum vorliegenden Material beschreiben zu können.

Die qualitative Inhaltsanalyse zeichnet sich dadurch aus, dass

- das *Vorgehen kategorienbasiert* ist. Die Entwicklung der Kategorien und die Einordnung des Materials stellen den Kern der qualitativen Inhaltsanalyse dar (Kuckartz, 2018).
- ihr Gegenstand stets eine Art von *Kommunikation*, also Symbolübertragung, ist. Dabei handelt es sich häufig um Sprache, aber es können z. B. auch Musik oder Zeichnungen sein (Mayring, 2015).
- es sich immer um *fixierte Kommunikation* handelt, die also z. B. verschriftlicht ist (Mayring, 2015).
- ein *systematisches Vorgehen* stattfindet, indem die Analyse einem konkreten Ablaufschema mit festgelegten Arbeitsschritten folgt. Wichtig dabei ist, dass das Ablaufschema je nach Material dennoch angepasst werden kann und muss, um den Spezifika des Materials gerecht zu werden (Kuckartz, 2018; Mayring, 2015).
- die Durchführung nach bestimmten *Regeln* durchgeführt wird, um das Vorgehen für die Forschungs-Community und externe Personen nachvollziehbar und überprüfbar zu machen, aber auch, um den wissenschaftlichen Methodenstandards gerecht zu werden (Kuckartz, 2018; Mayring, 2015).

- eine *Orientierung an Gütekriterien* stattfindet, dabei insbesondere die Interraterreliabilität, also die Übereinstimmung der Kodierung durch verschiedene Personen (vgl. Kapitel 7.3) (Kuckartz, 2018).
- das Vorgehen *theoriegeleitet* ist: Das Material soll nicht nur wiedergegeben, sondern auf theoriebasierte Fragestellungen hin analysiert und mit Hilfe theoretischer Konzepte interpretiert werden (Mayring, 2015).
- sie ein *schlussfolgerndes, hermeneutisch geprägtes Verfahren* ist, bei dem das Analysematerial nicht für sich allein stehend, sondern im Kontext des gesamten Kommunikationsprozesses analysiert wird (Kuckartz, 2018; Mayring, 2015).

Die qualitative Inhaltsanalyse wurde als Auswertungsmethode für die Skizzen und Bearbeitungen der Modellierungsaufgaben gewählt, da die Auswertung *kategorienbasiert* erfolgen sollte, um anschließend eine Quantifizierung zu ermöglichen und der hypothesenprüfenden Ausrichtung der Untersuchung gerecht zu werden. Beim Skizzenzeichnen und Bearbeiten der Modellierungsaufgaben handelt es sich um Übertragungen von Informationen und damit um *Kommunikation*sformen, die zudem schriftlich auf dem Papier *fixiert* wurden. Die Auswertung sollte *systematisch* anhand eines Ablaufschemas erfolgen, das sich durch die Anwendung von *Regeln* auszeichnet, um die Wissenschaftlichkeit der Ergebnisse sicherzustellen. Diese Wissenschaftlichkeit soll vor allem auch durch die Einhaltung von *Gütekriterien* gewährleistet werden. Die Auswertung orientierte sich an der *Theorie* und am Forschungsstand zum Zeichnen von Skizzen sowie mathematischen Modellieren. Das Zeichnen von Skizzen und auch das mathematische Modellieren sind komplexe Prozesse, von denen einzelne Aspekte interessieren, um etwa einzelne Komponenten der Zeichenkompetenz (z. B. das Darstellen von Objekten, das Eintragen von Werten) ausmachen zu können. Diese Aspekte müssen jedoch im Kontext der gesamten Lösung bzw. Skizze interpretiert werden, da erst die Einordnung in das Gesamtkonstrukt Aufschluss darüber gibt, ob z. B. ein Wert korrekt in die Skizze eingetragen ist. Demnach ist die Analyse ein *schlussfolgerndes, hermeneutisch geprägtes Verfahren.*

6.2.2.1 Anwendung der skalierend strukturierenden Inhaltsanalyse

In der Literatur finden sich verschiedene Varianten qualitativer Inhaltsanalyse[28], die je nach Zielsetzung der Studie bzw. der Auswertung angewendet werden können. Bei der vorliegenden Studie wurde die *skalierend strukturierende qualitative Inhaltsanalyse*[29] angewendet, denn das Ziel der Analyse bestand darin, eine *Bewertung* des Materials zu erreichen, um Aussagen über Zusammenhänge zwischen einzelnen Skizzenkomponenten, dem Skizzenzeichnen und der Skizzenaufforderung mit der Modellierungsleistung machen zu können (Kuckartz, 2018, S. 133). Die Einschätzungsdimensionen stellen dabei Variablen dar, deren Ausprägungen sich i.d.R. – und auch bei der vorliegenden Studie – auf ordinalem Skalenniveau befinden.

[28] Schreier (2014) gibt einen Überblick über die verschiedenen Varianten der qualitativen Inhaltsanalyse.

[29] Die skalierend strukturierende qualitative Inhaltsanalyse wird im Folgenden kurz als skalierende Inhaltsanalyse bezeichnet.

Trotzdem besteht das Kategoriensystem nicht nur aus skalierenden Dimensionen, sondern es wurden auch inhaltliche Ausprägungen mit einbezogen. Meist sind die Übergänge zwischen den Ausprägungen fließend, da die Bewertung des Materials immer zu einem gewissen Grad subjektiv ist. Umso wichtiger sind besonders genaue Definitionen und Abgrenzungen der Ausprägungen bei dieser Form der Analyse. Eine weitere Besonderheit besteht in der Bildung einer Restkategorie, die hier notwendig ist, um unverständliches oder unpassendes Material einordnen zu können. Anders als bei der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse ist zudem, dass auch die Unterkategorien meist theoriegeleitet und nicht anhand des Materials entwickelt werden.

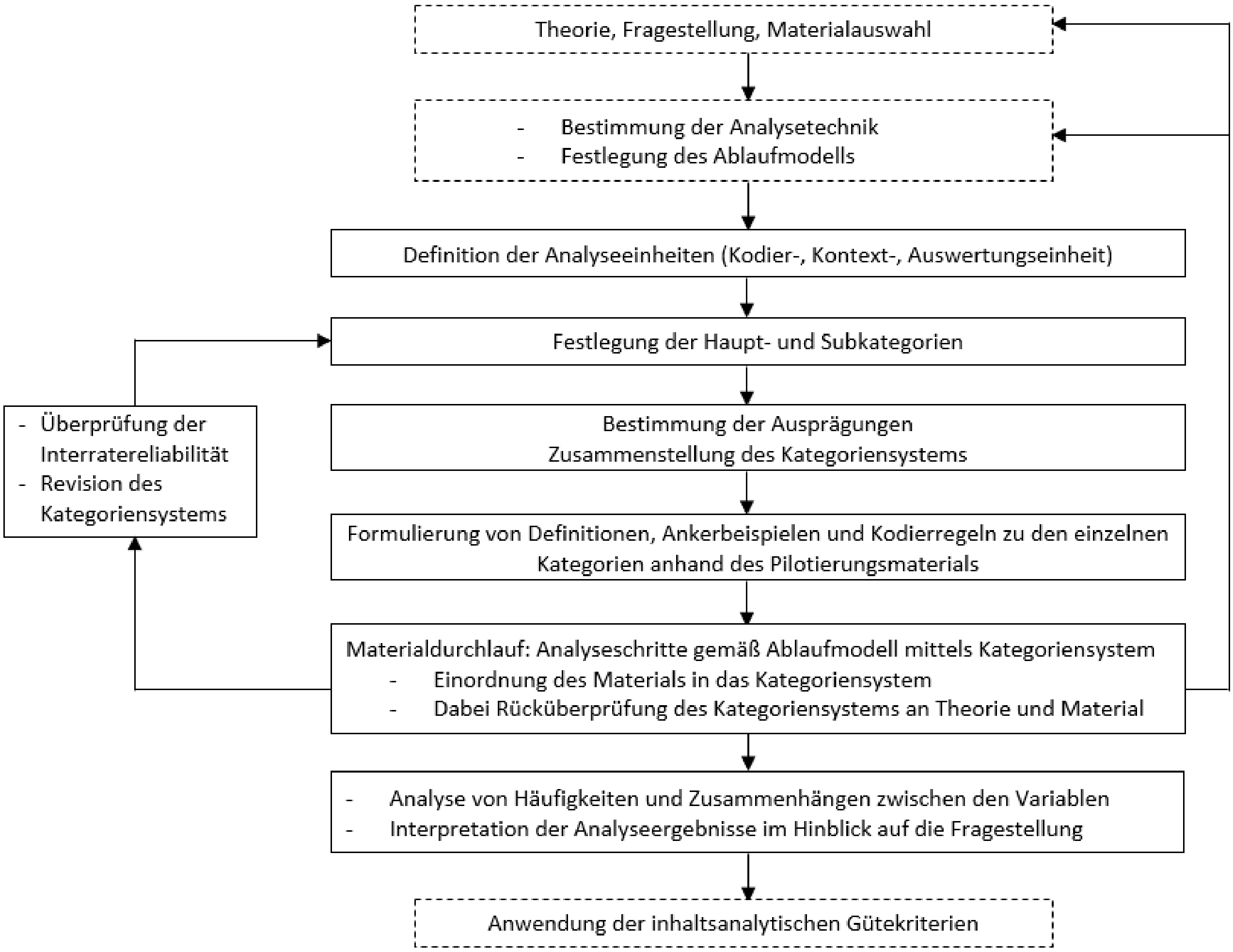


Abbildung 11: Ablaufmodell der skalierend strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse, angelehnt an (Mayring, 2010, S. 60)

Der Ablauf der skalierenden Inhaltsanalyse folgt im Allgemeinen der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse, zeichnet sich aber durch einige besondere Schritte aus. Deshalb ist der Ablauf der gesamten Auswertung der vorliegenden Studie bestehend aus den grundlegenden Schritten der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse (Kästchen mit gestricheltem Rand) sowie den spezifischen Schritten der skalierenden Inhaltsanalyse (Kästchen mit durchgezogenem Rand) in Abbildung 11 dargestellt und wird im Folgenden beschrieben.

Ausgangspunkt der qualitativen Inhaltsanalyse waren die Fragestellungen der Untersuchung (vgl. Kapitel 5), auf deren Grundlage alle Entscheidungen bezüglich des Auswertungsverfahrens getroffen wurden. Hinzu kam der theoretische Hintergrund bzw. der Forschungsstand zum Skizzenzeichnen beim mathematischen Modellieren (vgl. Kapitel 2-4.8). Auf Grundlage der fixierten Daten in Form der schriftlich bearbeiteten Testhefte wurde eine Materialauswahl getroffen: Als Datengrundlage für die qualitative Inhaltsanalyse dienen sämtliche Skizzen und Schülerlösungen, die zu den Modellierungsaufgaben erstellt wurden.

Im nächsten Schritt fand die Festlegung der Analyse statt, indem die Analysetechnik, der Ablauf der Analyse sowie die Analyseeinheiten bestimmt wurden. Es folgte das „Herzstück" der qualitativen Inhaltsanalyse (Schreier, 2014): die Entwicklung des Kategoriensystems durch Festlegung der Kategorien, Bestimmung der Ausprägungen und Formulierung von Definitionen, Ankerbeispielen und Kodierregeln. Dies geschah anhand des Materials aus der Feld-Erprobung.

Anschließend fanden mehrere Durchläufe, erneute Überarbeitungen und Überprüfungen der Interraterreliabilität anhand des Materials der Hauptuntersuchung statt, die in Kapitel 7.3 genauer beschrieben werden. Nach Abschluss der Kodierung wurden die Daten der Hauptstudie mithilfe statistischer Analyseverfahren ausgewertet und im Hinblick auf die Fragestellung sowie vor dem theoretischen Hintergrund interpretiert. Der letzte Schritt bestand in der Überprüfung der Gütekriterien, die ebenfalls in Kapitel 7.3 beschrieben werden. Die zentralen Schritte der skalierenden Inhaltsanalyse, also die Festlegung der Analyse sowie die Entwicklung der Kategoriensysteme werden in den folgenden Kapiteln genauer beschrieben.

6.2.2.2 Festlegung der Analysetechnik und -einheiten

Bei der Bestimmung der Analysetechnik lassen sich drei verschiedene Formen des Interpretierens unterscheiden: Zusammenfassung, Explikation und Strukturierung (Mayring, 2015, S. 52). Ziel einer Zusammenfassung ist die Reduktion des Materials auf das Wesentliche, indem das Material abstrahiert wird, sodass ein neues, übersichtliches Abbild des Materials entsteht. Diese Technik eignete sich weder für Skizzen noch für Aufgabenlösungen, da diese bereits eine verdichtete Form von Informationen darstellen. Bei der Explikationstechnik wird zu dem jeweiligen Materialteil, das kodiert werden soll, zusätzliches Material hinzugezogen, das eine erweiterte Erklärung oder Interpretation ermöglicht. Auf diese Weise soll ein besseres Verständnis des Materialteils ermöglicht werden. Diese Technik wurde in der Analyse der Skizzen und Modellierungsprozesse genutzt, indem bei der Analyse einzelner Skizzen- oder Lösungsbestandteile weitere Bestandteile oder die gesamte Skizze bzw. der gesamte Lösungsweg zur Explikation hinzugezogen wurde. Auch die Strukturierungstechnik wurde bei der vorliegenden Analyse angewendet, indem einzelne Aspekte (z. B. bestimmte Teile der Skizze oder die mathematische Lösung) aus dem Material herausgefiltert wurden. Somit wurde bei der vorliegenden Analyse eine kombinierte Technik aus Strukturierung und Explikation angewendet (vgl. Kapitel 6.2.2.1, Abbildung 11).

Anschließend wurden die Analyseeinheiten, d. h. die Auswertungs-, die Kodier- und die Kontexteinheiten definiert. Die *Auswertungseinheit* stellt eine vollständige Einheit dar, die in das gesamte Kategoriensystem eingeordnet wird. Somit war eine Auswertungseinheit für die vorliegende Analyse jeweils die vollständige Schülerlösung bestehend aus dem Lösungsweg und ggf. der Skizze. Insgesamt lagen bei der Pilotstudie 23 Testheftbearbeitungen mit je 18 Modellierungsaufgaben vor, sodass sich insgesamt 414 Auswertungseinheiten ergaben.

Bei den *Kodiereinheiten* handelt es sich hingegen um die kleinsten Materialbestandteile, die innerhalb einer Kategorie verortet werden können. Bei den Skizzenkategorien waren dies die jeweiligen Bestandteile der Skizze. Eine Aufzeichnung wurde dann als Skizze gewertet, wenn eine visuelle Anordnung geometrischer Objekte vorgenommen wurde. Je nach Kategorie konnten dann einzelne Objekte, Zahlenwerte usw. oder die gesamte Skizze als Kodiereinheit gelten. Die Anzahl der Kodiereinheiten ist je nach Auswertungseinheit unterschiedlich, da die Anzahl an Objekten, Zahlenwerten usw. je nach Aufgabe variierte. Bei der Kodierung der Modellierungsleistung stellten in erster Linie die symbolischen Aufzeichnungen (Zahlen, Variablen, Text) die Kodiereinheiten dar.

Die *Kontexteinheit* wird als die größte Einheit verstanden, die zur Explikation einer Kodiereinheit hinzugezogen werden kann, mit dem Ziel, die jeweilige Kodiereinheit besser verstehen und einordnen zu können. Bei der Kategorisierung der Skizzenbestandteile konnten alle weiteren Skizzenbestandteile bzw. die gesamte Skizze als Kontexteinheit hinzugezogen werden, es wurden aber keine Rückschlüsse von weiteren Aufgabenbearbeitungen auf die Einordnung von Skizzenteilen zugelassen. Zur Deutung und Kodierung der Modellierungsleistung bzw. der Leistung in den Teilprozessen des Modellierens wurden sowohl alle symbolischen Aufzeichnungen als auch die Skizzen genutzt, da auch diese z. B. über die Bewältigung des Verstehens- und Strukturierungsprozesses Aufschluss geben können.

6.2.2.3 Entwicklung der Kategoriensysteme

Die Kategorienorientierung ist das zentrale Merkmal der qualitativen Inhaltsanalyse und somit ist das Kategoriensystem grundlegend für den gesamten Analyseprozess. Die Kategorien sind gleichzusetzen mit den verschiedenen Variablen, deren jeweilige Ausprägung für die einzelnen Materialteile ermittelt werden soll. Das Erstellen und Anwenden des Kategoriensystems sind interpretative Prozesse, die es im Gegensatz zur quantitativen Inhaltsanalyse erlauben, auch latente Merkmale des Analysematerials einzubeziehen. Bei der Kodierung findet eine Durchsicht des Materials im Hinblick auf das Kategoriensystem statt, und die zuvor definierten Kodiereinheiten werden je nach Ausprägung einer Kategorie zugeordnet. Um die Zugehörigkeit zu den Ausprägungen zu verdeutlichen, werden den Kodiereinheiten bestimmte Zahlen, die Codes, zugewiesen. Die Vergabe der Codes dient dazu, Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Material ermitteln zu können. Insbesondere bei der skalierenden Inhaltsanalyse dienen Codes aber auch dazu, das Material zu quantifizieren und so die Anwendung statistischer Verfahren zu ermöglichen.

Die entwickelten Kategorien müssen einige methodologische Kriterien erfüllen (Bortz & Döring, 2006, S. 140–143): Genauigkeit, Exklusivität und Exhaustivität. Das *Genauigkeit*skriterium besteht darin, dass präzise Definitionen und Indikatoren für jede Kategorie formuliert werden müssen, um eine eindeutige Zuordnung der Materialbestandteile zu ermöglichen. Das Kriterium der *Exklusivität* beinhaltet, dass die Kategorien so definiert sein müssen, dass ein Materialteil immer nur einer Kategorie zugeordnet wird. Wichtig dabei ist also, dass die Kategorien immer auf einer Hierarchieebene hinsichtlich ihrer Bedeutung angesiedelt sind, und dass sie sich gegenseitig ausschließen. Gleichzeitig kann aber ein Untersuchungsobjekt hinsichtlich verschiedener Merkmale kategorisiert werden. Ein weiteres Kriterium ist die *Exhaustivität*: Die Kategorien sollen ausschöpfend sein, d. h. jeder Materialteil muss in einer Kategorie eingeordnet werden können. Falls eine Restkategorie notwendig ist (in der vorliegenden Studie z. B. unsinnige oder abgebrochene Antworten), sollte beachtet werden, dass immer nur Ausnahmefälle dort eingeordnet werden müssen, da eine solche Kategorie für wissenschaftliche Auswertungen i.d.R. unbrauchbar ist.

Sofern Forschungsstand und theoretischer Hintergrund zu einem Thema bereits gut ausdifferenziert sind und die Untersuchung das Ziel hat, Hypothesen zu prüfen, eignet sich die deduktive Kategorienentwicklung (vgl. Kapitel 7). Dabei werden die Kategorien aus bestehenden theoretischen und empirischen Kenntnissen abgeleitet. Die induktive Herangehensweise, bei der die Kategorien aus dem Material heraus entwickelt werden, eignet sich dagegen bei geringen theoretischen und empirischen Erkenntnissen bzw. bei einer explorativen Ausrichtung der Studie. Dabei handelt es sich jedoch nicht um zwei gegensätzliche Methoden, sondern vielmehr um zwei Extreme eines Kontinuums, auf dem sich zahlreiche Mischformen verorten lassen. So wurde für die Kodierung der Modellierungsprozesse und der Skizzen bei der vorliegenden Studie eine deduktiv-induktive Mischform verwendet, bei der vorläufige Kategorien anhand der bestehenden theoretischen und empirischen Erkenntnisse gebildet wurden. Anschließend wurden die Kategorien anhand des Materials weiter präzisiert und ergänzt. Die Vorgehensweise wird bewusst als deduktiv-induktiv bezeichnet (deduktiv vorangestellt), weil die Ableitung der Kategorien aus den bestehenden Forschungserkenntnissen im Vordergrund stand.

In den folgenden Kapiteln werden die Kategoriensysteme zu den Modellierungsprozessen und Skizzen vorgestellt. Diese umfassen die Benennung der Kategorien, inhaltliche Beschreibungen, Ankerbeispiele und Abgrenzungsmerkmale.

6.2.2.4 Kodierung der Modellierungsprozesse

Die Modellierungsleistung sowie die Leistung in den Teilprozessen des mathematischen Modellierens wurden über die Aufzeichnungen zu den Modellierungsaufgaben in den Testheften operationalisiert. Dabei wurden die Schritte des (1) Vereinfachens und Strukturierens, des (2) Bildens eines allgemeinen mathematischen Modells, des (3) Bildens eines spezifischen mathematischen Modells und des (4) mathematischen Arbeitens betrachtet. In diagnostischen Modellen des Modellierungsprozesses folgen nach dem mathematischen Arbeiten in der

Regel weitere Phasen: die Interpretation und Validierung des Ergebnisses. Allerdings lassen sich diese Prozesse anhand der schriftlichen Bearbeitungen kaum nachvollziehen. Darüber hinaus hat sich das Skizzenzeichnen primär in den ersten Phasen des mathematischen Modellierens, beim Verstehen, Vereinfachen und Strukturieren sowie Mathematisieren als wirksam erwiesen (vgl. Kapitel 4.8). Daher wurden diese Phasen in der vorliegenden Studie in den Fokus genommen.

Wie bereits in vorherigen Studien zu mathematischen Modellierungsprozessen (Besser, Hagena, & Leiss, 2014, S. 54 f.) wurde von den schriftlich vorliegenden Bearbeitungsprozessen auf Aspekte mathematischen Modellierens geschlossen, anhand derer die erfolgreiche Bewältigung einzelner Modellierungsphasen und des Modellierungsprozesses insgesamt eingeschätzt wird. Um dennoch Objektivität wahren zu können, wurde das Kodiermanual wie in Kapitel 6.2.2.1 beschrieben in einem aufwändigen Prozess mit mehrfachen Kodierungsdurchläufen sukzessive modifiziert, korrigiert und spezifiziert, um möglichst sichere Rückschlüsse auf die Aspekte des Modellierens zu ermöglichen.

Aus der bestehenden Literatur und Forschung zum mathematischen Modellieren wurden folgende drei Kategorien abgeleitet: *Korrekte*, *fehlerhafte* und *fehlende Bewältigungen* der jeweiligen Phasen bzw. des Modellierungsprozesses im Allgemeinen. Darüber hinaus traten in der vorliegenden Studie einige fehlerhafte Lösungswege besonders häufig auf, die für die Analysen interessant erschienen, weshalb diese separat in die Kategorie *häufig aufgetretene falsche mathematische Lösungen* eingeordnet wurden. Die Codes 7, 8, 9 und 999 wurden jeweils übergeordnet für den Modellierungsprozess im Allgemeinen, aber auch für die einzelnen Phasen vergeben, sofern einer dieser Fälle auftrat.

Kodiert wurde zum einen der Modellierungsprozess als Ganzes (Tabelle 2), zum anderen wurden aber auch Teilprozesse des Modellierens kodiert (Tabelle 3). [30] Für die späteren statistischen Auswertungen der Hauptstudie wurden für alle Codes außerdem entsprechende Scores festgelegt. Dabei wurde ein binäres Scoring mit dem Score 1 für korrekte und Score 0 für alle Art von fehlerhaften und fehlenden Lösungen verwendet.

[30] Die detaillierten Kodiermanuale mit allen Kodierregeln sind im Anhang G einsehbar, Beispiele für kodierte Schülerlösungen sind im Anhang H.

Tabelle 2: Kurzversion des Kodierschemas zur Auswertung des gesamten Modellierungsprozesses

Cd.	Sc.	Kategorie	Beschreibung
0	0	Fehlerhafter Modellierungsprozess	fehlerhaftes mathematisches Resultat aufgrund eines fehlerhaften mathematischen Modells und/ oder Fehlern beim mathematischen Arbeiten
1	0	Häufig aufgetretener fehlerhafter Modellierungsprozess	korrekte Modellierung auf Grundlage eines fehlerhaften mathematischen Modells, das häufig bei der Aufgabe aufgetreten ist
2	1	Korrekter Modellierungsprozess	Modellierungsprozess bis zum mathematischen Ergebnis vollständig korrekt durchgeführt (bis zu 2 geringfügige Flüchtigkeitsfehler akzeptiert)

Anmerkungen: Cd. = Code; Sc. = Score

Tabelle 3: Kurversion des Kodierschemas zur Auswertung der einzelnen Modellierungsphasen

Cd.	Sc.	Kategorie	Beschreibung
Bilden des Realmodells durch Vereinfachen und Strukturieren			
0	0	Fehlerhaftes Realmodell	Realmodell enthält *nicht* alle relevanten Basisgrößen oder Basisannahmen (oder ist gar nicht erkennbar)
2	1	Korrektes Realmodell	Realmodell enthält alle relevanten Basisgrößen und Basisannahmen
Biden des allgemeinen mathematischen Modells			
0	0	Fehlerhaftes allgemeines mathematisches Modell	kein adäquates mathematisches Verfahren ausgewählt oder kein Verfahren ersichtlich und Ergebnis ist falsch
1	0	Häufig falsches allgemeines mathematisches Modell	mathematisches Verfahren ausgewählt, das nicht adäquat, aber in Studie häufig
2	1	Korrektes allgemeines mathematisches Modell	adäquates mathematisches Verfahren ausgewählt
Bilden des spezifischen mathematischen Modells			
0	0	Fehlerhaftes spezifisches mathematisches Modell	mathematisches Modell nicht adäquat spezifiziert, da nicht alle Basisannahmen und Basisgrößen berücksichtigt
1	0	Häufig falsches spezifisches mathematisches Modell	häufig falsches mathematisches Modell adäquat spezifiziert
2	1	Korrektes spezifisches mathematisches Modell	mathematisches Modell adäquat spezifiziert, indem alle Basisannahmen und Basisgrößen berücksichtigt
Berechnen des mathematischen Resultats			
0	0	Fehlerhaftes mathematisches Resultat	mind. ein mathematischer Fehler, sodass mathematisches Resultat fehlerhaft oder kein innermathematisches Arbeiten ersichtlich
1	0	Korrektes mathematisches Resultat zu häufig falschem mathematischem Modell	zum häufigen falschen mathematischen Modell sind alle innermathematischen Arbeitsschritte sowie das mathematische Resultat korrekt
2	0	Geringfügig fehlerhaftes mathematisches Resultat	maximal 2 geringfügige Flüchtigkeitsfehler
3	1	Korrektes mathematisches Resultat	alle innermathematischen Arbeitsschritte bzw. mathematisches Resultat korrekt

6.2.2.5 Kodierung der Skizzen

Zur Kodierung der Skizzenqualität und des Abstraktionsgrades der Skizzen wurden die Kategorien deduktiv anhand vorliegender, empirisch erprobter Kategorienschemata aus der Literatur zum Zeichnen von Skizzen entwickelt. Es ergaben sich folgende Dimensionen von Skizzenmerkmalen:

- Darstellung der lösungsrelevanten Objekte in der Skizze
- Darstellung der lösungsrelevanten Relationen in der Skizze
- Beschriftung der Skizze mit lösungsrelevanten Zahlenwerten
- Explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze
- Abstraktionsgrad der Skizze

Die ersten drei Dimensionen werden in der bisherigen Forschung eindeutig dem Merkmal der Skizzenqualität zugeordnet. Zur expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze liegen bisher nur wenige Forschungsergebnisse vor, weshalb diese Dimension separat betrachtet wurde. In gleicher Weise wurde mit dem Abstraktionsgrad der Skizzen verfahren, bei dem aufgrund der kontroversen Forschungsbefunde bisher unklar ist, inwiefern dieser ein leistungsförderliches Merkmal von Skizzen darstellt. Die Kategorienschemata wurden im Rahmen der Feldpilotierung vor allem im Hinblick auf die Beschreibungen und die Kodierregeln fortwährend modifiziert und spezifiziert, bis die endgültigen Versionen feststanden.

Zur Beurteilung der allgemeinen Skizzenqualität wurde ein General-Score entwickelt (Tabelle 4), der die empirisch mehrfach belegten Qualitätskriterien beinhaltete (Objekte, Relationen und Zahlenwerte). Zahlreiche verschiedene Möglichkeiten wurden für die Bildung des Scores in Erwägung gezogen – von einem fein gestuften Score mit Gewichtungen bis hin zu einem summativen Score. Entscheidend für die endgültige Score-Bildung war die Absicht, damit eine möglichst intervallskalierte Stufung zu erreichen, die sich für die geplanten statistischen Analysen eignet. Daher wurde letztendlich eine dreistufige Kodierung bzw. ein dreistufiger Score gebildet:

Tabelle 4: Kurzversion des Kodierschemas zur allgemeinen Skizzenqualität

Cd	Sc	Kategorie	Beschreibung
0	0	Falsche Skizze	keine der relevanten Relationen korrekt dargestellt
1	1	Unvollständige Skizze	Teil der Objekte und Relationen korrekt dargestellt oder alle Objekte und Relationen korrekt dargestellt, aber nur Teil der lösungsrelevanten Werte korrekt eingetragen
2	2	Vollständig korrekte Skizze	alle Objekte, Relationen und Zahlenwerte korrekt dargestellt

Anmerkungen: Cd. = Code; Sc. = Score

Beim Kodieren der einzelnen Kriterien (Tabelle 5) wurde jeweils der Code 0 (falsch, unvollständig, fehlend) oder 1 (vollständig korrekt) vergeben bzw. beim Abstraktionsgrad der Score 0 für situative Skizzen und der Score 1 für schematische Skizzen. Diese Codes entsprachen gleichzeitig auch den Scores, mit denen die statistischen Analysen in der Hauptstudie durchgeführt werden.[31]

Tabelle 5: Kurzversion des Kodierschemas zu den Skizzenqualitätskriterien

Cd	Sc	Kategorie	Beschreibung
Darstellung der lösungsrelevanten Objekte in der Skizze			
0	0	Falsche/ unvollständige/ keine Darstellung der Objekte	relevante Objekte (z.T.) nicht erkennbar
1	1	Vollständig korrekte Darstellung der Objekte	relevante Objekte *alle* vollständig in der Skizze dargestellt
Darstellung der lösungsrelevanten Relationen in der Skizze			
0	0	Falsche/ unvollständige/ keine Darstellung der Relationen	Relationen zwischen Objekten (z.T.) unvollständig oder falsch dargestellt
1	1	Vollständig korrekte Darstellung der Relationen	Relationen *aller* lösungsrelevanten Objekte korrekt dargestellt
Beschriftung der Skizze mit lösungsrelevanten Zahlenwerten			
0	0	Falsch/ unvollständig/ gar nicht eingetragene Zahlenwerte	Zahlenwerte (z.T.) an einer falschen Position oder gar nicht in der Skizze eingetragen
1	1	Vollständig korrekt eingetragene Zahlenwerte	Zahlenwerte *alle* an korrekter Position in der Skizze eingetragen
Explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze			
0	0	Falsches/ fehlendes mathematisches Modell	mathematisches Modell falsch oder gar nicht in der Skizze dargestellt
1	1	Korrektes mathematisches Modell	mathematisches Modell korrekt und explizit in der Skizze dargestellt
Abstraktionsgrad der Skizze			
0	0	Situative Skizze	mind. Hälfte der Objekte in der Skizze situativ dargestellt, d. h. mit zusätzlichen unwesentlichen Eigenschaften
1	1	Schematische Skizze	überwiegender Teil an Objekten in der Skizze stark vereinfacht dargestellt (Linie, geometrische Formen usw.)

Anmerkungen: Cd. = Code; Sc. = Score

6.2.3 Konsequenzen für den Ablauf der Hauptstudie

Zunächst wurden die Ergebnisse der Pilotierung ausgewertet, um die Umsetzung der Experimentalbedingungen zu überprüfen. Dafür wurden die Skizzenhäufigkeiten in der Gruppe mit Skizzenverbot und in der Gruppe mit Skizzenaufforderung betrachtet. Die Ergebnisse zeigten, dass in der Gruppe mit Skizzenverbot insgesamt nur fünf Skizzen gezeichnet wurden (je eine bei den Aufgaben „Rutsche“, Kreisverkehr“, „Dachfenster“, „Bauschutt“, und „Langer Löffel“) (Abbildung 12). In der Gruppe mit Skizzenaufforderung wurden bei den ersten neun Aufgaben

[31] Die ausführliche Fassung des Kodiermanuals inklusive Kodierregeln und Skizzen-Beispielen befinden sich im Anhang I.

beim Großteil der Bearbeitungen Skizzen erstellt (Abbildung 13). Danach fielen die Häufigkeiten deutlich ab. Die fehlenden Skizzen deckten sich allerdings größtenteils mit den fehlenden Bearbeitungen (Abbildung 15) und auch in der Gruppe mit Skizzenverbot war ein deutlicher Anstieg fehlender Bearbeitungen bei den letzten Aufgaben zu verzeichnen (Abbildung 14). Insofern ist davon auszugehen, dass die geringere Skizzenhäufigkeit bei den hinteren Aufgaben im Testheft nicht auf ein Scheitern der Implementation der Skizzenaufforderung hindeutete. Vielmehr schien die Anzahl der Modellierungsaufgaben zu umfangreich für die Teilnehmenden gewesen zu sein, sodass sie es aufgrund der begrenzten Testzeit nicht schafften, alle Aufgaben zu bearbeiten bzw. zu allen Aufgaben Skizzen zu erstellen. Insbesondere die letzten vier Aufgaben wurden kaum noch bearbeitet (Abbildung 14 und Abbildung 15).

Aufgrund dieser Ergebnisse ergaben sich für die Hauptstudie folgende Konsequenzen: Die Implementation der Experimentalbedingungen (Skizzenverbot und Skizzenaufforderung) wurden für die Hauptstudie beibehalten, da diese wirksam sind. Der Umfang des Modellierungstests scheint jedoch für die Teilnehmenden zu umfassend gewesen zu sein, um alle Items zu bearbeiten, weshalb es sinnvoll erschien, den Test zu kürzen. Gemäß der unterrichtenden Fachlehrkraft handelte es sich um eine besonders leistungsschwache Lerngruppe. Um eine möglichst hohe Itemanzahl beizubehalten und damit die erforderliche Teststärke zu erreichen, und gleichzeitig eine Verringerung des Zeitfaktors zu bewirken, wurde entschieden, zwei Items aus dem Itempool herauszunehmen.

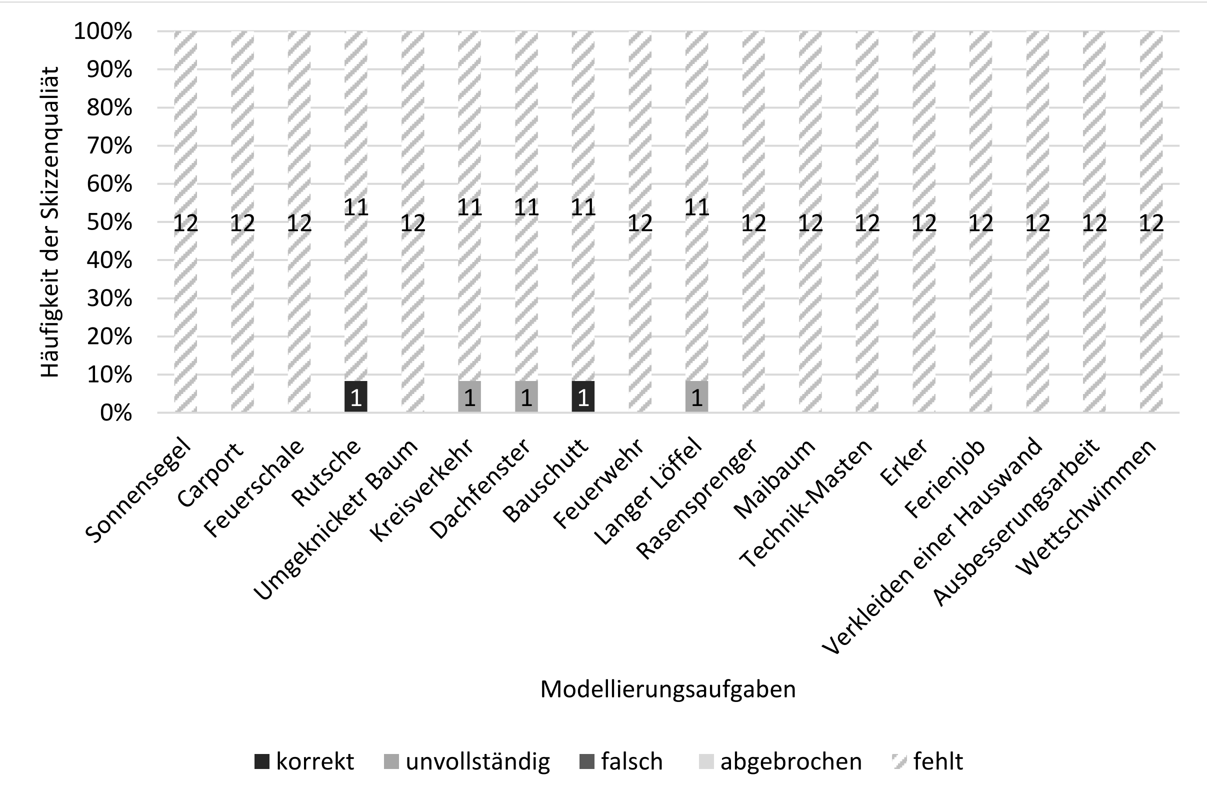


Abbildung 12: Absolute und relative Skizzenhäufigkeit je Modellierungsaufgabe in der Gruppe mit Skizzenverbot bei der Erprobung im Feld

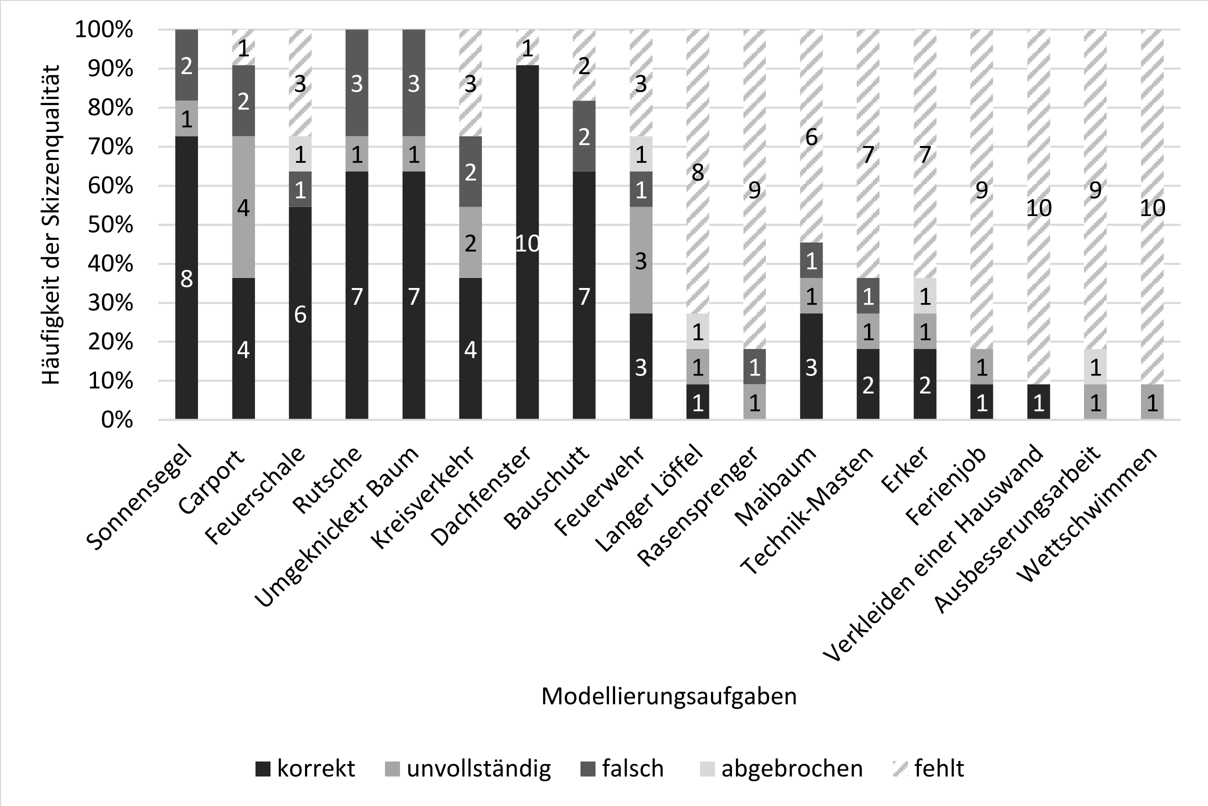


Abbildung 13: Absolute und relative Skizzenhäufigkeit je Modellierungsaufgabe in der Gruppe mit Skizzenaufforderung bei der Erprobung im Feld

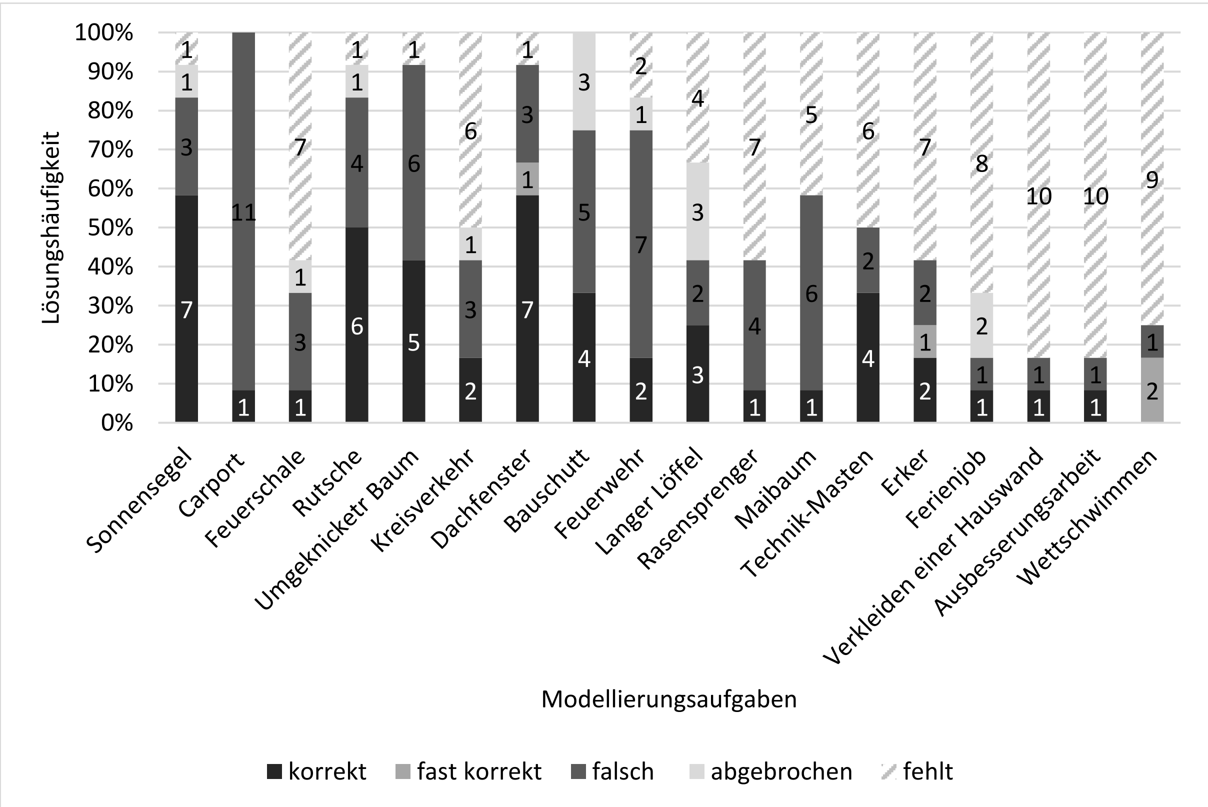


Abbildung 14: Absolute und relative Lösungshäufigkeit je Modellierungsaufgabe in der Gruppe mit Skizzenverbot bei der Erprobung im Feld

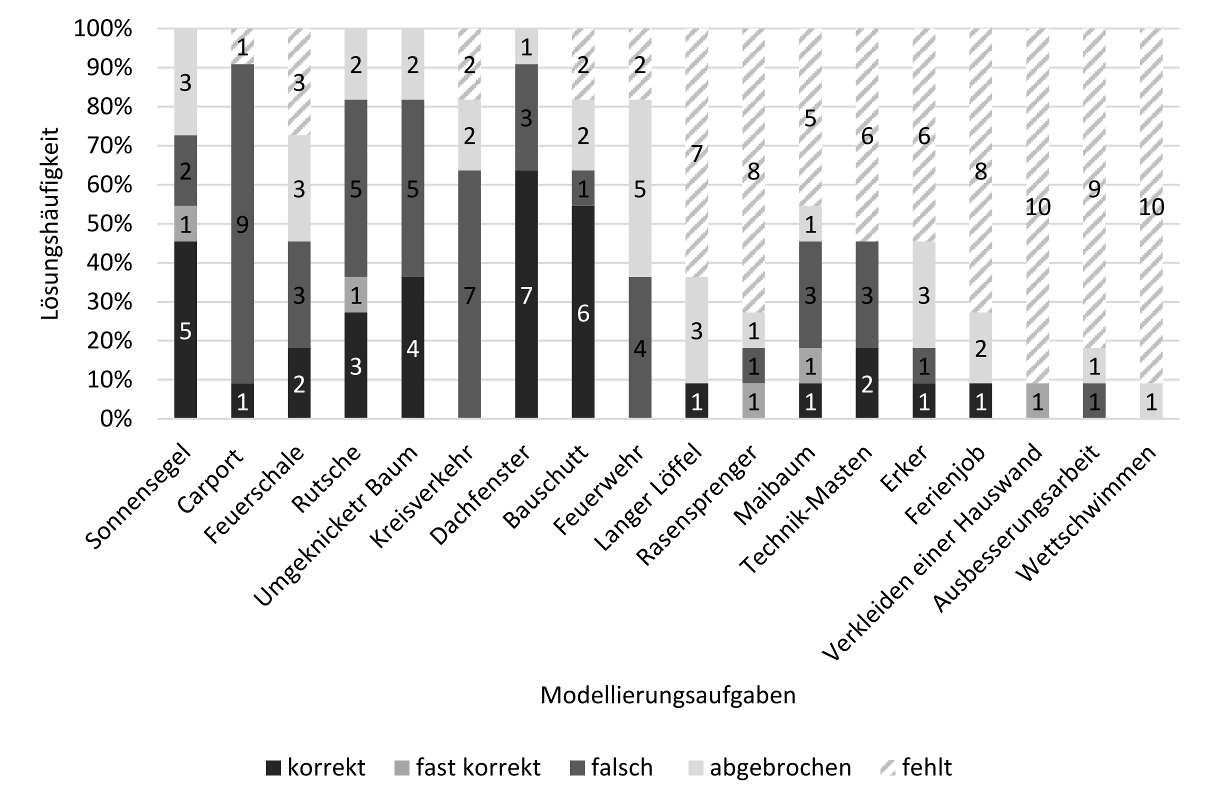


Abbildung 15: Absolute und relative Lösungshäufigkeit je Modellierungsaufgabe in der Gruppe mit Skizzenaufforderung bei der Erprobung im Feld

Weiterhin hat sich die Zweiteilung des Testheftes für die Nutzung der Formelsammlung und die Vermeidung von Priming-Effekten als sehr aufwändig erwiesen. Deshalb wurde entschieden, stattdessen ein vollständiges Testheft für die Haupterhebung zu gestalten, welches alle Testinstrumente enthielt (Anhang C, D, E). Um trotzdem die Nutzung der Formelsammlung für den ersten Teil zu ermöglichen und gleichzeitig beim zweiten Teil zu vermeiden, wurde diese losgelöst vom Testheft ausgegeben und nach der Bearbeitung des ersten Teils gefaltet und deutlich erkennbar zur Seite gelegt.

6.2.4 Itemanalyse und Aufgabenauswahl

Anhand der Daten aus der Feldpilotierung wurde eine Itemanalyse durchgeführt, um herauszufinden, ob bestimmte Items für die Untersuchung ungeeignet sind (Tabelle 6). Außerdem sollte anhand der Itemanalyse eine Aufgabenselektion vorgenommen werden, um den Umfang der Erhebung zu kürzen. Die deskriptive Analyse der Lösungshäufigkeiten zeigte, dass die begrenzte Testzeit einen starken Einfluss auf die Bearbeitungshäufigkeiten hatte, sodass der Testumfang für die Haupterhebung reduziert werden sollte.

Für die Itemanalyse wurden die Itemschwierigkeit, die Itemvarianz sowie die Itemtrennschärfe berücksichtigt. Der Index für die ***Itemschwierigkeit*** P_i wird dabei grundsätzlich verstanden als „Quotient aus der bei diesem Item tatsächlich erreichten Punktsumme aller n Probanden und der maximal erreichbaren Punktsumme, multipliziert mit 100“ (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 76). Auch wenn es nicht impliziert war, zeigte sich ein deutlicher Einfluss der Testzeit, sodass die Pilotierung den Charakter eines Speed-Tests erhielt[32]. Daher wird die Anzahl der erreichten Punktsumme nicht ins Verhältnis zu der maximal erreichbaren Punktsumme gesetzt, sondern ins Verhältnis zu der Anzahl an Bearbeitungen des Items i, die innerhalb der Testzeit erreicht wurden (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 79). Die ***Itemvarianz*** $\sigma^2(x_i)$ meint die Differenzierungsfähigkeit des Items i bezüglich der Probandenstichprobe (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 81 ff.). Sie gibt Auskunft darüber, inwiefern ein Item dazu geeignet ist, zwischen einzelnen Probandinnen und Probanden mit unterschiedlichen Merkmalsausprägungen zu differenzieren. Die ***Itemtrennschärfe*** r_{it} ist ein Maß für den korrelativen Zusammenhang zwischen den Itemwerten der Probanden und den Testwerten der Probanden. Sie drückt demnach aus, wie gut ein Item die gesamte Skala widerspiegelt.

Tabelle 6: Itemschwierigkeit, Itemvarianz und Itemtrennschärfe bei der Feldpilotierung

Aufgabe	P_i	$\sigma^2(x_i)$	r_{it}
Satz des Pythagoras			
Rutsche	43.5	.26	.951
Umgeknickter Baum	39.1	.25	.408
Bauschutt	45.5	.26	.951
Feuerwehr	13.6	.12	.406
Langer Löffel	22.2	.18	.640
Maibaum	20.0	.17	.406
Technik-Masten	46.2	.27	.951
Ausbesserungsarbeit	20.0	.20	.167
Wettschwimmen	50.0	.33	.640
Flächeninhalte			
Sonnensegel	56.5	.26	.489
Carport	8.7	.08	.614
Feuerschale	13.0	.12	.614
Kreisverkehr	8.7	.08	.614
Dachfenster	65.2	.24	.489
Rasensprenger	11.8	.16	.489
Erker	18.2	.11	.418
Ferienjob	30.8	.23	.957
Verkleiden einer Hauswand	33.3	.27	.957

[32] Da bei einem Speed-Test (im Gegensatz zum Niveau-Test) die Konstellation der Testitems entscheidend ist, wird zwischen Richtig-Antworten, Falsch-Antworten, ausgelassenen Aufgaben und unbearbeiteten Aufgaben aufgrund von Zeitmangel unterschieden. Letztere werden bei der Bestimmung des Schwierigkeitsindexes herausgerechnet, um die Schwierigkeit nicht zu überschätzen (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 78 ff.).

Die Itemschwierigkeit war bei den Aufgaben „Feuerwehr“ (P_i=13.6), „Maibaum“ (P_i=20.0) und „Ausbesserungsarbeit“ (P_i=20.0) zum Thema *Satz des Pythagoras* besonders hoch, beim Thema *Flächeninhalte* hatten die Aufgaben „Carport“ (P_i=8.7), „Kreisverkehr“ (P_i=8.7) und „Rasensprenger“ (P_i=11.8) besonders hohe Schwierigkeitswerte. Besonders leicht zu lösende Items waren die Aufgaben „Wettschwimmen“ (P_i=50.0), „Technik-Masten“ (P_i=46.2) und „Bauschutt“ (P_i=45.5) zum Thema *Satz des Pythagoras* und die Aufgaben „Dachfenster“ (P_i=65.2) und „Sonnensegel“ (P_i=56.5) zum Thema *Flächeninhalte*. Insgesamt fällt auf, dass es beim Thema *Flächeninhalte* einige besonders leicht und einige besonders schwierig zu lösende Items gab, während sich die Itemschwierigkeit beim Thema *Satz des Pythagoras* mehr im mittleren Bereich bewegte. Jedoch gab es in beiden Bereichen kein Item, das überhaupt nicht zu lösen gewesen wäre oder von allen Teilnehmenden gelöst wurde. Insgesamt war die Aufgabenschwierigkeit für die Teilnehmenden sehr hoch (es gab kaum Schwierigkeitswerte über P_i=50.0), allerdings handelte es sich der Fachlehrkraft zufolge um eine besonders leistungsschwache Lerngruppe. Als Konsequenz für die Hauptstudie ergab sich daraus, dass eine Fokussierung auf leistungsstärkere Lernende sinnvoll ist, damit die Items gut gelöst werden können.

Die Itemvarianz $\sigma^2(x_i)$ hängt teilweise mit der Itemschwierigkeit zusammen: Während Items mit mittlerer Schwierigkeit grundsätzlich eher gut zwischen Teilnehmenden mit unterschiedlichen Leistungen differenzieren, sind Items mit extremen Schwierigkeitswerten meist weniger gut dazu geeignet. Beim Thema *Satz des Pythagoras* war die Itemvarianz bei der Aufgabe „Feuerwehr“ (σ^2=.12) besonders gering, beim Thema *Flächeninhalte* war die Varianz bei den Aufgaben „Carport“, „Kreisverkehr“ (je σ^2=.08) und „Erker“ (σ^2=.11) gering.

Dennoch ist es sinnvoll, auch Items mit hoher und niedriger Schwierigkeit für die Testkonstruktion auszuwählen, um auch zwischen Teilnehmenden mit extremen Merkmalsausprägungen differenzieren zu können, sofern die Trennschärfe dabei ausreichend hoch ist (Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 87 f.). Je höher die Itemtrennschärfe, desto besser spiegelt dies die Itemskala wider, sodass möglichst hohe Werte für die Trennschärfe wünschenswert sind. Besonders hoch war die Trennschärfe zum Thema *Satz des Pythagoras* bei den Items „Rutsche“ (r_{it}=.951) „Bauschutt“ (r_{it}=.951) und „Technik-Masten“ (r_{it}=.951), während der Wert beim Item „Ausbesserungsarbeit“ mit Abstand am geringsten war (r_{it}=.167). Beim Thema *Flächeninhalte* war die Trennschärfe bei den Items „Ferienjob“ (r_{it}=.957) und „Verkleiden einer Hauswand“ (r_{it}=.957) am höchsten und beim Item „Erker“ am geringsten (r_{it}=.418).

Aufgrund der Ergebnisse wurden die Aufgaben „Ausbesserungsarbeit“ (*Satz des Pythagoras*) und „Erker“ (*Flächeninhalte*) aus dem Aufgabenpool herausgenommen. Diese Items wiesen vor allem eine geringe Itemtrennschärfe und eine geringe Varianz (Aufgabe „Erker“) bzw. einen extremen Wert hinsichtlich der Aufgabenschwierigkeit (Aufgabe „Ausbesserungsarbeit“) auf. Insgesamt zeigte sich bei der Pilotierung eine gute Reliabilität der Skalen sowohl für das Thema *Satz des Pythagoras* (Cronbachs α = .84) als auch für das Thema *Flächeninhalte* (Cronbachs α = .87), sodass keine grundsätzlichen Veränderungen der Aufgabenzusammenstellung oder der Aufgabenkonzeption erforderlich waren.

Bei der Anordnung der Aufgaben für die Hauptuntersuchung wurde das sogenannte „Sägezahnmuster“ genutzt, bei dem die Aufgabenschwierigkeit über einige Aufgaben ansteigt und nach Erreichen einer hohen Schwierigkeitsstufe wieder auf eine niedrige abfällt, anschließend wieder schrittweise ansteigt usw. Zusätzlich wurde auf eine Durchmischung der Aufgaben hinsichtlich der Themenbereiche sowie der mathematischen Modelle innerhalb der Themen geachtet, sodass immer maximal zwei aufeinanderfolgende Aufgaben zum gleichen Thema sind und niemals zwei aufeinanderfolgende Aufgaben das gleiche *spezifische* mathematische Modell beinhalten, um Gewöhnungseffekte zu vermeiden.

6.3 Design und Durchführung der Hauptstudie

Zu Beginn werden die einzelnen Kriterien vorgestellt, die für die Wahl des Hauptstudien-Designs maßgebend waren. Diese Kriterien werden aus dem Theorie- und Forschungsstand abgeleitet und ihr Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfragen wird verdeutlicht. Außerdem wird das gewählte Design zu anderen Designformaten abgegrenzt.

6.3.1 Kriterien für die Wahl des Designs

Die Verortung der vorliegenden Studie leitet sich in erster Linie aus der bestehenden Theorie und den bisherigen empirischen Erkenntnissen zum Erstellen von Skizzen als Lösungsstrategie ab. Das Skizzenzeichnen hat sich in der Kognitions-, Leseverstehens- und auch speziell in der mathematikdidaktischen Forschung vielfach als vielversprechende Strategie zur Verbesserung der Leistung erwiesen. Vor allem zeigt sich immer wieder ein positiver Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und dem Lösungserfolg. Die Funktionsweise des Skizzenzeichnens im Verstehens- und Lösungsprozess wurde bereits in verschiedenen kognitionspsychologischen (z. B. Leopold & Leutner, 2015; Schmidgall et al., 2019; Van Meter & Garner, 2005), aber auch einigen mathematikdidaktischen Studien (Rellensmann et al., 2017; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Garderen, 2007) untersucht. Unklar ist jedoch, inwiefern die Wirkungsweisen des Skizzenzeichnens für verschiedene mathematische Themen generalisierbar sind und welche Einflussfaktoren dabei maßgeblich sind.

(1) Aufgrund der bestehenden Theorie und Forschung eignet sich ein quantitatives Design für die Untersuchung.

Die beschriebene theoretische Ausgangslage erfordert eine Validierung der bestehenden Erkenntnisse zum Einsatz der Strategie des Skizzenzeichnens beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben zu verschiedenen Themen. Da es dazu – nach dem Kenntnisstand der Autorin – bisher keine Untersuchungen gibt, wird in der vorliegenden Studie ein erster Grundstein dafür gelegt, indem die Ergebnisse zu zwei geometrischen Themenbereichen in einen direkten Vergleich miteinander gesetzt werden. Auf diese Weise soll die vorliegende Studie dazu beitragen, die bestehende Theorie zum Skizzenzeichnen bzw. deren Generalisierbarkeit beim mathematischen Modellieren anhand zweier verschiedener geometrischer Themen zu überprüfen und zu validieren. Aufgrund der hypothesentestenden Anlage der Studie eignete sich ein quantitatives Vorgehen zur Beantwortung der Forschungsfragen. Qualitative Verfahren stellten keine zielführende Alternative dar, da diese darauf abzielen, Einzelfälle interpretativ auszuwerten, während bei dieser Untersuchung die Sammlung möglichst umfassender Ergebnisse im Fokus stand, um die Generalisierbarkeit bisheriger Kenntnisse zu prüfen.

(2) Die Studie fand im gewohnten räumlichen Umfeld, aber unter Laborbedingungen hinsichtlich des Ablaufs statt.

Da es sich um eine quantitative Studie handelt, ist es aus praktischen Gründen sinnvoll, die Erhebung in der vertrauten räumlichen Umgebung der Schülerinnen und Schüler durchzuführen. Zusätzlich hat dies den Vorteil, dass die Reaktivität der Teilnehmenden reduziert wird. Durch die gewohnte räumliche Umgebung wird eine bessere Generalisierbarkeit der Ergebnisse im Vergleich zu einer Laborstudie gewährleistet, da davon auszugehen ist, dass die Probandinnen und Probanden in ihrem gewohnten Umfeld ein natürlicheres Verhalten zeigen (Eifler, 2014, S. 206).

Gleichzeitig soll aber der Einfluss durchführungsrelevanter Störfaktoren bestmöglich kontrolliert werden, um die interne Validität zu erhöhen. Deshalb wurden der Ablauf der Durchführung, die Instruktionen sowie die Unterstützung bei der Bearbeitung durch Laborbedingungen festgelegt. Die Erhebung wurde weder im alltäglichen Unterrichtsformat noch von der unterrichtenden Lehrkraft durchgeführt. Der Nachteil dieses Vorgehens besteht darin, dass sich die Teilnehmenden bewusst sind, dass sie Gegenstand einer Untersuchung sind und daher trotz der gewohnten Umgebung nicht vollständig von einem natürlichen Verhalten ausgegangen werden kann.

(3) Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die Aufgaben in Einzelarbeit.

Ziel der Studie war es, den Einsatz selbst erstellter Skizzen in individuellen Modellierungsprozessen zu untersuchen. Deshalb sollen die Teilnehmenden die Bearbeitung in Einzelarbeit durchführen. Bei gemeinsamen Bearbeitungen wäre eine Differenzierung zwischen den individuellen Lösungsprozesse kaum möglich.

(4) Die Bearbeitungen wurden schriftlich im Paper-Pencil-Format festgehalten.

Insbesondere das Zeichnen von Skizzen lässt sich gut und einfach durch Verwendung der klassischen Hilfsmittel von Stift und Papier durchführen. Mit einem Computer bzw. Laptop (ohne Touchpad) könnten keine Skizzen im Sinne der Studie als Freihandzeichnungen erstellt werden. Dies wäre nur über Touchpads mit digitalen Stiften möglich, die jedoch nicht zur grundsätzlichen Unterrichtsausstattung gehören. Deshalb wurde die Testung im Paper-Pencil-Format durchgeführt. Das Format eignet sich außerdem, weil es den Teilnehmenden aus dem schulischen Alltag bekannt ist und auf diese Weise Schwierigkeiten bei der Anwendung und Umsetzung vermieden werden können. Eine zusätzliche, z. B. videobasierte Aufzeichnung war für die Zielsetzung der Studie nicht notwendig, da nicht der vollständige Prozess analysiert wurde, sondern eine Analyse der (Zwischen-)Produkte ausreichte.

(5) Die Untersuchung wurde als einmalige Erhebung mit Gruppenvergleich durchgeführt.

Einmalige Erhebungen haben den Vorteil, dass die Umsetzung einfacher und kontrollierter erfolgen kann als bei mittel- oder langfristigen Untersuchungen (Stylianides & Stylianides, 2014, S. 10). Auf diese Weise ermöglichen Einmalerhebungen eine präzise Beantwortung von Forschungsfragen. Um Störvariablen wie zwischenzeitliches Geschehen, Reifung der Versuchspersonen oder Messeffekte auszuschließen (Stein, 2014), fand die Durchführung daher als einmalige Erhebung statt. Es wurden zwei Versuchsgruppen gebildet, von denen eine die Aufforderung erhielt, eine Skizze zu zeichnen und anschließend die Aufgabe zu lösen, während die zweite Gruppe dazu aufgefordert wurde, die Aufgabe ohne Skizze zu lösen. Auf diese Weise sollte der Einfluss des Skizzenzeichnens messbar gemacht werden. Zusätzlich wurden die Mathematiknote und die innermathematische (hier speziell: geometriebezogene) Kompetenz, die sich in vorigen Studien als starke Prädiktoren der Modellierungsleistung erwiesen haben, mit erhoben. Durch Einbezug dieser Variablen in die statistischen Analysen sollte der Einfluss des Skizzenzeichnens auf die Modellierungsleistung angemessen interpretiert werden können. Außerdem wurden die Versuchsgruppen mithilfe dieser Variablen auf verzerrte Auswahlen überprüft.

6.3.2 Beschreibung des gewählten Designs

Anhand der beschriebenen Kriterien und der Ergebnisse aus der Pilotierung wurde das endgültige Design der Studie entwickelt. Es handelte sich um eine quantitative Studie, deren Schwerpunkt die Erhebung einer großen Fallzahl war, um die bestehenden Hypothesen mittels statistischer Zusammenhänge prüfen zu können. Die Erhebung fand in der gewohnten räumlichen Umgebung der Schülerinnen und Schüler statt, also in den Klassenräumen, in denen sie im schulischen Alltag unterrichtet werden. Aus datenschutzrechtlichen Gründen musste die Untersuchung angekündigt und die Einverständniserklärung der Erziehungsberechtigten im Vorweg eingeholt werden. Die Erhebung wurde von einer externen Versuchsleitung durchgeführt und der Ablauf folgte einem vorgegebenen Erhebungsschema. Die Schülerinnen und Schüler wurden an Einzeltischen platziert, damit sie die Bearbeitung in Einzelarbeit durchführten. Die Instrumente wurden in Form eines Testheftes an die Probandinnen und Probanden ausgegeben, welches sie im Paper-Pencil-Format bearbeiteten (Anhang C, D, E). Die Studie wurde als einmalige Erhebung durchgeführt, bei der zwei verschiedene Versionen von Testheften eingesetzt wurden – je eine Version für die jeweilige Versuchsgruppe. Die Gruppen wurden nicht in verschiedenen Räumen platziert. Umso wichtiger war es, räumliche Distanz herzustellen, indem die Teilnehmenden an Einzelplätzen saßen, von denen sie keinen Einblick in andere Testheftbearbeitungen hatten. Zur Erhebung der Kontrollfaktoren wurden ein Fragebogen und ein Test zur geometriebezogenen Leistung eingesetzt. Im Folgenden werden die einzelnen Testinstrumente und deren Entwicklung genauer beschrieben.

6.3.3 Ablauf der Datenerhebung

Im Fokus der Datenerhebung standen in erster Linie die Schülerlösungsprozesse beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben sowie die Fähigkeit des Skizzenzeichnens. Zur Erhebung dieser Konstrukte wurden quantitative Verfahren gewählt, um die Generalisierbarkeit der bisherigen Erkenntnisse zum Skizzenzeichnen (beim Modellieren) prüfen zu können. Die Begründung dafür wurde bereits im Kapitel 6.3.2 ausgeführt. Nachfolgend werden die Auswahl der Stichprobe und die Implementation der Studie beschrieben und begründet.

6.3.3.1 Auswahl der Stichprobe

Die Stichprobe umfasste insgesamt N = 263 Teilnehmende (131 weiblich, 124 männlich, 8 mit sonstiger Angabe), die von drei verschiedenen Schulen aus Niedersachsen stammten. Die Stichprobengröße wurde durch eine Power-Analyse festgelegt, bei der die Koeffizientengröße aus einer vorangegangenen Studie mit möglichst ähnlichen Konstrukten und Items herangezogen wurde (Rellensmann et al., 2017). Dort betrug die Korrelation schematischer Skizzen mit der Leistung $r = .76$ und die Korrelation der situativen Skizzen mit der Leistung $r = .24$. Demnach wurde der Wert von $r = .24$ als Richtwert für die Power-Analyse genutzt. Die Power-Analyse wurde mit dem Programm G*Power durchgeführt. Für den Alpha-Fehler wurde ein Wert von .05 und für die Teststärke (Power) ein Wert von .9 gewählt. Daraus ergab sich eine Stichprobengröße von 178 Probandinnen und Probanden. Da in der vorliegenden Studie aber nur ca. zwei Drittel der Teilnehmenden eine Skizze zeichneten, wurde die Probandenzahl entsprechend erhöht.

Vierzehn Klassen nahmen an der Untersuchung teil: zwei Gymnasialklassen einer Oberschule mit gymnasialem Angebot, vier Klassen des Gymnasial- , zwei Klassen des Realschulniveaus einer Integrierten Gesamtschule sowie sechs Klassen einer Realschule. Davon waren neun Klassen aus dem neunten und fünf Klassen aus dem zehnten Jahrgang. Vier von insgesamt 271 Schülerinnen und Schülern wurden wegen fehlender Elterngenehmigungen von der Untersuchung ausgeschlossen. Nochmals vier Bearbeitungen wurden entfernt, da eine sinnvolle Bearbeitung nicht zu erkennen war, sodass der Stichprobenumfang letztlich 263 Fälle betrug.

Schülerinnen und Schüler, die keinen Taschenrechner für die Bearbeitung mitgebracht hatten, erhielten einen Taschenrechner von der Versuchsleiterin. Da sich aus den Bearbeitungen der betreffenden Personen keine grundsätzliche Benachteiligung erkennen ließ (z. B. durch weniger Zeitkapazität wegen Einübung des Umgangs mit dem Gerät), wurden die Bearbeitungen zwar im Datensatz gekennzeichnet, aber letztlich vollständig miteinbezogen.

Um ein repräsentatives Schülerinnen-und-Schüler-Sampling für die quantitative Untersuchung zu erzeugen und somit Generalisierungen für eine breite Gruppe von Lernenden zu ermöglichen (Raithel, 2008, S. 54 f.), wurden verschiedene Schulformen für die Implementation der Studie ausgewählt. Auf diese Weise sollte eine leistungsheterogene Gruppe erzeugt werden, wobei die Leistungen über die Zugehörigkeit zur Schulform sowie die Mathematik-Note auf dem letzten Zeugnis eingeschätzt wurden. Diese Leistungsheterogenität ist sinnvoll, um eine Variation in der Modellierungsleistung und der Skizzenzeichen-Fähigkeit zu erreichen und so die Zusammenhänge zwischen den Konstrukten sowie leistungsspezifische Unterschiede besser untersuchen zu können.

Gleichzeitig wurde eine Fokussierung auf das mittlere bis hohe Leistungsspektrum vorgenommen, um zu gewährleisten, dass die Modellierungsaufgaben gut bewältigt werden können.[33] Bei breiteren Zielgruppen müssen auch die Testitems entsprechend einen breiteren Schwierigkeitsbereich abdecken, was wiederum die Reliabilität der Tests mindert. Außerdem wurde die Auswahl der Probandinnen und Probanden auf den neunten und zehnten Jahrgang beschränkt, da die Ergebnisse der Studie von Van Essen & Hamaker (1990) zu der Vermutung führten, dass es altersbezogene Unterschiede in der Wirkung von Skizzen gibt. Die Wahl fiel speziell auf den neunten und zehnten Jahrgang aufgrund der normativen Annahme, dass die Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufen bereits die notwendigen Erfahrungen mit dem Bearbeiten von Modellierungsaufgaben sowie dem Zeichnen von Skizzen gesammelt haben (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012). Gleichzeitig sind dies die letzten Jahrgänge, in denen noch eine stärkere Leistungsheterogenität gegeben ist, da ein Teil der Lernenden nach der neunten bzw. zehnten Klasse in das Berufsleben eintritt.

6.3.3.2 Beschreibung der Implementation

Abbildung 16 zeigt den detaillierten Ablauf der Hauptuntersuchung. Noch vor Beginn der Erhebung wurden die Tische in den Klassenräumen vorbereitet, damit die Teilnehmenden an Einzeltischen sitzen konnten. Außerdem wurden die Testhefte noch vor dem Erscheinen der Schülerinnen und Schüler auf den Tischen verteilt. Zu Beginn der Erhebung erhielten die Schülerinnen und Schüler von der Untersuchungsleiterin Instruktionen zum Ablauf der Erhebung, zur Bearbeitung der Testteile sowie zur Verwendung von Material und Hilfsmitteln. Die Instruktion nahm etwa drei bis vier Minuten in Anspruch. Anschließend wurde der erste Testteil, ein Fragebogen zu personenbezogenen Daten bearbeitet, bei dem Angaben zur Schule, Klasse, Lernniveau usw. gemacht wurden. Den zweiten Teil bildete der Fragebogen zur Skizzenpräferenz mit insgesamt zwölf Items. Dafür hatten die Teilnehmenden etwa fünf Minuten Zeit. Für die nächste Phase wurde die Zeit gestoppt und die Probandinnen und Probanden hatten insgesamt 72 Minuten Zeit, um alle 16 Modellierungsaufgaben zu bearbeiten. Davon waren acht zum Thema *Satz des Pythagoras* und acht zum Thema *Flächeninhalte*. In diesem Teil unterschieden sich die Testhefte insofern, dass die eine Versuchsgruppe bei allen Aufgaben die Aufforderung erhielt, die Aufgaben zu lösen, ohne zu zeichnen, während die andere Versuchsgruppe eine Skizze zeichnen und dann erst die Aufgabe lösen sollte. Der vierte und letzte Teil zur geometriebezogenen Leistung, bestehend aus acht Items, war strikt auf achteinhalb Minuten begrenzt. Insgesamt umfasste die Erhebung also einen zeitlichen Rahmen von 90

[33] Diese Fokussierung erfolgt aufgrund der Ergebnisse der Pilotierung, in der nur wenige Aufgaben eine Aufgabenschwierigkeit von über P_i = 50 erreichten (vgl. Kapitel 6.2.4).

Minuten, sodass die Durchführung innerhalb einer Doppelschulstunde in den Schulalltag integriert werden konnte.

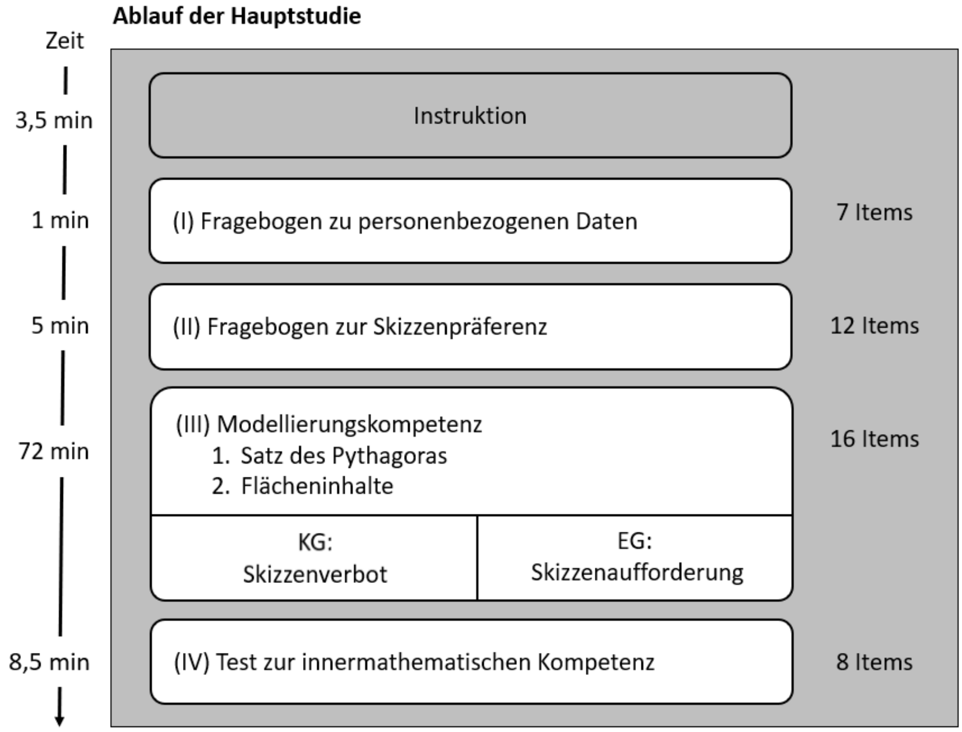


Abbildung 16: Schaubild zum Ablauf der Hauptstudie

7 Auswertung der Daten

Grundlage der Datenauswertung waren die Fragebögen, die Bearbeitungen der Testaufgaben zur geometriebezogenen Kompetenz, die Bearbeitungen der Modellierungsaufgaben sowie die dazugehörigen Skizzen. Alle Datenquellen wurden mithilfe eines Kodiermanuals ausgewertet, wobei die Kategoriensysteme auf unterschiedliche Weise entwickelt wurden.

Bei der Entwicklung von Analysekriterien für die Kodierung werden im Allgemeinen zwei Zugänge unterschieden: der deduktive und der induktive Zugang (vgl. auch Kapitel 6.2.2.3). Die deduktive Herangehensweise ist stark theoriegeleitet, indem die Analysekriterien für die Kodierung aus der bestehenden Theorie hergeleitet werden. Im Gegensatz dazu werden die Kategorien beim induktiven Zugang aus dem vorliegenden Material heraus generiert. Dabei werden verschiedene Antworten systematisch miteinander verglichen, um Ähnlichkeiten und Unterschiede zu ermitteln, die dann als Kriterien für die jeweilige Einordnung bzw. Kategorienbildung genutzt werden. Welche Vorgehensweise gewählt wird, hängt vom jeweiligen Forschungsstand und Forschungsziel der Studie ab (Kuckartz, 2018). Sofern eine elaborierte theoretische Grundlage gegeben ist, können die Kategorien für das Kodierschema aus der Theorie abgeleitet werden. Dagegen eignet sich der induktive Zugang, wenn die theoretischen Erkenntnisse noch wenig ausgereift sind und die Kategorien deshalb selbst entwickelt werden müssen. Es handelt sich dabei um ein Kontinuum, sodass in vielen Fällen eine gemischte Vorgehensweise angewendet wird, bei der vorläufige Kategorien aus dem themenbezogenen Forschungsstand abgeleitet werden, die anschließend aber anhand des Materials sukzessive modifiziert und ergänzt werden (Hammann & Jördens, 2014, S. 172).

Auch der Kodierungsprozess selbst kann auf unterschiedliche Weise ablaufen. Das Kodieren ist ein Vorgang, bei dem das Ausgangsmaterial im Hinblick auf bestimmte Informationseinheiten wie z. B. gesetzte Kreuze oder Skizzenelemente etikettiert wird. Diese Etikettierung wird verstanden als „tags or labels for assigning units of meaning to the descriptive or inferential information compiled during a study" (Miles & Huberman, 2004, S. 65). In dieser Beschreibung werden zwei verschiedene Arten von Kodierung erwähnt: einerseits deskriptive Kodierungen, bei denen rein beschreibend vorgegangen wird und Interpretationen vermieden werden, andererseits inferentiale Kodierungen bei denen Interpretationen nicht nur möglich, sondern sogar notwendig sind.

In den folgenden Kapiteln wird für die verschiedenen Testinstrumente beschrieben und begründet, welche Auswertungsmethoden jeweils genutzt wurden und auf welche Art und Weise die Kodierungen durchgeführt wurden (Kapitel 7.1 – 7.3). Weiterhin werden die Gütekriterien zur Sicherung wissenschaftlicher Standards geprüft (Kapitel 7.4). Im dritten großen Abschnitt des Kapitels folgt eine Erläuterung der statistischen Analysemethoden, die zur Auswertung für die vorliegende Arbeit genutzt wurden (Kapitel 7.5).

7.1 Personenbezogener Fragebogen

Die Kategorien des Kodierschemas für den Fragebogen ergaben sich aus den verschiedenen Fragen (Items) des Fragebogens sowie den dazugehörigen Antwortmöglichkeiten, deren theoriegeleitete – somit deduktive – Entwicklung bereits in Kapitel 6.1.4 beschrieben und begründet wurde.

7.1.1 Allgemeine Mathematikleistung

Die allgemeine Mathematikleistung wurde anhand der letzten Zeugnisnote im Fach Mathematik sowie dem jeweiligen Kursniveau bestimmt. Da eine Schulnote auf dem jeweils höheren Niveau als eine Note besser gegenüber dem niedrigeren Niveau gilt (z. B. die Schulnote 4 im Zusatzniveau gilt als 3 im erweiterten Niveau), wurde entsprechend eine siebenstufige Leistungsskala erstellt, auf der die Probandinnen und Probanden eingeordnet wurden (Tabelle 7).

Tabelle 7: Leistungsskala aus Schulnote und Kursniveau

Leistungsstufe	Schulnote auf dem Realschulniveau	Schulnote auf dem Gymnasialniveau
0	6	-
1	5	6
2	4	5
3	3	4
4	2	3
5	1	2
6	-	1

Leistungsstufe 0, die niedrigste Leistungsstufe, umfasst ausschließlich Teilnehmende, die die Mathematiknote 6 auf dem Zeugnis hatten und auf dem Realschulschulniveau unterrichtet werden. Leistungsstufe 1 umfasst alle Lernenden, die die Note 5 auf dem Realschulniveau erzielt haben, sowie Lernende, die die Note 6 auf dem Gymnasialniveau hatten, usw. Die höchste Leistungsstufe 6 konnte nur von Lernenden erreicht werden, die auf dem gymnasialen Niveau unterrichtet werden und die Note 1 im Fach Mathematik auf dem letzten Zeugnis hatten.

7.1.2 Skizzenpräferenz

Im Kodierungsprozess wird jeder Antwortmöglichkeit (Merkmalsausprägung) ein bestimmter Wert (Code) zugeordnet (Raithel, 2008). Die Kodierung des Fragebogens zur Skizzenpräferenz beruhte somit auf rein deskriptiver Zuordnung der Codes je nach gesetztem Kreuz bei den Antwortmöglichkeiten und bedurfte keiner Interpretation. Das Kodierschema folgt dem Aufbau des Fragebogens (Tabelle 8). Für höhere Häufigkeiten bzw. höhere Zustimmungen wurden entsprechend höhere Codes bzw. Scores vergeben.

Tabelle 8: Kodierschema für den Fragebogen

Code	Score	Ausprägung	Beschreibung
Wie häufig zeichnest du im Durchschnitt Skizzen im Mathematikunterricht?			
1	0	seltener als einmal im Monat	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
2	1	ca. einmal im Monat	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
3	2	ca. einmal pro Woche	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
4	3	in (fast) jeder Mathematikstunde	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
8	miss	Keine eindeutige Bearbeitung	Das Item wurde bearbeitet, aber die Bearbeitung ist nicht eindeutig, z. B. wenn mehrere Kreuze gesetzt wurden, oder Notizen zum Item gemacht wurden, wie „Die Frage ist doof."
9	miss	Keine Bearbeitung	Das Item wurde nicht bearbeitet. Hier darf nichts geschrieben sein, auch kein Strich/Fragezeichen o.ä.
Wie häufig zeichnest du in der Regel Skizzen bei Aufgaben zum Thema […]?			
1	0	zu (fast) gar keiner Aufgabe	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
2	1	zu wenigen Aufgaben	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
3	2	zu vielen Aufgaben	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
4	3	bei (fast) jeder Aufgabe	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
8	miss	Keine eindeutige Bearbeitung	Das Item wurde bearbeitet, aber die Bearbeitung ist nicht eindeutig, z. B. wenn mehrere Kreuze gesetzt wurden, oder Notizen zum Item gemacht wurden, wie „Die Frage ist doof."
9	miss	Keine Bearbeitung	Das Item wurde nicht bearbeitet. Hier darf nichts geschrieben sein, auch kein Strich/Fragezeichen o.ä.
Ich bin der Meinung, dass ich Aufgaben besser löse, wenn ich eine Skizze zeichne zum Thema […]			
1	0	Trifft nicht zu	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
2	1	Trifft eher nicht zu	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
3	2	Trifft eher zu	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
4	3	Trifft zu	Es wurde ein Kreuz o.ä. bei dieser Option gesetzt.
8	miss	Keine eindeutige Bearbeitung	Das Item wurde bearbeitet, aber die Bearbeitung ist nicht eindeutig, z. B. wenn mehrere Kreuze gesetzt wurden, oder Notizen zum Item gemacht wurden, wie „Die Frage ist doof."
9	miss	Keine Bearbeitung	Das Item wurde nicht bearbeitet. Hier darf nichts geschrieben sein, auch kein Strich/Fragezeichen o.ä.

Anmerkungen: „miss" = missing value / fehlender Wert, für den kein Score vergeben wird

Da die zweite und dritte Frage anhand von vier bzw. fünf Beispielen spezifiziert wurden, ergaben sich insgesamt 10 Items, die mit Hilfe des Kodierschemas ausgewertet wurden. Das Kodierschema wurde genutzt, um eine Datenmatrix in der Statistik Software SPSS zu erstellen. Auf diese Weise wurden die Bearbeitungen der Fragebögen in eine Datenstruktur überführt, die anschließend mithilfe statistischer Rechenverfahren ausgewertet werden konnte. Die Zeilen der Datenmatrix enthielten die verschiedenen Fälle, in diesem Fall also die einzelnen

Probandinnen und Probanden, während die verschiedenen Variablen (die einzelnen Fragen des Fragebogens) die Spalten der Matrix bildeten.

7.2 Aufgaben zur geometriebezogenen Leistung

Für die Kodierung der Aufgaben zur geometriebezogenen Leistung wurden die Kategorien ebenfalls deduktiv anhand der bestehenden Theorie bzw. in diesem Fall speziell anhand eines theoretisch fundierten und vielfach erprobten Testinstruments, dem *Deutschen Mathematiktest für neunte Klassen*, entwickelt.

Tabelle 9: Kodierschema für die Aufgaben zur geometriebezogenen Leistung

Code	**Kategorie**	**Beschreibung**	**Ankerbeispiele**	**Kodierregeln**
1	Korrekte Lösung	Die Zahl, die in das Lösungskästchen eingetragen wurde bzw. in der Aufgabenlösung erkennbar notiert wurde, entspricht der Zahl, die als korrekte mathematische Lösung für die Aufgabe bestimmt wurde.	1) 5cm 2) 6cm 3) 4,83m 4) 11,18cm 1a) 13,5m2 1b) 13,9m 2a) 1.809,557cm2 2b) 150,796cm	Es wird geduldet, wenn die Lösung nicht in das Antwortfeld übertragen wurde, aber deutlich erkennbar ist. Weiterhin werden folgende Rundungsregeln angewandt: • Die Zahl ist korrekt auf die erste (oder eine nachfolgende) Kommastelle gerundet. • Die Zahl ist an irgendeiner Stelle nach der zweiten Nachkommastelle ohne Rundung abgeschnitten. • Bei Zahlen >10: Die Zahl wurde auf die nächste ganze Zahl gerundet.
0	Falsche Lösung	Die Zahl, die in das Lösungskästchen eingetragen wurde bzw. in der Aufgabenlösung erkennbar notiert wurde, entspricht *nicht* der Zahl, die als korrekte mathematische Lösung für die Aufgabe bestimmt wurde.		• auch abgebrochene Lösungsprozesse (nur Strich oder Fragezeichen, Bearbeitung durchgestrichen o.ä.) werden in diese Kategorie eingeordnet • ebenso unsinnige Antworten, wie z. B. „doofe Aufgabe“
9	Missing: fehlende Bearbeitung	Die Aufgabe wurde nicht bearbeitet; d. h. es wurden keinerlei schriftliche Notizen zu dieser Aufgabe gemacht. Hier darf auch kein Strich o.ä. notiert worden sein.		

Bei diesem Test gibt es konkrete Zahlenwerte, an denen sich die erfolgreiche Lösung einer Aufgabe und damit auch das Kodierschema orientieren. Die Kodierung war also auch hier ein rein deskriptiver Prozess, bei dem das Vorhandensein der konkreten Zahlenwerte überprüft wurde. Es ergaben sich die Merkmalsausprägungen „korrekte Lösung“, „falsche Lösung“, „vollständig fehlende Bearbeitung“, „abgebrochener Lösungsprozess“ für die jeweiligen Items. Für jede Aufgabe wurde berechnet und festgelegt, was als korrekte mathematische Lösung der Aufgabe galt (Tabelle 9: Spalte „Ankerbeispiele“, Zeile „Korrekte Lösung“). Je nach Merkmalsausprägung wurde den einzelnen Variablen gemäß des Kodierschemas ein Code zugeordnet. Die Codes wurden in dieselbe Datenmatrix eingegeben, in die auch die Kodierungen der Fragebögen eingetragen wurden, um gemeinsame Analysen unter Einbezug aller Variablen zu ermöglichen.

7.3 Modellierungsleistung und Skizzen

Für die Auswertung der Modellierungsaufgaben und der gezeichneten Skizzen wurden die Kodierschemata genutzt, die auf Grundlage der Pilotierung entwickelt wurden (vgl. Kapitel 6.2.2). Kodiert wurde zum einen der Modellierungsprozess als Ganzes, da die allgemeine Modellierungsleistung als Konstrukt für die Prüfung verschiedener Forschungshypothesen (z. B. (2.1.), (3.2.) und (4.1.)) relevant war. Zum anderen wurden aber auch Teilprozesse des Modellierens kodiert, die vor allem für die Prüfung der Hypothesen (2.2.) und (4.2.) genutzt wurden.

Für die Entwicklung der Kategoriensysteme wurde eine deduktiv-induktive Mischform gewählt. Dieses Vorgehen ergab sich einerseits aus dem aktuellen Forschungsstand zum Skizzenzeichnen, der bereits einige Erkenntnisse über Merkmale von Skizzen liefert, andererseits aus dem Anspruch, der Individualität von Modellierungsprozessen und selbst erstellten Skizzen gerecht zu werden. Denn das Zeichnen der Skizzen und die Bearbeitung der Modellierungsaufgaben sind individuelle, bedeutungsreiche und von Offenheit geprägte Prozesse, die sich nicht allein anhand manifester Merkmale beschreiben lassen. Aufgrund dessen waren für die Kodierung der Modellierungsprozesse und Skizzen inhaltsbezogene, interpretative Analysen notwendig, die in Form qualitativer Inhaltsanalysen durchgeführt wurden.

Insgesamt lagen 263 Testheftbearbeitungen als Grundlage zur Kodierung der Modellierungsleistung und der Skizzenkriterien vor, die jeweils 16 Modellierungsaufgaben enthielten, sodass sich insgesamt 4.208 Auswertungseinheiten ergaben. Zunächst wurde ein erster Materialdurchlauf durchgeführt, bei dem 20% des Materials von zwei verschiedenen Kodierenden kategorisiert wurden. Anschließend wurde die Interraterreliabilität überprüft – für jedes einzelne Item der Modellierungsleistung (auch für die einzelnen Modellierungsphasen) und für jedes einzelne Item der Skizzenkriterien. Die Interraterreliabilität betrug dabei mindestens Cohens Kappa (κ) = .71 und war damit bereits gut.[34] Daher wurden die Kategorien beibehalten, allerdings wurden die Beschreibungen und Kodierregeln zum Teil umformuliert bzw. stärker präzisiert, um eine noch zuverlässigere Kodierung zu ermöglichen. Es folgte ein zweiter Materialdurchlauf mit den gleichen 20% des Materials, eine erneute Überprüfung der

[34] Cohens κ kann Werte zwischen 0 (Übereinstimmungen sind zufällig) und 1 (vollständige Übereinstimmung) annehmen. Als gut gelten in der Regel Werte für Cohens κ zwischen .60 und .75 (Bortz & Döring, 2006, S. 277).

Interraterreliabilität (mind. Cohens Kappa (κ) = .80) und die abschließende Kodierung des gesamten Materials.[35]

7.4 Gütekriterien

Die Daten aus allen Testteilen – d. h. dem Fragebogen, dem Test zur geometriebezogenen Leistung, zur Modellierungs- und zur Skizzenzeichenkompetenz – wurden gemeinsam in einen Datensatz der Statistik Software SPSS eingegeben, um sie mittels quantitativer statistischer Verfahren auswerten zu können. Demnach handelt es sich um quantitative Auswertungsverfahren, deren Güte mit Hilfe der klassischen Gütekriterien *Objektivität*, *Reliabilität* und *Validität* geprüft werden. Für die Analyse der Schülerlösungen und -skizzen wurde allerdings die skalierende Inhaltsanalyse und damit ein qualitatives Analyseinstrument verwendet, das dementsprechend qualitative Gütekriterien erfordert. Insbesondere das Kriterium der Reliabilität bezieht sich auf das – in diesem Fall qualitative – Analyseinstrument. Daher wird dieses Kriterium anhand der Reliabilitätsaspekte der qualitativen Inhaltsanalyse beschrieben.

7.4.1 Klassische Gütekriterien

Aufgrund der hohen Anzahl von Teilnehmenden (N=263) und der hohen Itemzahl je Testinstrument (12 Fragebogenitems, 16 Items im Modellierungstest, 8 Items im Test zur geometriebezogenen Leistung) ergab sich eine Vielzahl an Bearbeitungen, die eine quantitative Auswertung ermöglichten. In diesem Kapitel werden die klassischen Gütekriterien *Objektivität*, *Reliabilität* und *Validität* anhand der Erhebungsinstrumente geprüft. Die Reliabilität in Bezug auf die Analyse der Skizzen und Modellierungsprozesse wird im darauffolgenden Kapitel 7.4.2 beschrieben.

Objektivität

Die Objektivität ist ein Maß dafür, inwieweit die Durchführung, Auswertung und Interpretation der Ergebnisse unabhängig von der durchführenden Person sind (Raithel, 2008, S. 45). Entsprechend werden drei verschiedene Arten von Objektivität unterschieden:

Die *Durchführungsobjektivität* beinhaltet die Unabhängigkeit des Antwort- bzw. Bearbeitungsverhaltens der Teilnehmenden von der jeweils versuchsleitenden Person (Raithel, 2008, S. 45). Diese wurde in der vorliegenden Studie durch die Erstellung eines Instruktionsmanuals sichergestellt, in dem sowohl der Sprechtext als auch weitere Anweisungen, z. B. zur Vorbereitung der Testung oder zu erlaubten Hilfestellungen, gegeben wurden (Anhang B). Darüber hinaus fand eine Schulung der durchführenden Personen statt, in der das Instruktionsmanual und der Ablauf der Erhebung ausführlich besprochen wurden.

[35] Die abschließende Interraterreliabilität wird im Rahmen der Überprüfung der Gütekriterien (vgl. Kapitel 7.4) berichtet.

Die Unabhängigkeit der Auswertungsergebnisse bei gleicher Bearbeitung bezeichnet man als *Auswertungsobjektivität* (Raithel, 2008, S. 45). In Bezug auf die Skizzen und Modellierungsprozesse wird dieser Aspekt im nachfolgenden Kapitel 7.4.2 beschrieben. Beim Fragebogen gab es keine Abweichungsmöglichkeit bei den Auswertungen, da die Antworten anhand der gesetzten Kreuze in die jeweiligen Kategorien eingeordnet wurden. Alle Sonderfälle, wie z. B. Kreuze zwischen zwei Kästchen, wurden besprochen und ggf. in Sonderkategorien eingeordnet. Zur Bestimmung der Auswertungsobjektivität beim Test zur geometriebezogenen Leistung wurden 20% der Bearbeitungen von zwei verschiedenen Kodierenden ausgewertet und anschließend wurde die Übereinstimmung mithilfe eines Reliabilitäts-Koeffizienten bestimmt. Zur Bestimmung dieses Koeffizienten gibt es verschiedene Verfahren, wobei häufig der zufallskorrigierte Koeffizient Cohens Kappa (κ) verwendet wird (Kuckartz, 2018, S. 210). Definiert ist der Cohens-Kappa-Koeffizient durch folgende Gleichung:

$$\kappa = \frac{p_0 - p_e}{1 - p_e}$$

wobei p_0 den relativen Anteil der übereinstimmenden Kodierungen an der Gesamtzahl der Kodierungen dargestellt und p_e die geschätzte Wahrscheinlichkeit für zufällige Übereinstimmungen ist (Bortz & Döring, 2006, S. 274–277; Hammann & Jördens, 2014). Der Koeffizient liegt bei Cohens κ = .95 für den Test zur geometriebezogenen Leistung. Demnach ist eine sehr gute Auswertungsobjektivität gegeben.

Die dritte Form der Objektivität, die *Interpretationsobjektivität*, ist gegeben, wenn zwei Forschende die wissenschaftlichen Befunde auf gleiche Weise interpretieren (Raithel, 2008, S. 45). Diese Objektivität lässt sich nicht rechnerisch ermitteln. Um Interpretationsobjektivität zu gewährleisten, wurden die Ergebnisse der vorliegenden Studie mit der Arbeitsgruppe und den betreuenden Personen besprochen, auf Tagungen mit der Fach-Community diskutiert sowie mit Ergebnissen aus Studien des gleichen Themengebietes abgeglichen, um eine möglichst objektive und allgemeingültige Interpretation der Ergebnisse zu erreichen.

Reliabilität

Das Gütekriterium der Reliabilität meint die Zuverlässigkeit, mit der ein Instrument bei wiederholten Messungen gleiche Werte liefert (Raithel, 2008, S. 46). Diese wird durch einen Korrelationskoeffizienten angegeben, wobei es verschiedene Methoden zur Bestimmung der Reliabilität gibt: die *Retest-Methode* (wiederholte Messung zu zwei Zweitpunkten), die *Paralleltest-Methode* (zwei Messungen des gleichen Konstrukts mit verschiedenen Instrumenten) und die *Split-half-Methode* (Aufteilen des Testes in zwei Hälften) (Raithel, 2008, S. 46 f.). Das Prinzip ist bei allen Methoden das gleiche: Es werden auf zwei unterschiedliche Arten Messwerte generiert, deren Korrelation anschließend überprüft wird. Eine Erweiterung der Split-half-Methode stellt die Berechnung der Skalenreliabilität dar, bei der eine Itemkonsistenzanalyse mithilfe des Koeffizienten Cronbachs α durchgeführt wird.

Zur Schätzung der Reliabilität des Fragebogens und des Tests zur geometriebezogenen Leistung wurde die Itemkonsistenzanalyse genutzt, indem für die verschiedenen Testinstrumente jeweils Cronbachs-α-Koeffizienten bestimmt wurden. Cronbachs α kann über die mittlere Interkorrelation zwischen den Items berechnet werden (Schecker, 2014):

$$\propto_{st} = \frac{N \cdot r_m}{1 + (N-1) \cdot r_m}$$

wobei N die Anzahl der Items, r_m die mittlere Interkorrelation der N Items und $\propto_{st}$ der standardisierte Alpha-Koeffizient ist (bei dem vereinfachend angenommen wird, dass die Varianzen der Items gleich sind). Bei der Bestimmung der Itemkonsistenzen muss berücksichtigt werden, dass die Tests verschiedene Skalen enthalten können, für die jeweils einzeln der Koeffizient berechnet werden muss. Die Werte für die Reliabilität lagen für den Fragebogen zur Skizzenpräferenz bei Cronbachs α = .82 und für den Test zur geometriebezogenen Leistung bei Cronbachs α = .75 und sind somit gut bzw. akzeptabel (Bortz & Döring, 2006, S. 199).

Validität

Unter der Validität versteht man die Gültigkeit eines Testinstruments. Sie ist also ein Maß dafür, inwieweit der Test tatsächlich das misst, was er messen soll. Dabei handelt es sich nicht um einen berechenbaren Wert, sondern eine Beurteilung, die im Vergleich zu anderen Messungen abgegeben wird. Folgende Arten der Validität werden dabei unterschieden (Raithel, 2008, S. 48 f.):

1. Im Rahmen der *Expertenvalidität* schätzen Experten die Gültigkeit einer Skala ein.
2. Beim Prinzip der *„Known group“* wird überprüft, ob die Erwartungen für bestimmte Gruppen, für die extreme Messwerte angenommen werden, zutreffen.
3. Für die *Inhaltsvalidität* wird überprüft, ob alle Dimensionen eines Konstrukts bei der Messung berücksichtigt wurden, wobei es hierfür keine objektiven Kriterien gibt.
4. Bei der *Kriteriumsvalidität* wird geprüft, inwieweit die Resultate mit anderen relevanten Merkmalen empirisch korrelieren. Hierfür lassen sich Korrelationskoeffizienten berechnen. Unterschieden wird dabei zwischen der Übereinstimmungsvalidität (Übereinstimmung mit gleichzeitig erhobenem Außenkriterium) und der Vorhersagevalidität (ein prognostiziertes Kriterium wird zu späterem Zeitpunkt mit anderem Instrument gemessen).
5. *Konstruktvalidität* liegt vor, sofern empirisch überprüfbare Aussagen über Zusammenhänge zwischen dem Konstrukt und anderen Konstrukten tatsächlich empirisch nachgewiesen werden können. Allerdings kann dieses Kriterium nur selten bei einzelnen Studien, sondern eher bei komplexen, kumulativen Forschungsprogrammen überprüft werden.

Bei der vorliegenden Erhebung wurde das Kriterium der Expertenvalidität geprüft, indem die Gültigkeit der Skalen der einzelnen Testinstrumente von der Arbeitsgruppe, den Betreuungspersonen und der Fach-Community eingeschätzt wurden. Um Inhaltsvalidität zu gewährleisten, wurden die Testinstrumente nach intensiver Literaturrecherche und auf Basis theoretischer und z.T. bereits empirisch erprobter Modelle entworfen. Dabei wurde darauf geachtet, dass alle Dimensionen, die sich bisher als relevant erwiesen haben, berücksichtigt werden. Die Konstruktvalidität konnte bei der vorliegenden Untersuchung anhand der Korrelation zwischen dem Test zur geometriebezogenen Leistung und der Modellierungsleistung überprüft werden, da das innermathematische Arbeiten eine wichtige Komponente im Prozess des mathematischen Modellierens darstellt. Tatsächlich zeigte sich eine hoch signifikante, starke Korrelation von $r = .56$ ($p < .001$) zwischen den Testergebnissen bezüglich der geometriebezogenen Leistung und denen des Modellierens.

Die Kriteriumsvalidität wurde anhand des Zusammenhangs zwischen der Modellierungsleistung und der Skizzenqualität mit einigen der Hintergrundvariablen überprüft (siehe auch Kapitel 8.1.2), da davon auszugehen ist, dass beide Konstrukte als Teile der allgemeinen mathematischen Leistung bzw. geometriebezogenen Leistung mit diesen Variablen korrelieren. Die Modellierungsleistung korrelierte zu $r = .65$ hoch signifikant mit der allgemeinen Mathematikleistung und zu $r = .77$ ebenfalls hoch signifikant mit der geometriebezogenen Leistung. In beiden Fällen handelte es sich um hohe Korrelationen. Zwischen der Skizzenqualität und der allgemeinen Mathematikleistung lag eine mittlere Korrelation von $r = .46$ vor ($p < .001$) und mit der geometriebezogenen Leistung eine hohe Korrelation von $r = .51$ ($p < .001$) (siehe auch Kapitel 8.4.1). Dass der Zusammenhang bei der Skizzenqualität etwas geringer ist, ist insofern plausibel, dass es sich beim Skizzenzeichnen um eine sehr spezifische Fähigkeit handelt, während die Modellierungsleistung einen wesentlichen Kompetenzbereich in der mathematischen Bildung darstellt.

7.4.2 Gütekriterien der qualitativen Inhaltsanalyse

Die Verfahren zur Überprüfung der klassischen Gütekriterien in der quantitativen Forschung lassen sich i.d.R. nicht direkt auf qualitative Auswertungsverfahren wie die qualitative Inhaltsanalyse übertragen, da der Analyseprozess hier deutlich komplexer ist und ebenso komplexe Daten generiert. Deshalb wurden spezielle Gütekriterien für das Verfahren der qualitativen Inhaltsanalyse entwickelt, die für die hier durchgeführte skalierende Inhaltsanalyse (vgl. Kapitel 6.2.2) überprüft werden sollen. Der Fokus liegt dabei auf den Kriterien, die sich auf die Durchführung der Inhaltsanalyse beziehen, da für die weiteren Auswertungen die bereits beschriebenen klassischen Gütekriterien verwendet werden konnten.

Krippendorf (2004, S. 214 f.) hat eine Zusammenstellung der wesentlichen Gütekriterien in Bezug auf die qualitative Inhaltsanalyse vorgenommen. Das erste Kriterium ist die *semantische Gültigkeit*, unter der die Korrektheit der Bedeutungsrekonstruktion des Materials verstanden wird (Krippendorf, 2004, S. 214 f.). Diese wird anhand der Angemessenheit der Kategoriendefinitionen, der Ankerbeispiele und der Kodierregeln gemessen. Für die vorliegende Studie wurden die Kategoriensysteme für die Modellierungsleistung und die Skizzenkriterien sowie deren Ausdifferenzierungen gemeinsam mit der Arbeitsgruppe, einer Expertengruppe der Mathematikdidaktik, diskutiert und ausformuliert. Darüber hinaus wurden sowohl Skizzen als auch Lösungsprozesse, die gleiche Codes erhielten, beispielhaft miteinander verglichen und auf Homogenität überprüft. Anhand zuvor festgelegter Kategorien wurden prototypische Skizzen und Lösungsprozesse erstellt, die anschließend von einer zweiten kodierenden Person in das Kategoriensystem wieder eingeordnet wurden. So wurde überprüft, ob sich die intendierte Bedeutung der Kategorien rekonstruieren lässt.

Um *Stichprobengültigkeit* (Krippendorf, 2004, S. 214 f.) zu gewährleisten, wurde eine Definition der Grundgesamtheit sowie ein repräsentativer Stichprobenumfang festgelegt. Die Grundgesamtheit, auf die sich die Ergebnisse der Studie beziehen, sind Schülerinnen und Schüler der neunten und zehnten Klasse im deutschen Schulsystem, deren Mathematikleistungen sich auf mittlerem bis hohem Niveau befinden. Der Stichprobenumfang wurde aus Repräsentativitätsgründen so gewählt, dass drei verschiedene Schulformen des niedersächsischen Schulsystems an der Untersuchung beteiligt waren: eine Realschule, eine Oberschule und eine Gesamtschule. Von diesen Schulen wurden aus dem neunten und zehnten Jahrgang alle Klassen genutzt, die zur Verfügung gestellt wurden.

Die *Stabilität* des Analyseinstruments (Krippendorf, 2004, S. 214 f.) wurde sichergestellt, indem geprüft wurde, dass eine wiederholte Anwendung auf das Material zu gleichen Ergebnissen führt. Im Rahmen der Entwicklung der Kategoriensysteme wurden diese mehrfach auf 20% des Materials angewendet. Hierbei konnte überprüft werden, ob die Kodierungen über mehrfache Anwendungen hinweg stabil blieben. Sofern das nicht der Fall war, wurden die Kodierregeln weiter präzisiert.

Das Kriterium der *Reproduzierbarkeit*, d. h. das Potenzial eines Analyseinstruments unabhängig von den Kodierenden sowie den situativen Bedingungen stets die gleichen Ergebnisse zu liefern (Krippendorf, 2004, S. 214 f.), hängt davon ab, wie präzise und explizit das Vorgehen bei der Analyse beschrieben wurde (siehe Kapitel 6.2.2.4 und 6.2.2.5). Die Reproduzierbarkeit lässt sich außerdem durch die *Interraterreliabilität*, also das Übereinstimmungsmaß zwischen verschiedenen Kodierenden, die das gleiche Material analysieren, messen. Hierbei handelt es sich um das bekannteste Gütekriterium der qualitativen Inhaltsanalyse. Wie schon beim Kriterium der Auswertungsobjektivität im vorigen Kapitel, wurde hierfür der häufig verwendete Reliabilitäts-Koeffizient Cohens Kappa genutzt. Die Interraterreliabilität lag bei der Kodierung der Modellierungsleistung und der einzelnen Modellierungsteilprozesse bei mindestens Cohens $\kappa = .80$ und bei der Kodierung der Skizzenkriterien bei mindestens Cohens $\kappa = .84$ und war somit in beiden Fällen sehr gut.

Die Güte der Untersuchung kann umgekehrt auch durch den *Ausschluss von Quellen, die zu mangelnder Reliabilität führen* können, gesichert werden. So können systematische Unstimmigkeiten bei bestimmten Auswertungseinheiten zwischen Kodierenden zu mangelnder Reliabilität führen. Auch eine Häufung von Unstimmigkeiten in bestimmten Kategorien spricht für systematische Quellen. Bei der vorliegenden Untersuchung wurden solche systematischen Unstimmigkeiten durch Hinzuziehen weiterer Expertenmeinungen, insbesondere Besprechung in der Arbeitsgruppe und mit den betreuenden Personen sowie durch präzisere Kategoriendefinitionen behoben.

7.5 *Statistische Analysemethoden*

Im ersten Unterkapitel wird der Umgang mit fehlenden Werten in den statistischen Analysen dargelegt. In den darauffolgenden Unterkapiteln werden die jeweiligen genutzten Methoden in der Reihenfolge der Fragestellungen erläutert. Dabei wird geprüft, ob die jeweiligen Voraussetzungen für die statistischen Verfahren erfüllt sind. Die Erläuterungen und Prüfungen werden in diesem Kapitel vorweggenommen, um im Ergebnisteil den Fokus auf die eigentlichen Ergebnisse legen zu können.

7.5.1 Umgang mit fehlenden Werten

Bei Betrachtung der vollständigen gegenüber den abgebrochenen und fehlenden Aufgabenbearbeitungen (Abbildung 17) wurde offensichtlich, dass die Anzahl der vollständigen Aufgabenbearbeitungen mit steigender Reihenfolgeposition der Aufgabe im Testheft deutlich abnahm, während die unvollständigen und fehlenden Aufgabenbearbeitungen entsprechend zunahmen.

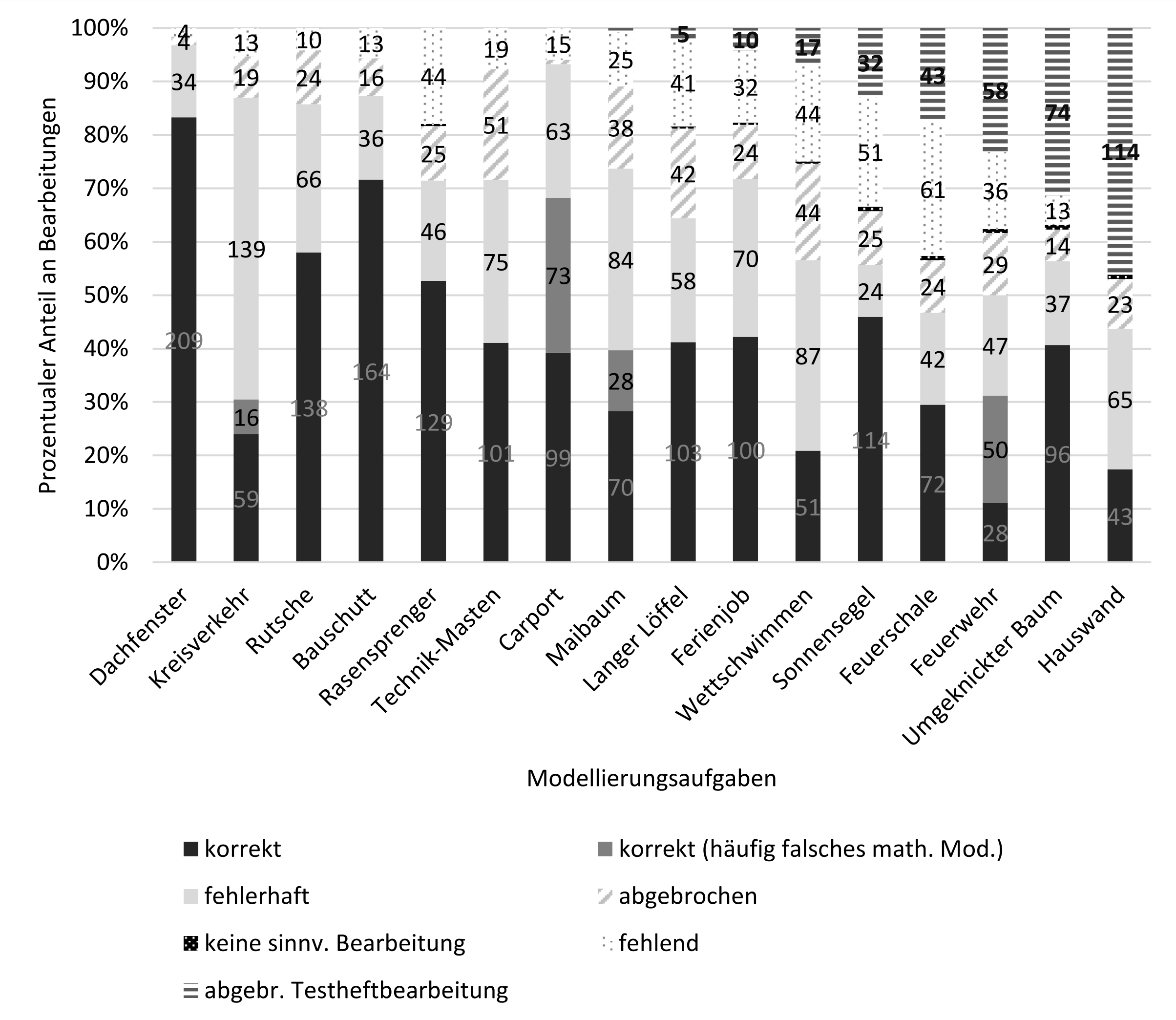


Abbildung 17: Auswertung der Modellierungsprozesse

Eine konkrete Betrachtung der fehlenden Bearbeitungen aufgrund von abgebrochenen Testheftbearbeitungen zeigte zudem, dass ein großer Anteil darauf zurückzuführen ist, dass die gesamte Bearbeitung der Testhefte häufig abgebrochen wurde – vergleichbar zu den Ergebnissen eines Speedtests. Geht man davon aus, dass die Aufgaben in der Regel in der Reihenfolge bearbeitet werden, in der sie im Testheft positioniert sind, deutet dies auf einen erheblichen Einfluss der zeitlichen Begrenzung des Tests hin. Diese hat offenbar dazu geführt, dass viele Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage waren, die Aufgaben in der vorgegebenen Zeit zu bearbeiten. Auch wenn Schnelligkeit beim Leistungsbegriff eine Rolle spielt, stand dieser Faktor nicht im Fokus der vorliegenden Studie. Es ist davon auszugehen, dass das Skizzenzeichnen zusätzliche Zeit in Anspruch nimmt und daher ein Einbezug fehlender Testheftbearbeitungen als Score 0 bei der Modellierungsleistung dazu führt, dass ein „Leistungsabfall“ erzeugt wird, der vor allem auf den Zeitfaktor zurückzuführen ist. Um dies zu vermeiden, wurden fehlende Bearbeitungen aufgrund von abgebrochenen Testheftbearbeitungen, d. h. nicht erreichte Items (not reached), je Probandin oder Proband aus der Bewertung der Modellierungsleistung ausgeschlossen und als fehlende Werte behandelt.

7.5.2 Ungepaarter t-Test zur Überprüfung der Manipulation

Zur Überprüfung der Manipulation wurde eine t-Test-Analyse für unabhängige Stichproben durchgeführt, bei der die durchschnittliche relative Häufigkeit der gezeichneten Skizzen zwischen den zwei Experimentalgruppen verglichen wurde.[36] Der t-Test wird verwendet, um zu untersuchen, ob zwei Stichproben aus Populationen stammen, die sich im Mittelwert (Parameter μ_1 und μ_2) unterscheiden oder identisch sind. Demnach lautet die Nullhypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ und die Alternativhypothese $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.[37] Für den Unterschied zwischen den Gruppen dient also die Mittelwertdifferenz als Indikator. Um einen t-Test für unabhängige Stichproben durchzuführen, müssen verschiedene Voraussetzungen erfüllt sein:

i. Unabhängigkeit der Messwerte *innerhalb* und *zwischen* den Stichproben
ii. Intervallskalierung des untersuchten Merkmals
iii. Keine Ausreißer bezüglich des untersuchten Merkmals
iv. Normalverteilung des Merkmals in beiden Stichproben
v. Homoskedastizität, d. h. Gleichheit der Varianzen der beiden Stichproben

Die Unabhängigkeit der Messwerte *innerhalb* der beiden Subpopulationen ist dann erfüllt, wenn der Messwert einer Person nicht durch den Messwert einer anderen Person der gleichen Subpopulation beeinflusst ist (Bortz & Schuster, 2010, S. 122; Eid, Gollwitzer, & Schmitt, 2017, S. 335). Die Unabhängigkeit der Messwerte zwischen den Stichproben ist gegeben,

[36] Nicht-erreichte Items wurden dabei ausgeschlossen (vgl. Kapitel 7.5.1).

[37] Eine gerichtete Alternativhypothese hätte folgende Form: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ oder $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, allerdings werden diese hier nicht genutzt.

wenn der Messwert einer Person in der ersten Teilstichprobe davon unbeeinflusst ist, welchen Messwert eine Person aus der zweiten Teilstichprobe hat (Sedlmeier & Renkewitz, 2018, S. 411). Der möglichen Abhängigkeit der Messwerte wurde in der vorliegenden Studie entgegengewirkt, indem die Testhefte den Testpersonen randomisiert zugewiesen wurden. Zudem saßen die Probandinnen und Probanden an Einzelplätzen ohne Möglichkeit der Kommunikation – weder mit Versuchspersonen der gleichen noch der anderen Teilstichprobe. Weiterhin wurden die Instruktionen standardisiert, um eine Unabhängigkeit von der jeweiligen Versuchsleiterin bzw. den einzelnen Versuchsdurchführungen gewährleisten zu können.

Die untersuchten Merkmale – in diesem Fall die relative Skizzenhäufigkeit zum Thema *Satz des Pythagoras* und zum Thema *Flächeninhalte* – wurden für die einzelnen Items dichotom kodiert. Anschließend wurde ein Mittelwert über alle Aufgaben berechnet. Insofern wurden die Variablen als intervallskaliert angenommen.

Der Datensatz wurde bezüglich der relativen Skizzenhäufigkeiten in den Teilstichproben auf Ausreißer überprüft. Ausreißer sollten nur aus Datensätzen ausgeschlossen werden, wenn gute Gründe dafür gegeben sind, wie wenn z. B. die Antwortmuster auf Missverständnisse oder die Boykottierung der Teilnahme hindeuten (Eid et al., 2017, S. 710). Aufgrund extremer Werte wurden vier Probandinnen und Probanden aus der Experimentalgruppe mit Skizzenverbot von der weiteren Datenauswertung ausgeschlossen. Dabei handelte es sich um Teilnehmende, die trotz des Verbots besonders viele Skizzen gezeichnet haben (bei über 30 % der erreichten Testitems). Es gab weitere zehn Fälle, die das Statistikprogramm als extreme Ausreißer kennzeichnete, in denen der Anteil der gezeichneten Skizzen an erreichten Testitems aber gering war (unter 30 %). Da das zu einem Ausschluss einer hohen Fallzahl geführt hätte und nur geringfügig von dem Skizzenverbot abgewichen wurde, blieben diese Fälle in den Analysen enthalten. Weitere vier Fälle extremer Ausreißer der Experimentalgruppe wurden ausgeschlossen, bei denen Teilnehmende besonders wenig Skizzen erstellten (bei unter 70 % der erreichten Testitems). Darüber hinaus wurden zwei Fälle ausgeschlossen, in denen nahezu keine Aufgabe sinnvoll bearbeitet, sondern fast ausschließlich unsinnige Antworten gegeben wurden. Nach Ausschluss der Ausreißer befanden sich in der Gesamtstichprobe noch 254 Fälle, davon 87 Teilnehmende in der Experimentalgruppe mit Skizzenverbot und 167 Teilnehmende in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung.

Die Voraussetzung der Normalverteilung kann zum einen grafisch anhand eines Histogramms, zum anderen mithilfe statistischer Test-Verfahren (z. B. Kolmogorov-Smirnov-Test, vgl. Eid et al., 2017, S. 322) oder Shapiro-Wilk-Test (Bortz & Schuster, 2010, S. 145)) überprüft werden. Die Histogramme zu den relativen Skizzenhäufigkeiten (Anhang K) zeigten deutlich, dass diese in beiden Experimentalgruppen nicht normalverteilt waren. Das ist nicht überraschend, da es im Sinne des Versuchsdesigns war, dass in der Experimentalgruppe ohne Skizzenaufforderung keine und in der Gruppe mit Skizzenaufforderung durchgehend Skizzen erstellt werden. Für die statistische Prüfung der Normalverteilung wurde der Shapiro-Wilk-Test verwendet (Bortz & Schuster, 2010, S. 145), der bestätigte, dass die Skizzenhäufigkeit in beiden Experimentalgruppen nicht normalverteilt war (in beiden Fällen: $p < .001$). Da die Stichprobengröße von

$n \geq 30$ aber für beide Gruppen erfüllt war, konnte die Voraussetzung vernachlässigt werden. Alternativ hätten nonparametrische Verfahren wie der Mann-Whitney-U-Test verwendet werden können, allerdings weisen parametrische Tests generell eine höhere Teststärke auf und können Unterschiede deshalb besser aufdecken. Deshalb wird das Verfahren des t-Tests nach Möglichkeit vorgezogen.

Zur Überprüfung der Homoskedastizität wurde der Levene-Test verwendet, da dieser eine robuste Alternative zum F-Test darstellt. Wenn die Voraussetzung der Varianzhomogenität verletzt ist, liegt das sogenannte *Behrens-Fisher-Problem* vor, für dessen Lösung Welch (1947) den Vorschlag gemacht hat, eine Korrektur der Freiheitsgrade vorzunehmen. Im Falle der relativen Skizzenhäufigkeit in den verschiedenen Experimentalbedingungen lag Varianzheterogenität vor, weshalb die Ergebnisse des Welch-Tests interpretiert wurden. Die Skizzenhäufigkeit in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung war statistisch signifikant höher ($M = 96.88$, $SD = 5.96$) als die Skizzenhäufigkeit in der Experimentalgruppe mit Skizzenverbot ($M = 1.17$, $SD = 3.53$), wobei die Mittelwertdifferenz bei 95 Prozentpunkten lag (95%-CI[-96.89; -94.53]), $t(247.36) = -160.16$, $p < .001$, $d = 19.54$. Das Ergebnis des Welch-Tests zeigte, dass die Manipulation des Untersuchungsdesigns wirksam war und die Testpersonen sowohl dem Skizzenverbot als auch der Skizzenaufforderung gefolgt sind: Im Falle des Verbots haben die Lernenden das Skizzenzeichnen in nahezu allen Fällen unterlassen und im Falle der Aufforderung wurde das Zeichnen einer Skizze von den meisten Teilnehmenden bei allen Items durchgeführt.

7.5.3 Gepaarter t-Test zur Analyse der Mittelwertunterschiede der Skizzenvariablen zwischen den Themen

Der t-Test für abhängige Stichproben ist zielführend, wenn zwei Gruppen miteinander verglichen werden, in denen Messwerte paarweise voneinander abhängig sind. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn zwei Messungen anhand einer Stichprobe durchgeführt werden. Als Kennwert dient auch bei dieser Testart die Mittelwertdifferenz zwischen den Messungen. Die Hypothesen entsprechen denen des t-Tests für *un*abhängige Stichproben.

Folgende Voraussetzungen gelten für die Durchführung des gepaarten t-Tests:

i. Unabhängigkeit der Messwerte *innerhalb* der Stichproben
ii. Intervallskalierung des untersuchten Merkmals
iii. Keine Ausreißer bezüglich des untersuchten Merkmals
iv. Normalverteilung der Residuen

7.5.3.1 Skizzenhäufigkeit, Skizzenqualität und Abstraktionsgrad der Skizzen

Zur Überprüfung der Hypothesen (1.1.), (1.2.) und (1.4.) wurde der t-Test für abhängige Stichproben genutzt, um mögliche Unterschiede hinsichtlich der Skizzenhäufigkeit, -qualität, der einzelnen Skizzenqualitätskriterien und des Abstraktionsgrades der Skizzen zwischen den Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* zu identifizieren. Die Wahl fiel auf diese

Analysemethode, da die Variablen bei jeder Testperson für beide Themen erhoben wurden und die Testungen somit voneinander abhängig waren (Rasch, Friese, Hofmann, & Naumann, 2014a, S. 62). Die Untersuchung der Variablen fand ausschließlich anhand der Daten aus der Gruppe mit Skizzenaufforderung statt, da nur in dieser Gruppe durchgängig Skizzen gezeichnet wurden (vgl. Kapitel 7.5.2).

Die Unabhängigkeit der Messwerte innerhalb der Stichproben bedeutet im Falle des gepaarten t-Tests, dass ein Wertepaar nicht von einem anderen beeinflusst sein darf. Hier kommen für die Gewährleistung der Unabhängigkeit in der vorliegenden Studie die Maßnahmen zum Tragen, die bereits im Rahmen der Voraussetzungen für den ungepaarten t-Test beschrieben wurden (vgl. Kapitel 7.5.2).

Für die Skizzenvariablen wurde jeweils Intervallskalierung angenommen, da diese als Mittelwerte über die acht Modellierungsaufgaben je Thema gebildet wurden. Die unabhängige, nominalskalierte Variable stellte das Thema *Satz des Pythagoras* bzw. *Flächeninhalte* dar. Für die Prüfung der Normalverteilung der Residuen musste für die drei Skizzenkriterien zunächst jeweils eine Differenzvariable berechnet werden. Anhand dieser Differenzvariablen wurde die grafische Analyse durch Boxplot-Darstellungen sowie eine statistische Prüfung auf Normalverteilung mittels Shapiro-Wilk-Test durchgeführt.

In den Boxplot-Darstellungen zur Skizzenhäufigkeit wurden beim Thema *Satz des Pythagoras* 14 Fälle und beim Thema *Flächeninhalte* 19 Fälle als Ausreißer ausgegeben. Dabei handelte es sich um echte Ausreißer, weshalb die t-Test-Analysen einmal unter Einschluss und einmal unter Ausschluss der Ausreißer berechnet wurden. Es ergaben sich keine Unterschiede, die die Interpretation der Ergebnisse beeinflusst hätten, weshalb die Ausreißer im Datensatz belassen wurden. Insgesamt wurden somit 166 Fälle der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung in die Analyse der Skizzenhäufigkeit einbezogen. Die Differenz der Skizzenhäufigkeit zwischen den mathematischen Themen war gemäß dem Shapiro-Wilk-Test nicht normalverteilt ($p < .001$), aber die Stichprobengröße von $n > 30$ sicherte ggf. die Signifikanz des Ergebnisses.

Bei der Skizzenqualität gab es keine extremen Ausreißerwerte, sodass 166 Fälle der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung in die Analysen einbezogen wurden. Die Differenz der Skizzenqualität zwischen den Themen war gemäß Shapiro-Wilk-Test nicht normalverteilt ($p < .001$), aber durch die Stichprobengröße von $n > 30$ ist ggf. die Signifikanz des Ergebnisses erneut sichergestellt.

Zur Analyse des Abstraktionsgrades wurden ausschließlich vorhandene Skizze betrachtet und fehlende Skizzen ausgeschlossen, da der Abstraktionsgrad nur bewertet werden kann, wenn eine Skizze vorhanden ist. Für den Abstraktionsgrad wurde ein Gesamtscore durch Mittelwertbildung bestimmt. Im Datensatz befanden sich fünf Teilnehmende, bei denen der Abstraktionsgrad der Skizzen zum Thema *Satz des Pythagoras* extreme Ausprägungen annahm und 22 Fälle mit Ausreißerwerten zum Abstraktionsgrad der Skizzen beim Thema *Flächeninhalte*. Deshalb wurden die t-Test-Analysen sowohl mit als auch ohne diese Ausreißer durchgeführt. Die Ergebnisse wurden in beiden Fällen signifikant, weshalb die Ausreißer im

Datensatz belassen und 166 Fälle der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung analysiert wurden. Gemäß Shapiro-Wilk-Test war die Differenz des Abstraktionsgrades der Skizzen zwischen den mathematischen Themen nicht normalverteilt ($p < .001$). Durch die Stichprobengröße von $n > 30$ war die Signifikanz jedoch gesichert.

Mittels Korrelationen und ggf. Streudiagrammen wurde zudem für jede der Variablen geprüft, dass hohe Werte der einen Variablen mit hohen Werten der anderen einhergehen[38], um zu gewährleisten, dass keine negative Korrelation vorliegt, die zu einem Verlust der Teststärke geführt hätte. Anderenfalls hätten nonparametrische Verfahren wie der Wilcoxon-Test verwendet werden müssen (Bortz & Schuster, 2010, S. 125).

7.5.3.2 Skizzenqualitätskriterien

Der gepaarte t-Test erwies sich ebenso als geeignetes Testverfahren, um Unterschiede der einzelnen Skizzenqualitätskriterien, also der Darstellung der lösungsrelevanten Objekte, der Darstellung der lösungsrelevanten Relationen und der Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten in der Skizze zu untersuchen. Die Skizzenqualitätskriterien wurden ebenso wie die anderen Skizzenvariablen bei jeder Testperson für beide Themen erhoben – wodurch sich abhängige Werte ergaben. Für die Qualitätskriterien wurde bei jedem Item der Score 0 oder 1 vergeben und daraus wurde zum Schluss ein Mittelwert errechnet. Deshalb werden die Qualitätskriterien als intervallskaliert angenommen. Bei keiner der drei Skizzenqualitätskriterien gab es Ausreißerwerte.

Die grafische Analyse zeigte, dass bei allen Qualitätskriterien die mittleren Werte der Residuen sehr stark vertreten waren, während die Randwerte selten vorkamen. Die statistische Prüfung mittels Shapiro-Wilk-Test ergab, dass bei keinem der Qualitätskriterien die Residuen normalverteilt waren[39]. Da es sich um die gleiche Stichprobe wie beim vorherigen t-Test handelt, galt aber auch hier, dass aufgrund der Stichprobengröße von $n \geq 30$ die Voraussetzung der Normalverteilung der Residuen vernachlässigt werden konnte.

Zudem konnte mit Hilfe von Korrelationen gezeigt werden, dass bei allen drei Qualitätskriterien hohe Werte zum Thema *Satz des Pythagoras* mit hohen Werten zum Thema *Flächeninhalte* einhergingen,[40] sodass der t-Test trotz mangelnder Normalverteilung nicht an Teststärke verliert.

---

[38] Skizzenhäufigkeit: Pearsons $r = .04$, $p = .601$; Skizzenqualität: $r = .59$, $p < .001$; Abstraktionsgrad der Skizzen: $r = .52$, $p < .001$. Da im Falle der Skizzenhäufigkeit keine Korrelation vorlag, wurde zusätzlich anhand eines Streudiagramms sichergestellt, dass dennoch tendenziell hohe Werte der Skizzenhäufigkeit beim Thema *Satz des Pythagoras* mit hohen Werten bei Thema *Flächeninhalte* einhergehen (Abbildung 48 im Anhang L), und keine negative Korrelation vorliegt.

[39] Darstellung der Objekte: $p = .009$, Darstellung der Relationen $p = .008$, Beschriftung mit relevanten Zahlenwerten: $p = .013$

[40] Darstellung der Objekte: Pearsons $r = .58$, $p < .001$; Darstellung der Relationen: $r = .50$, $p < .001$; Beschriftung mit relevanten Zahlenwerten: $r = .64$, $p < .001$

7.5.4 Hierarchische Regressionsanalyse zum Zusammenhang zwischen dem Skizzenzeichnen und der Modellierungsleistung

Um den Zusammenhang zwischen dem Skizzenzeichnen (d. h. der Skizzenhäufigkeit, der Skizzenqualität und des Abstraktionsgrades der Skizzen) und der Modellierungsleistung unter Kontrolle leistungsrelevanter Hintergrundvariablen analysieren zu können, wurden multiple Regressionsanalysen durchgeführt. Das Verfahren der multiplen linearen Regression stellt eine Erweiterung der einfachen linearen Regression dar, indem die Integration von zwei oder mehr Prädiktorvariablen in das Modell ermöglicht wird. Multiple Regressionsanalysen können durchgeführt werden, um den Einfluss von Drittvariablen statistisch konstant zu halten und damit zu kontrollieren bzw. um den Einfluss der interessierenden Variablen über die Drittvariablen hinaus zu untersuchen (Bortz & Schuster, 2010, S. 342). Das Verfahren der Regressionsanalyse unterscheidet sich insofern von Partial- und Semipartialkorrelationen, dass letztere auf ungerichtete Zusammenhänge abzielen, während die multiple Regressionsanalyse einen gerichteten Zusammenhang beschreibt (Eid et al., 2017, S. 630). Das Ziel der Studie bestand darin, individuelle Unterschiede in der Modellierungsleistung durch die Unterschiede im Skizzenzeichenverhalten erklären zu können. Zur Untersuchung dieses gerichteten Zusammenhangs wurde daher die Analysemethode der Regression gegenüber Partial- und Semipartialkorrelationen bevorzugt.

Bei einer multiplen Regressionsanalyse wird zunächst geprüft, ob die unabhängigen Variablen insgesamt dazu beitragen, Unterschiede der Kriteriumsvariable aufzuklären. Dies wird durch den Determinationskoeffizienten R^2 bestimmt, der dem Quadrat der multiplen Korrelation R zwischen den beobachteten y-Werten und den vorhergesagten y-Werten entspricht. Der Determinationskoeffizient gibt den Anteil der Varianz der Kriteriumsvariablen an, der durch die unabhängigen Variablen gemeinsam erklärt wird (Eid et al., 2017, S. 641). Die Werte des Determinationskoeffizienten können zwischen 0 (keine Varianzaufklärung) und 1 (vollständige Varianzaufklärung) liegen.

Entsprechend lautet die Nullhypothese zur ersten Annahme der Regressionsanalyse:

$$H_0\text{: P} = 0 \qquad \text{oder} \qquad H_0\text{: } \beta_1 = ... = \beta_j = ... = \beta_k = 0$$

und die Alternativhypothese:

$$H_1\text{: P} > 0 \qquad \text{oder} \qquad H_1\text{: mindestens ein } \beta_j \neq 0$$

wobei P dem Determinationskoeffizienten entspricht und β für die Regressionskoeffizienten steht.

Wird die Nullhypothese verworfen, wird anhand der Regressionsgewichte β weiter untersucht, welche der unabhängigen Variablen einen relevanten Einfluss auf die abhängige Variable haben. Die unstandardisierten Regressionsgewichte geben an, um welchen Wert sich die unabhängige Variable verändert, wenn sich die unabhängigen Variablen um eine Einheit ändern. Demnach sind die Regressionsgewichte abhängig von der Einheit des jeweiligen Prädiktors und können zwar inhaltlich gut interpretiert, jedoch nicht miteinander verglichen werden. Häufig ist bei einer Regressionsanalyse aber von Interesse, welchen Einfluss die Prädiktoren im Verhältnis zueinander haben. Zu diesem Zweck können standardisierte (von Einheiten unabhängige) Regressionskoeffizienten berechnet werden, die angeben, um wie viele Standardabweichungen sich die Werte des Kriteriums ändern, wenn sich der Prädiktor um eine Standardabweichung ändert (Eid et al., 2017, S. 639). Bei der Nullhypothese für diesen zweiten Analyseschritt der Regression wird untersucht, ob die einzelnen Regressionskoeffizienten gleich 0 sind:

$$H_0\colon \beta_j = 0 \qquad \text{wobei } j = 1, \ldots, k$$

Die Alternativhypothese lautet entsprechend, dass der jeweilige Regressionskoeffizient ungleich 0 ist:

$$H_1\colon \beta_j \neq 0$$

Die Voraussetzungen für die Berechnung einer Regressionsanalyse bestehen in folgenden Annahmen (Bortz & Schuster, 2010, S. 342–348; Eid et al., 2017, S. 704–718):

i. Keine Ausreißer bezüglich des untersuchten Merkmals (vgl. Kapitel 7.5.2)
ii. Intervallskalierung der Kriteriumsvariable (vgl. Kapitel 7.5.2) sowie metrisches oder dichotomes Skalenniveau der Prädiktoren
iii. Stichprobenumfang *n* ist größer als die Anzahl der Prädiktoren
iv. Linearität zwischen Prädiktoren und Kriterium
v. Keine Multikollinearität
vi. Homoskedastizität (vgl. Kapitel 7.5.2)
vii. Normalverteilung der Residuen (vgl. Kapitel 7.5.3)

Während die Voraussetzungen i., ii., iii. und vii. bereits bei den vorherigen statistischen Analysemethoden erläutert wurden, gibt es einige besondere Voraussetzungen bei der multiplen Regressionsanalyse. Die Prädiktoren bei der Regressionsanalyse können metrische oder dichotome Merkmale sein (iii.) (Bortz & Schuster, 2010, S. 342). Außerdem muss der Stichprobenumfang größer sein als die Anzahl der Prädiktoren (iv.), um Multikollinearität zu vermeiden (Bortz & Schuster, 2010, S. 354).

Ein linearer Zusammenhang zwischen Prädiktor und Kriterium (iv.) ist entscheidend dafür, dass die multiple lineare Regression die statistische Bedeutung des Zusammenhangs effektiv einschätzen kann. Nicht-lineare Zusammenhänge werden von einer multiplen linearen Regressionsanalyse unterschätzt. Die Linearität kann anhand von Streudiagrammen überprüft werden, wobei die visuelle Einschätzung allein anhand der Streudiagramme zum Teil schwierig ist. Deshalb kann zusätzlich das LOWESS- bzw. LOESS-Anpassungsverfahren genutzt werden (***LO***cally ***WE***ighted ***S***catterplot ***S***moother), bei dem eine Linie in das Streudiagramm eingepasst wird, die den Zusammenhang zwischen den zwei Variablen darstellt, ohne dass eine bestimmte Gleichung vorgegeben ist (Eid et al., 2017, S. 705). Darüber hinaus kann durch

Kurvenanpassung geprüft werden, ob ein anderes Modell (z. B. quadratisch, kubisch, exponentiell, usw.) erheblich mehr Varianzaufklärung liefert als das lineare Modell. In diesem Fall bietet sich eine Transformation der Variable an.

Der Begriff Multikollinearität (v.) meint eine hohe Korrelation zwischen einzelnen Prädiktoren, die dazu führen würde, dass die Ergebnisse der Regressionsanalyse verzerrt werden (Eid et al., 2017, S. 712). Deshalb ist für die Berechnung einer Regression auszuschließen, dass Multikollinearität zwischen einzelnen Prädiktoren vorliegt. Die Prüfung auf Multikollinearität kann anhand des Toleranz- oder des Varianzinflations-Faktors durchgeführt werden, wobei diese Koeffizienten jeweils den Kehrwert voneinander darstellen. Deshalb genügt die Interpretation von einem der Koeffizienten (Eid et al., 2017, S. 712).

Bei Regressionsanalysen wird die Homoskedastizität, also die Varianzgleichheit der Residuen, in der Regel anhand von Residuenplots überprüft. Dabei werden die unstandardisierten vorhergesagten Werte auf der x-Achse und die studentisierten Residuen auf der y-Achse abgebildet (Eid et al., 2017, S. 714). Homoskedastizität liegt dann vor, wenn sich bei den Residualwerten keine bedingten Schwankungen feststellen lassen, sondern die Punkte im Streudiagramm gleichmäßig in Bezug auf die x-Achse verteilt sind.

Eine besondere Form der multiplen, linearen Regression stellt die hierarchische (auch: sequenzielle oder kumulative) Regressionsanalyse dar, bei der auf der Grundlage theoretischer Vorüberlegungen Prädiktoren in einer zuvor festgelegten Reihenfolge schrittweise in das Regressionsmodell eingefügt werden (Urban & Mayerl, 2018, S. 349 f.). Da die vorliegende Arbeit von theoretisch begründeten Hypothesen ausgeht und Vorannahmen bezüglich der Prädiktoren berücksichtigt werden sollten, wurde diese Art der Regressionsanalyse gegenüber einer herkömmlichen schrittweisen Regressionsanalyse oder etwa einer Analyse mit Einschluss[41] präferiert.

7.5.4.1 Skizzenzeichnen und allgemeine Modellierungsleistung

Um die Hypothese (2.1.) zum Zusammenhang der Skizzenzeichenvariablen mit der allgemeinen Modellierungsleistung zu prüfen, wurde das statistische Verfahren der hierarchischen Regressionsanalyse genutzt. Dabei stellte die Modellierungsleistung in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung (zum Thema *Satz des Pythagoras* bzw. zum Thema *Flächeninhalte*) die abhängige Variable dar; die geometriebezogene Leistung, die allgemeine Mathematikleistung, das Geschlecht und die Skizzenpräferenz wurden als Hintergrundvariablen einbezogen; und die Skizzenvariablen (Häufigkeit, Qualität, Abstraktionsgrad) waren die Prädiktoren, die im Fokus des Forschungsinteresses standen.

[41] Die Entscheidung darüber, welche Kombination der Prädiktoren bei der Regressionsanalyse die „beste“ ist, ist bei der *schrittweisen* Regression eher willkürlich, weil die Relevanz der Prädiktoren häufig von den bereits aufgenommenen bzw. noch nicht aufgenommenen Prädiktoren abhängt. Für nähere Erläuterungen zur Problematik der schrittweisen Regressionsanalyse siehe Bortz & Schuster, 2010, S. 358.

Die Skizzenvariablen wurden bereits im Rahmen der gepaarten t-Test-Analysen (vgl. Kapitel 7.5.3) auf Ausreißer überprüft. Bei der abhängigen Variablen, der allgemeinen Modellierungsleistung, liegen weder im Themenbereich *Satz des Pythagoras* noch beim Thema *Flächeninhalte* Ausreißerwerte vor. Die Modellierungsleistung wurde je Item dichotom mit 0 und 1 kodiert und anschließend wurde ein Mittelwert über die gewerteten Items berechnet. Insofern konnte eine Intervallskalierung der abhängigen Variablen angenommen werden. Die geometriebezogene Leistung wurde mit einem Score zwischen 0 und 8 bewertet. Dabei handelte es sich um Testleistungspunkte, deren Skalenniveau als metrisch gilt. Schulnoten sind genau genommen nicht metrisch, sondern nur ordinal skaliert. Dennoch wurde die Variable für die vorliegenden Analysen als metrisch skaliert angenommen, um ein ungefähres Maß für die allgemeine Mathematikleistung einbeziehen zu können. Die Skizzenpräferenz wurde anhand von einzelnen Likert-Items erhoben, die durch Mittelwertbildung zusammengefasst wurden. Aufgrund dieser Mittelwertbildung konnte auch die Variable der Skizzenpräferenz als intervallskaliert behandelt werden.

Zur Auswertung der Regressionsanalysen wurden standardisierte Regressionsgewichte verwendet. Wenn man den Vorhersagebeitrag verschiedener Variablen für eine abhängige Variable vergleichen möchte, sind die standardisierten Regressionsgewichte insbesondere dann geeignet, wenn die Variablen in unterschiedlicher Metrik erfasst wurden (Eid et al., 2017, S. 640). Unstandardisierte Regressionsgewichte eigneten sich bei der vorliegenden Studie hingegen weniger, da deren Größe unter anderem von der Metrik der Variable abhängt (Eid et al., 2017, S. 640).

Der Stichprobenumfang betrug bei dieser Analyse $n = 166$ und lag damit deutlich über der Anzahl von Prädiktoren (7). Anhand von Streudiagrammen und mit Hilfe von LOWESS-Anpassungslinien wurde für alle Prädiktoren nachgewiesen, dass der Zusammenhang zwischen der Modellierungsleistung als abhängiger Variable und den unabhängigen Variablen jeweils in etwa linear war. Zudem ergab die Kurvenanpassung, dass andere Modelle als das lineare Modell – wenn überhaupt – nur geringfügig mehr Varianzaufklärung lieferten.

Die Toleranzkoeffizienten ergaben, dass sowohl beim Thema *Satz des Pythagoras* als auch beim Thema *Flächeninhalte* bei keinem der Prädiktoren Multikollinearität vorlag, da die Werte in allen Fällen deutlich über 0.10 lagen. Die Streudiagramme zur Überprüfung der Homoskedastizität zeigten, dass die Residualwerte bei beiden geometrischen Themen unsystematisch um 0 schwankten.

Die grafische Analyse der Residuen anhand der Histogramme legte nahe, dass in beiden Themenbereichen Normalverteilung der Residuen vorlag. Die Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Test bestätigten diese Annahme, und zeigten, dass die Residuen in beiden Fällen normalverteilt waren ($p = .331$ bzw. $p = .357$).

7.5.4.2 Skizzenzeichnen und Leistung in den Teilschritten des Modellierens

Zur Überprüfung der Hypothese (2.2.) wurden ebenfalls multiple, hierarchische Regressionsanalysen durchgeführt, allerdings mit der Leistung in den Teilphasen des Modellierungsprozesses (Leistung bei der *Bildung des Realmodells*, bei der *Auswahl des allgemeinen mathematischen Modells*, bei der *Bildung des spezifischen mathematischen Modells* und bei der *Berechnung des mathematischen Resultats*) als abhängige Variablen. In diesem Fall war die Fragestellung jedoch gezielt darauf ausgerichtet, eine Vorhersage der Leistung im jeweils *spezifischen* Teilprozess zu treffen. Die Besonderheit dieser Analysen gegenüber der Regressionsanalyse zur allgemeinen Modellierungsleistung bestand deshalb darin, dass die Leistung des je vorherigen Modellierungsteilprozesses auspartialisiert wurde. Es ergaben sich hierarchische Regressionsanalysen mit drei Schritten: Im ersten Schritt wurde die Leistung im jeweils vorherigen Modellierungsschritt in das Regressionsmodell aufgenommen. Dieser Schritt entfiel bei der Bildung des Realmodells, da es der erste Modellierungsteilprozess ist. Im zweiten Schritt wurden analog zum Vorgehen in Kapitel 8.4.1 die Kontrollvariablen als Block in das Modell aufgenommen und im letzten Schritt folgte die simultane Aufnahme der Skizzenvariablen.

Da auch bei diesen Regressionsanalysen die Skizzenvariablen als Prädiktoren einbezogen wurden, wurden die Analysen grundsätzlich unter Einschluss der Ausreißerwerte durchgeführt, zusätzlich aber unter Ausschluss der Ausreißer, um sicherstellen zu können, dass die Ergebnisse der Regressionsanalysen nicht verzerrt wurden. Bei den abhängigen Variablen (also der Leistung im jeweiligen Modellierungsschritt) gab es keine Ausreißerwerte.

Die Leistung in den einzelnen Modellierungsschritten wurde ebenso wie die allgemeine Modellierungsleistung dichotom kodiert und durch anschließende Mittelwertbildung zusammengefasst, sodass eine Intervallskalierung angenommen werden kann. Die Skalierung der Hintergrund- und Skizzenvariablen entspricht der im vorangehenden Kapitel 7.5.4.1. Die Stichprobe umfasste auch bei diesen Analysen n = 166 und überstieg damit deutlich die Anzahl der Prädiktoren von sieben bzw. acht. Der Zusammenhang zwischen der Leistung im jeweiligen Modellierungsschritt und den Prädiktoren wurde mittels grafischer Analyse von Streudiagrammen und dem LOWESS-Anpassungsverfahren geprüft. In allen Fällen erwiesen sich die Zusammenhänge als annähernd linear. Die Prüfung auf Linearität mittels Kurvenanpassung zeigte ebenfalls, dass andere Modelle zum Teil weniger und zum anderen Teil nur geringfügig mehr Varianzaufklärung lieferten, weshalb die Variablen in ihrer Form beibehalten wurden.

Die Berechnung der Toleranzkoeffizienten zeigte, dass in keinem Fall Multikollinearität gegeben war, die die Ergebnisse der Regressionsanalysen hätte verzerren können. Sowohl beim *Satz des Pythagoras* als auch beim Thema *Flächeninhalte* lagen die Koeffizienten stets über 0.10.

Um Homoskedastizität zu überprüfen, wurden die Residuenplots mit den unstandardisierten vorhergesagten Werten und den studentisierten Residuen analysiert. Da die Werte unsystematisch um den Wert 0 verteilt waren, ist Homoskedastizität anzunehmen. Auch die Normalverteilung der Residuen war in den meisten Fällen gegeben, wie die grafische Analyse der Streudiagramme sowie die Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests zeigten. In zwei Fällen waren die Residuen jedoch nicht normalverteilt, weshalb die Regressionsanalysen mit Bootstrap-Verfahren durchgeführt wurden, um robuste Inferenzstatistiken zu gewährleisten. In diesen Fällen wird beim Ergebnisbericht auf die Verwendung des Bootstrappings hingewiesen.

7.5.5 Test des Mittelwertunterschiedes zur expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze zwischen den Themen

Zur Beantwortung der Frage nach der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und dem Zusammenhang mit der Modellierungsleistung wurde zunächst ein gepaarter t-Test zum Vergleich der Darstellung des mathematischen Modells zwischen den Themen durchgeführt. Die Analysemethode des gepaarten t-Tests wurde bereits in Kapitel 7.5.3 erläutert. Für die in diesem Kapitel zu beantwortende Fragestellung war die Methode zielführend, da die Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze je Testperson für beide Themen erhoben wurde. Für die Analyse werden ausschließlich die Daten aus der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung genutzt, da – dem Untersuchungsdesign entsprechend – nur in dieser Gruppe in großem Umfang Skizzen erstellt wurden.

Die zur Unabhängigkeit der Messwerte innerhalb der Stichprobe ergriffenen Maßnahmen, die bereits in Kapitel 7.5.2 beschrieben wurden, kamen bei dieser Analyse erneut zum Tragen. Die explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze wurde je Item dichotom mit 0 und 1 kodiert. Anschließend wurden die Einzelscores durch Mittelwertbildung zu einem Score aggregiert, weshalb die Variable als intervallskaliert angenommen werden konnte. Die Variable wies weder beim Thema *Satz des Pythagoras* noch beim Thema *Flächeninhalte* Ausreißerwerte auf. Eine grafische Analyse zeigte, dass die Residuen der Variablen in etwa normalverteilt waren. Dennoch konnte mittels Shapiro-Wilk-Test keine Normalverteilung nachgewiesen werden ($p = .025$). Die Stichprobengröße lag jedoch mit $n = 166$ weit über dem Mindestwert von $n \geq 30$. Darüber hinaus gab es eine hohe Korrelation (Pearsons $r = .52$, $p < .001$) zwischen den Variablen, die nachwies, dass hohe Werte bei der Darstellung des mathematischen Modells in Skizzen zum Thema *Satz des Pythagoras* mit hohen Werten beim Thema *Flächeninhalte* einhergingen. Somit lag keine negative Korrelation vor, die zu einem Verlust der Teststärke geführt hätte.

7.5.6 Testung des Zusammenhangs zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und der Modellierungsleistung

Zunächst wurden Korrelationsanalysen durchgeführt, um zu erforschen, welcher Zusammenhang zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und der Modellierungsleistung besteht. Jedoch war abzusehen, dass sich dieser Zusammenhang kaum von dem zwischen Skizzenqualität und Modellierungsleistung unterscheiden wird, da das mathematische Modell in der Regel eine gewisse Skizzenqualität voraussetzt: Das mathematische

Modell kann in vielen Fällen nicht vollständig korrekt dargestellt werden, ohne dass die relevanten Objekte und/ oder die relevanten Relationen in der Skizze dargestellt sind. Aus diesem Grund ist vor allem der Mehrwert des mathematischen Modells gegenüber einer Skizze mit vollständigen Objekten und Relationen, aber ohne mathematisches Modell von Interesse. Dafür wurde zusätzlich zur Korrelationsanalyse eine einfaktorielle Varianzanalyse durchgeführt.

7.5.6.1 Korrelationsanalysen

Korrelationsanalysen eignen sich, wenn eine paarweise Beziehung zwischen zwei Merkmalen überprüft werden soll (Bortz & Schuster, 2010, S. 153; Rasch et al., 2014a, S. 85). Im vorliegenden Fall wurde die Analyse für den Zusammenhang zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und der Modellierungsleistung durchgeführt. Dafür wurde die Produkt-Moment-Korrelation (auch: Korrelationskoeffizient) genutzt, die gegenüber der Kovarianz den Vorteil bietet, dass es sich um ein standardisiertes, von den Messeinheiten unabhängiges Maß handelt (Bortz & Schuster, 2010, S. 153–156; Rasch, Friese, Hofmann, & Naumann, 2014b, S. 85). Der Korrelationskoeffizient kann Werte zwischen -1 und +1 annehmen, wobei +1 für einen perfekten positiven Zusammenhang und -1 für einen perfekten negativen Zusammenhang steht. Der Wert 0 ist gegeben, wenn keine Korrelation vorliegt. Die Voraussetzungen für die Berechnung eines Korrelationskoeffizienten sind folgende (Bortz & Schuster, 2010, S. 161 ff.):

i. Keine Ausreißer bezüglich der untersuchten Merkmale
ii. Intervallskalierung der Variablen
iii. Linearität zwischen den Variablen
iv. Bivariate Normalverteilung bzw. Normalverteilung der Einzelvariablen

Die Überprüfung der Variablen auf Ausreißer fand bereits in den Kapiteln 7.5.4.1 und 7.5.5 statt und ergab, dass in beiden Fällen keine Ausreißerwerte vorlagen. Auch die Intervallskalierung der Variablen wurde in den genannten Kapiteln bereits nachgewiesen. Würde kein Intervallskalenniveau vorliegen, hätten andere Methoden zur Analyse des Zusammenhangs, wie z. B. die punktbiseriale Korrelation oder die Rangkorrelation[42], verwendet werden können. Durch die grafische Analyse der Zusammenhänge anhand von Streudiagrammen sowie von LOWESS-Anpassungslinien konnte gezeigt werden, dass sowohl beim Thema *Satz des Pythagoras* als auch beim Thema *Flächeninhalte* Linearität zwischen den Variablen gegeben war und somit einer Unterschätzung des Zusammenhangs vorgebeugt wurde. Mittels Kurvenanpassung wurde außerdem nachgewiesen, dass andere Modelle nicht mehr Varianzaufklärung lieferten als das lineare Modell. Deshalb wurde keine der Variablen transformiert.

Da die bivariate Normalverteilung nur schwer zu überprüfen ist, wurde entsprechend der Empfehlung von Bortz & Schuster (2010, S. 162) stattdessen die Normalverteilung der Einzelvariablen als Kriterium herangezogen. Bereits die grafische Darstellung als Histogramme ließ

[42] Da die erwähnten Analysemethoden in der vorliegenden Untersuchung keine Anwendung fanden, werden sie nicht näher erläutert. Für nähere Ausführungen dazu siehe Rasch et al. (2014a, S. 94–97).

bei den Variablen keine Normalverteilung erkennen und der Shapiro-Wilk-Test bestätigte, dass in keinem Fall eine Normalverteilung gegeben war ($p < .001$ bei allen Variablen). Die Verteilungsannahme kann jedoch vernachlässigt werden, da diese in erster Linie für den Signifikanztest des Korrelationskoeffizienten relevant und dieser robust gegenüber Verletzungen dieser Annahme ist (Bortz & Schuster, 2010, S. 162).

7.5.6.2 Einfaktorielle Varianzanalysen ohne Messwiederholung

Die einfaktorielle Varianzanalyse wurde als ergänzendes Verfahren zur Überprüfung von Hypothese (3.2.) verwendet, da mit Hilfe dieser Analyse zum einen herausgearbeitet werden kann, ob das mathematische Modell über die vollständige Darstellung von Objekten und Relationen in der Skizze hinaus den Lösungserfolg erklären kann. Zum anderen kann dieser Mehrwert mit Hilfe der Varianzanalyse gleichzeitig auch mit dem Mehrwert der vollständigen Darstellung von Objekten und Relationen gegenüber der unvollständigen Darstellung für die erfolgreiche Lösung der Modellierungsaufgaben verglichen werden. Folgende Stufen wurden für die Varianzanalyse gewählt:

- Stufe 1: Skizzen, in denen die Objekte und Relationen *un*vollständig dargestellt sind
- Stufe 2: Skizzen mit vollständigen Objekten und Relationen, aber *ohne* erkennbares mathematisches Modell
- Stufe 3: vollständige Skizzen, die alle Objekte und Relationen sowie deutlich erkennbar das mathematische Modell enthalten

Die Analysen konnten nur aufgabenweise (und nicht als Mittelwert für jede Versuchsperson) durchgeführt werden, weil die beschriebene Kategorienstufung sonst nicht hätte angewendet werden können. In die verschiedenen Stufen wurden jeweils die Werte unterschiedlicher Testpersonen eingeordnet, sodass es sich um unabhängige Stichproben handelte, für die sich das einfaktorielle Varianzanalyseverfahren *ohne* Messwiederholung anbot (anstelle des Verfahrens *mit* Messwiederholung für abhängige Stichproben).

Die Varianzanalyse, als Erweiterung des t-Tests, bietet sich für diese Zielsetzungen an, da bei dem Analyseverfahren die Mittelwerte von mehr als zwei Gruppen verglichen werden können. Die Durchführung einer einfaktoriellen Varianzanalyse wurde aufgrund der Problematik der α-Fehler-Kumulierung sowie der möglicherweise verringerten Teststärke der Durchführung mehrfacher t-Tests vorgezogen[43]. Das entscheidende Maß, das für die Varianzanalyse genutzt wird, ist der F-Wert, der als Bruch aus der Residualvarianz und der Effekt- und Residualvarianz berechnet wird (Rasch et al., 2014b, S. 14 f.). Dieser kann entweder den Wert eins annehmen, wenn die systematische Varianz null beträgt, oder einen Wert größer eins, für den Fall, dass die systematische Varianz größer als null ist. Allerdings muss bei der Varianzanalyse durch einen Signifikanztest nachgewiesen werden, dass der F-Wert nicht nur zufällig höher als eins liegt. Die Nullhypothese der einfaktoriellen Varianzanalyse lautet entsprechend, dass

[43] Detaillierte Erläuterungen zu beiden Problematiken finden sich z. B. bei Rasch et al. (2014b, S. 2 ff.).

zwischen den Erwartungswerten der einzelnen Faktorstufen keine Unterschiede vorliegen (Eid et al., 2017, S. 399):

$$H_0: \mu_i = \mu_j \qquad \text{für alle Paare (i, j), } i \neq j$$

Die Alternativhypothese besagt dagegen, dass mindestens zwischen zwei der Erwartungswerte ein Unterschied besteht:

$$H_1: \mu_i \neq \mu_j \qquad \text{für mindestens ein Paar (i, j), } i \neq j$$

Um eine einfaktorielle Varianzanalyse durchführen zu können, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

i. Unabhängigkeit der Messwerte *innerhalb* und *zwischen* den Stichproben
ii. Intervallskalierung der abhängigen Variable und Nominalskalierung der unabhängigen Variable
iii. Keine Ausreißer in den Daten
iv. Normalverteilung der Residuen
v. Homoskedastizität, d. h. Gleichheit der Varianzen innerhalb aller Populationen

Die Unabhängigkeit der Messerwerte innerhalb, aber auch zwischen den Gruppen ist die entscheidende Voraussetzung dafür, dass die Varianzanalyse *ohne* Messwiederholung (und nicht *mit* Messwiederholung) angewandt wird. Beides war zum einen durch die Versuchsbedingungen (vgl. Kapitel 7.5.2) und dadurch gewährleistet, dass es sich um unterschiedliche Versuchspersonen handelte. Die abhängige Variable stellt die aufgabenweise Modellierungsleistung dar, die dichotom kodiert wurde. Auch wenn die Varianzanalyse vorrangig für intervallskalierte abhängige Variablen verwendet wird, kann sie im Falle großer Fallzahlen bzw. hoher Freiheitsgrade von mindestens 40 auch bei dichotomen Variablen angewendet werden (Lunney, 1970). Bei der abhängigen Variable traten Ausreißerwerte bei einzelnen Items auf – in erster Linie, weil es Aufgaben gab, die nur selten falsch gelöst wurden. Somit wurden Fälle mit dem Score 0 als Ausreißer gekennzeichnet. Da es sich dabei aber nicht um Messfehler oder unsinnige Bearbeitungen handelte, wurden die Daten im Datensatz belassen. Die drei verschiedenen Skizzenkategorien stellten die unabhängigen Variablen dar, die somit nominalskaliert waren. Auch bei diesen Variablen gab es bei einigen Items Ausreißerwerte, da in diesen Fällen besonders häufig vollständige Skizzen mit mathematischem Modell erstellt wurden und nur selten unvollständige Skizzen. Auch dabei handelt es sich aber um sinnvolle Daten, die deshalb beibehalten wurden.

Zwar ließ die grafische Darstellung als Histogramm eine annähernde Normalverteilung vermuten, allerdings belegte der Shapiro-Wilk-Test, dass dennoch keine Normalverteilung gegeben war ($p < .001$). Auch Varianzhomogenität lag nicht vor. Deshalb werden die Ergebnisse des Welch-Tests berichtet, der durch Korrektur der Freiheitsgrade eine robuste Alternative darstellt (Welch, 1947).

7.5.7 Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung zur Testung der Mittelwertunterschiede in der Modellierungsleistung je nach Experimentalbedingung und geometrischem Thema

Die Fragestellung 4.1. lautete: „Welchen Einfluss hat die Aufforderung zum Skizzenzeichnen im Vergleich zu der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf die Leistung beim Lösen geometrischer Modellierungsaufgaben? Bestehen hier Unterschiede zwischen den Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte*?“ Zur Beantwortung der Frage nach den Themenunterschieden wurde eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor durchgeführt. Diese Analysemethode bietet sich an, wenn ein Faktor durch wiederholte Messung erhoben und ein anderer Faktor nicht messwiederholt untersucht wurde (Rasch et al., 2014b, S. 71). In diesem Fall stellt das geometrische Thema den Innersubjektfaktor dar (mit Messwiederholung) und die Experimentalbedingung gilt als Zwischensubjektfaktor (ohne Messwiederholung). Es handelt sich bei der vorliegenden Analyse nicht um eine zeitliche Messwiederholung, sondern die Werte der Modellierungsleistung wurden für die zwei geometrischen Themen bei den gleichen Testpersonen erhoben und gelten deshalb als messwiederholt. Mit Hilfe der zweifaktoriellen Varianzanalyse kann geprüft werden, ob eine Wechselwirkung zwischen den zwei Faktoren vorliegt. Die Gesamtvarianz berechnet sich dann aus der Wechselwirkung zwischen dem Innersubjekt- und dem Zwischensubjektfaktor sowie dem Messfehler.

Die Voraussetzungen überschneiden sich zum Großteil mit denen der einfaktoriellen Varianzanalyse (vgl. Kapitel 7.5.6.2), allerdings kommen weitere hinzu (Rasch et al., 2014b, S. 71):

i. Intervallskalierung der abhängigen Variable
ii. Nominalskalierung des Zwischensubjektfaktors und des Innersubjektfaktors
iii. Keine Ausreißer in den Gruppen
iv. Normalverteilung der abhängigen Variable
v. Homoskedastizität, d. h. Gleichheit der Varianzen über alle Gruppen
vi. Sphärizität (Gleichheit der Varianzen zwischen den Gruppen)

Die Modellierungsleistung als abhängige Variable wurde bereits in vorhergehenden Analysen als intervallskaliert nachgewiesen. Sowohl die Experimentalbedingung als auch das mathematische Thema sind jeweils nominalskaliert. Mittels Boxplot wurde für beide Experimentalbedingungen nachgewiesen, dass es in den einzelnen Gruppen keine Ausreißer hinsichtlich der Modellierungsleistung gab. Die grafische Analyse der Histogramme und auch die Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests zeigten ($p < .001$ in allen Fällen), dass die abhängigen Variablen in den einzelnen Gruppen nicht normalverteilt waren. Da die Stichproben mit $n = 87$ und $n = 166$ das Mindestmaß von $n > 30$ jedoch deutlich überstiegen, konnte die Voraussetzung vernachlässigt werden. Die Varianzhomogenität wurde mit Hilfe des Levene-Tests (vgl. Kapitel 7.5.2) überprüft, der ergab, dass die Varianzen der abhängigen Variablen über die Gruppen hinweg gleich waren.

Eine Besonderheit bei der zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung stellt die Sphärizitäts-Annahme dar, die darin besteht, dass die Varianzen der Differenzen zwischen jeweils zwei Faktorstufen homogen sein sollen. Da bei der vorliegenden Analyse jedoch nur zwei Faktorstufen gegeben sind, erübrigt sich die Voraussetzung der Sphärizität in diesem Fall.

Das weitere Vorgehen nach einer zweifaktoriellen Varianzanalyse hängt von deren Ergebnis ab: Liegt ein signifikanter Interaktionseffekt zwischen den Faktoren vor, so werden im Anschluss die bedingten (auch: einfachen) Haupteffekte berechnet, d. h. die Haupteffekte einer Faktorstufe gemittelt über alle Stufen des jeweils anderen Faktors (Eid et al., 2017, S. 433 f.). Zudem werden post-hoc-Tests durchgeführt, um herauszuarbeiten, zwischen welchen Faktorstufen Unterschiede auftreten (Eid et al., 2017).

Besteht jedoch *keine* Interaktion zwischen den Faktoren, werden stattdessen die unbedingten Haupteffekte der Faktoren ausgewertet, d. h. die Unterschiede zwischen den Stufen des jeweiligen Faktors ohne Berücksichtigung des anderen. Auch hier kann mittels post-hoc-Tests überprüft werden, zwischen welchen Stufen die Unterschiede auftreten. Diese Analysen wurden in der vorliegenden Studie durchgeführt, da in diesem Fall kein Interaktionseffekt vorlag. Die Ergebnisse der Analysen liefern dennoch Hinweise zur Beantwortung der Frage, welchen Einfluss die Skizzenzeichenaufforderung auf den Lösungserfolg beim Modellieren für beide geometrische Themen *einzeln* hatte.

7.5.8 Ungepaarte t-Tests zur aufgabenspezifischen Analyse der Mittelwertunterschiede im Lösungserfolg je nach Experimentalbedingung

Ergänzend zur zweifaktoriellen Varianzanalyse mit den über alle Items aggregierten Variablen wurden Mittelwertvergleiche für die einzelnen Items durchgeführt, um erforschen zu können, ob die Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, möglicherweise in Abhängigkeit bestimmter Aufgabenmerkmale einen Einfluss auf den Lösungserfolg beim Modellieren hat. Der ungepaarte t-Test bot sich als Analysemethode an, da untersucht werden sollte, ob sich die Experimentalgruppen hinsichtlich ihres Mittelwertes des Lösungserfolges bei den einzelnen Aufgaben unterscheiden. Die Voraussetzungen zur Durchführung des Mittelwertvergleichs wurden bereits in Kapitel 7.5.2 dargelegt und die Überprüfung der ersten zwei Voraussetzungen kann ebenfalls aus diesem Kapitel übernommen werden:

i. Unabhängigkeit der Messwerte *innerhalb* und *zwischen* den Stichproben
ii. Intervallskalierung des untersuchten Merkmals
iii. Keine Ausreißer bezüglich des untersuchten Merkmals
iv. Normalverteilung des Merkmals in beiden Stichproben
v. Homoskedastizität, d. h. Gleichheit der Varianzen der beiden Stichproben

Das untersuchte Merkmal ist bei der vorliegenden Analyse der Lösungserfolg für die einzelne Aufgabe, welcher dichotom mit 0 oder 1 bewertet wurde und deshalb als intervallskaliert behandelt wird. Aufgrund der Dichotomie gab es Items, bei denen Ausreißerwerte auftraten. Dennoch wurden diese im Datensatz belassen, da es sich um echte und korrekte Werte handelte. Die Voraussetzung der Normalverteilung war nicht gegeben, konnte aufgrund der hohen Fallzahl jedoch vernachlässigt werden. Der Levene-Test ergab, dass die Homogenität der Varianzen nur bei einem Teil der Items gegeben war und beim anderen Teil verletzt war. In diesen Fällen werden anstelle des t-Tests die Ergebnisse des Welch-Test berichtet und es wird an den entsprechenden Stellen im Ergebnisbericht darauf hingewiesen.

7.5.9 Zweifaktorielle Varianzanalysen zur Testung der Mittelwertunterschiede in der Modellierungsleistung je nach Experimentalbedingung in Abhängigkeit der Hintergrundvariablen

Die Hypothesen (4.1.) bis (4.5.) befassen sich mit dem Einfluss der Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot auf die Modellierungsleistung unter Kontrolle relevanter Hintergrundvariablen. Zur Überprüfung dieser Hypothesen wurden zweifaktorielle Varianzanalysen ohne Messwiederholung durchgeführt. Die Voraussetzungen entsprechen denen der einfaktoriellen Varianzanalyse (vgl. Kapitel 7.5.6.2):

i. Unabhängigkeit der Messwerte *innerhalb* und *zwischen* den Stichproben
ii. Intervallskalierung der abhängigen Variable sowie Nominalskalierung der unabhängigen Variablen
iii. Keine Ausreißer in den Gruppen
iv. Normalverteilung der Residuen
v. Homoskedastizität, d. h. Gleichheit der Varianzen über alle Gruppen

Auch für diese Analyse können die bereits beschriebenen (vgl. Kapitel 7.5.2) Maßnahmen zur Gewährleistung der Unabhängigkeit der Messwerte innerhalb und zwischen den Gruppen herangezogen werden. Bei der Varianzanalyse wurde die Modellierungsleistung (jeweils separat für das Thema *Satz des Pythagoras* und das Thema *Flächeninhalte*) als intervallskalierte abhängige Variable und die Experimentalbedingung sowie die jeweilige Hintergrundvariable als nominalskalierte unabhängige Variablen integriert. Ausreißerwerte traten nur in wenigen Fällen auf, sodass die Analysen in diesen Fällen mit und ohne Ausreißer durchgeführt wurden. Sofern dabei eine maßgebliche Veränderung in den Ergebnissen auftrat, wird im Ergebnisbericht speziell darauf hingewiesen.

Der Shapiro-Wilk-Test ergab, dass die Residuen der abhängigen Variable bei beiden geometrischen Themen normalverteilt waren. Die Homoskedastizität wurde mit dem Levene-Test überprüft und war nur für einen Teil der Analysen gegeben. In einigen Fällen waren die Fehlervarianzen nicht gleich, sodass die Ergebnisse der Varianzanalysen in diesen Fällen nicht berichtet werden konnten. Dennoch werden die Ergebnisse der anschließenden paarweisen Vergleiche berichtet, da diese unabhängig vom Ergebnis der Varianzanalyse sind.

8 Ergebnisse

Die Ziele der vorliegenden Arbeit bestanden in

(1) der Analyse der Häufigkeit, Qualität und des Abstraktionsgrades von Skizzen, die von Schülerinnen und Schülern des neunten und zehnten Jahrgangs während der Bearbeitung von geometrischen Modellierungsaufgaben erstellt werden
(2) einer Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Skizzenzeichnen und der Modellierungsleistung
(3) einer Analyse der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und dessen Zusammenhang mit der Modellierungsleistung sowie
(4) einer Untersuchung der Wirkung der Skizzenaufforderung gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf die Modellierungsleistung der Schülerinnen und Schüler.

Darüber hinaus wurden diese zentralen Fragestellungen anhand von zwei verschiedenen geometrischen Themenbereichen untersucht, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede hinsichtlich der genannten Aspekte zwischen den geometrischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* identifizieren zu können.

In den folgenden Kapiteln wird zunächst eine grundlegende Analyse von Hintergrundmerkmalen der Teilnehmenden (Kapitel 8.1) sowie der Modellierungsprozesse (Kapitel 8.2) vorgestellt, um einen Überblick über die Probandengruppe und deren Testheftbearbeitungen zu verschaffen. Anschließend werden die Ergebnisse der deskriptiven Analysen sowie der gepaarten t-Tests zur Skizzenhäufigkeit, -qualität und zum Abstraktionsgrad der Skizzen vorgestellt (Kapitel 8.3). Darauf folgen die Ergebnisse der Zusammenhangsanalysen zwischen dem Skizzenzeichnen und der geometrischen Modellierungsleistung (Kapitel 8.4) sowie die Ergebnisse der Analyse zur expliziten Darstellung des mathematischen Modells und deren Zusammenhang mit der Modellierungsleistung (Kapitel 8.5). Im letzten Abschnitt wird der Einfluss der Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot auf die Modellierungsleistung eingehend geprüft – im Allgemeinen, aber auch im Spezifischen für einzelne Teilphasen des Modellierens sowie unter Einbezug von Hintergrundvariablen (Kapitel 8.6). Eventuelle Erläuterungen innerhalb des Ergebnisteils dienen zur Verständlichkeit der Ergebnisse und zur Vorbereitung der Beantwortung der Forschungsfragen. Die Interpretation und Diskussion der Ergebnisse folgen in Kapitel 9.

8.1 Analyse der Probandengruppe

In der vorliegenden Studie wurden verschiedene Hintergrundvariablen erhoben, um den Zusammenhang zwischen dem Skizzenzeichnen und der Modellierungsleistung sowie die Wirkung der Skizzenaufforderung in Abhängigkeit dieser Kovariaten analysieren zu können. Im folgenden Kapitel werden deshalb die Ausprägungen der Hintergrundvariablen in der gewählten Probandengruppe dargelegt und deren Vergleichbarkeit zwischen den

Experimentalgruppen statistisch untersucht. Es handelt sich um den *Jahrgang*, das *Geschlecht*, die *allgemeine Mathematikleistung*, die *geometriebezogene Leistung* sowie die *Skizzenpräferenz*.

8.1.1 Vergleich der Experimentalbedingungen

Im folgenden Kapitel werden zum einen deskriptive, univariate Analyseergebnisse zu den Hintergrundvariablen vorgestellt, zum anderen die Ergebnisse inferenzstatistischer Analysen zum Vergleich der Variablen zwischen den zwei Experimentalbedingungen (1) Skizzenverbot und (2) Skizzenaufforderung erläutert.

Gemäß dem Shapiro-Wilk-Test waren alle untersuchten Hintergrundvariablen weder in den einzelnen Experimentalgruppen noch in der Gesamtstichprobe normalverteilt. Da die Stichprobengröße aber in allen Fällen deutlich mehr als 30 betrug, wird dennoch die Normalverteilung angenommen. Zur näheren Betrachtung der Verteilung wurden zudem die Schiefe und Kurtosis der Variablen analysiert (Tabelle 10 und Tabelle 11). Diese wurden jeweils z-standardisiert, um eine Interpretation zu ermöglichen und werden in den nachfolgenden Kapiteln 8.1.1.1 bis 8.1.1.4 zur Beschreibung der Verteilungen herangezogen. Als Grenzwert für die Schiefe und Kurtosis wird für die Experimentalgruppen jeweils ein Wert von +/-1.96 (da n > 200) und für die Gesamtstichprobe ein Wert von +/-2.58 (da n > 200) angenommen (Field, 2018, S. 248).

Tabelle 10: Schiefe der Hintergrundvariablen

	(1) Skizzenverbot (n = 87)		(2) Skizzenaufforderung (n = 166)		Gesamtstichprobe (N = 253)	
Hintergrundvariable	v	v_z	v	v_z	v	v_z
Allgemeine Mathematikleistung	0.126	0.472	0.110	0.564	0.122	0.772
Geometriebezogene Leistung	-0.054	-0.202	0.194	0.995	0.103	0.696
Skizzenpräferenz	-0.556	-2.082	-0.912	-4.677	-0.750	-4.911

Anmerkungen: v_z = z-standardisierte Schiefe

Tabelle 11: Kurtosis der Hintergrundvariablen

	(1) Skizzenverbot (n = 87)		(2) Skizzenaufforderung (n = 166)		Gesamtstichprobe (N = 253)	
Hintergrundvariable	ω	ω_z	ω	ω_z	ω	ω_z
Allgemeine Mathematikleistung	-0.763	-1.442	-0.827	-2.137	-0.793	-2.509
Geometriebezogene Leistung	-1.209	-2.285	-0.809	-2.090	-1.007	-3.117
Skizzenpräferenz	-0.277	-0.524	1.248	3.225	0.513	1.718

Anmerkungen: ω_z = z-standardisierte Kurtosis

Für alle Hintergrundvariablen wurde nach dem Levene-Test Varianzgleichheit festgestellt, sodass für die Analyse t-Tests genutzt werden konnten. Einen Überblick über die Ergebnisse der t-Tests gibt Tabelle 12. Die Ergebnisse werden an dieser Stelle nicht näher erläutert, sondern in den folgenden Abschnitten eingebunden. Vorläufig kann festgehalten werden, dass bei keiner der Hintergrundvariablen ein signifikanter Unterschied zwischen den Experimentalgruppen vorlag.

Tabelle 12: t-Tests zum Vergleich der Hintergrundvariablen zwischen den Experimentalbedingungen

	(1) Skizzen-verbot (n = 87)	(2) Skizzen-aufforderung (n = 166)	t-Test		
Variable	*M (SD)*	*M (SD)*	*t (df)*	*p*	Cohens *d*
Geschlecht	0.51 (0.63)	0.60 (0.65)	-1.15 (249)	.252	–
Jahrgang (9 oder 10)	9.75 (0.44)	9.77 (0.42)	-0.42 (251)	.672	–
Allgemeine Mathematikleistung	3.91 (1.21)	3.85 (1.11)	0.44 (234)	.663	–
Geometriebezogene Leistung über beide Themen	3.98 (2.32)	3.63 (2.22)	1.17 (251)	.242	–
Skizzenpräferenz	1.81 (0.58)	1.88 (0.51)	-0.93 (251)	.353	–

8.1.1.1 Geschlecht

An der Untersuchung nahmen 122 Schülerinnen und 122 Schüler teil (Tabelle 13). In sieben Fällen wurde die Angabe „sonstiges“ und zweimal keine Angabe gemacht. Somit waren die Teilnehmenden etwa zur Hälfte weiblich und männlich, während die Anteile in der Kategorie „sonstiges“ sehr gering waren und deshalb nicht als repräsentativ gelten können.

Tabelle 13: Geschlechterverteilung der Teilnehmenden (in der Gesamtstichprobe & unterteilt nach Experimentalbedingung)

	(1) Skizzenverbot (n = 87)		(2) Skizzenaufforderung (n = 166)		Gesamtstichprobe (N = 253)	
Geschlecht	Anzahl	%	Anzahl	%	Anzahl	%
weiblich	38	43.7	84	50.6	122	48.2
männlich	47	54.0	75	45.2	122	47.2
sonstiges	2	2.3	5	3.0	7	2.8
keine Angabe	–	–	2	1.2	2	0.8

Eine Betrachtung der Geschlechterverteilung separiert nach den Experimentalbedingungen zeigte, dass der Anteil an weiblichen Probandinnen in der Gruppe mit Skizzenverbot um etwa 7 Prozentpunkte geringer war als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung. Entsprechend war der Anteil an männlichen Probanden in der Gruppe mit Skizzenverbot um etwa 9 Prozentpunkte höher als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung. Die Anteile an Teilnehmenden mit der Angabe „sonstiges“ war in beiden Gruppen etwa gleich (2 bzw. 3 %) und fehlende Angaben traten nur in der Gruppe mit Skizzenaufforderung auf.

Die t-Test-Analyse wurde durchgeführt, indem für die Kategorie „männlich“ der Score 0 und für die Kategorie „weiblich“ der Score 1 vergeben wurde. Die Kategorie „sonstiges“ wurde aufgrund der geringen Fallzahl nicht miteinbezogen. Die t-Test-Analyse ergab, dass kein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Experimentalbedingungen hinsichtlich des Geschlechts vorlag, $t(249) = -1.15$, $p = .252$ (Tabelle 12). Demnach gab es keine statistisch relevanten Unterschiede bei der Geschlechterverteilung zwischen den Experimentalgruppen.

8.1.1.2 Allgemeine Mathematikleistung

An der Untersuchung nahmen Schülerinnen und Schüler des erweiterten (Stufe 2, Realschulniveau) und des Zusatzniveaus (Stufe 3, Gymnasialniveau) teil, dagegen keine Lernenden des Grundniveaus (Stufe 1, Hauptschulniveau). Die Teilnehmenden wurden anhand der siebenstufigen Skala (0 – 6 Punkte) eingeordnet, die durch das Kursniveau in Kombination mit der Mathematiknote auf dem letzten Zeugnis gebildet wurde (vgl. Kapitel 7.1.1).

Der Mittelwert der allgemeinen Mathematikleistung betrug in der Gruppe mit Skizzenverbot $M = 3.91$ und in der Gruppe mit Skizzenaufforderung $M = 3.85$ (Tabelle 12). Tabelle 14 gibt einen Überblick zur Verteilung der Probandinnen und Probanden über die Leistungsstufen in den einzelnen Experimentalbedingungen sowie in der Gesamtstichprobe. Die Leistungsstufen 0 und 1 waren in beiden Experimentalbedingungen gar nicht vertreten. Anhand Abbildung 18 ist erkennbar, dass der Anteil an Teilnehmenden in den Leistungsstufen 2, 4 und 6 in der Experimentalbedingung (1) mit Skizzenverbot höher war als in der Experimentalbedingung (2) mit Skizzenaufforderung. In der Gruppe mit Skizzenaufforderung war der Anteil bei den Leistungsstufen 3 und 5 entsprechend höher.

Die Berechnung der Schiefe zeigte, dass die allgemeine Mathematikleistung sowohl in den Experimentalgruppen als auch in der Stichprobe insgesamt normalverteilt war (Tabelle 10). Die Kurtosis war in der Experimentalgruppe mit Skizzenverbot ebenso wie in der Gesamtstichprobe am Grenzwert gemessen unauffällig (Tabelle 11), allerdings lagen die Werte nahe am Grenzwert. In der Gruppe mit Skizzenaufforderung war die Kurtosis auffällig und unterschritt den Grenzwert von -1.96. Dies deutet darauf hin, dass mehr Beobachtungswerte im mittleren Wertebereich lagen, als bei einer Normalverteilung üblich wäre.

Die inferenzstatistische Untersuchung mittels t-Test ergab, dass es beim Vergleich der Mittelwerte keinen signifikanten Unterschied zwischen den Experimentalbedingungen hinsichtlich der allgemeinen Mathematikleistung gab, $t(243) = 0.44$, $p = .663$ (Tabelle 12).

Tabelle 14: Häufigkeiten der allgemeinen Mathematikleistung der Teilnehmenden in den Experimentalbedingungen und der Gesamtstichprobe

	(1) Skizzenverbot (*n* = 87)		(2) Skizzenaufforderung (*n* = 166)		Gesamtstichprobe (*N* = 253)	
Leistungsstufe	absolut	%	absolut	%	absolut	%
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	11	13	17	10	28	11
3	19	22	48	29	67	27
4	27	31	42	25	69	27
5	14	16	38	23	52	21
6	10	12	10	6	20	8
keine Angabe	6	7	11	7	17	7

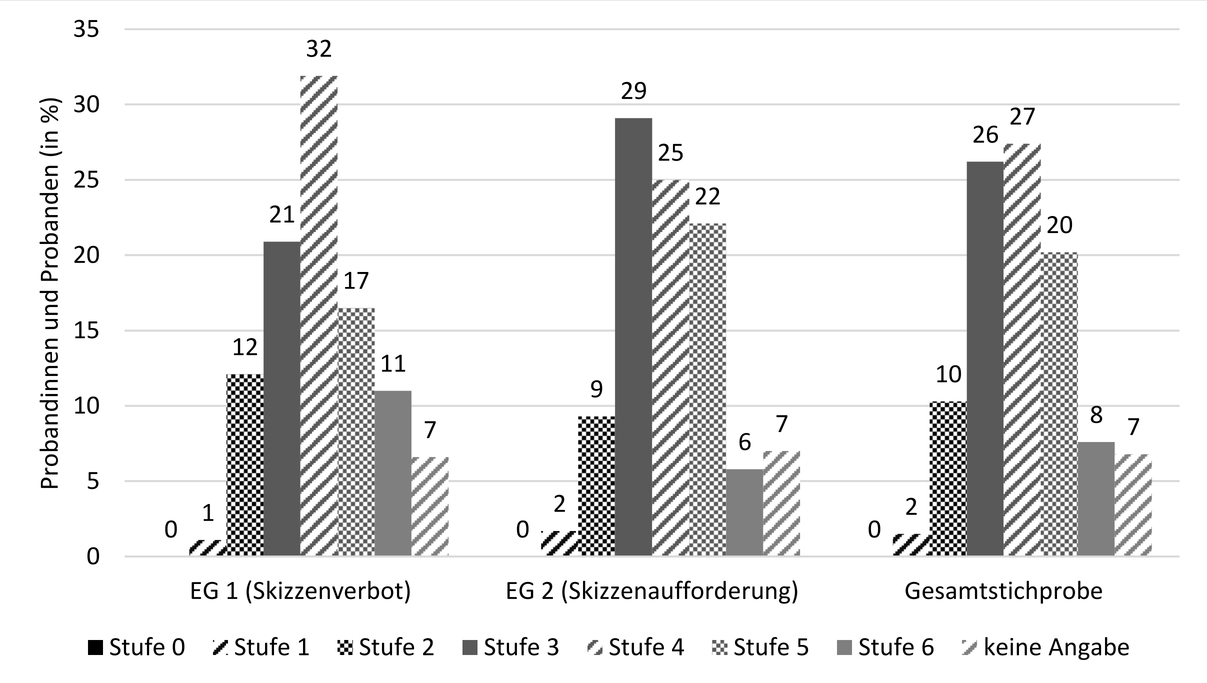


Abbildung 18: Prozentuale Häufigkeiten der Probandinnen und Probanden in den Leistungsstufen (0 bis 6) innerhalb der Experimentalgruppen (EG 1 und EG 2) und der Gesamtstichprobe

8.1.1.3 Geometriebezogene Leistung

Beim Test zur geometriebezogenen Leistung konnten insgesamt 8 Punkte erreicht werden (Tabelle 15). Der Mittelwert lag in der Gruppe mit Skizzenverbot um 0.35 Punkte höher als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung (Tabelle 12). Bei einer grafischen Analyse der Diagramme (Abbildung 19) fiel auf, dass die Häufigkeitsverteilung in der Gruppe mit Skizzenverbot geringfügig rechtssteil war, während sie in der Gruppe mit Skizzenaufforderung eher linkssteil ausgerichtet war. Die Berechnung der Schiefe zeigte allerdings, dass diese Tendenzen nicht statistisch relevant waren, da die Werte in keinem Fall auffällig waren (Tabelle 10). Die

Kurtosis lag hingegen sowohl in den Experimentalgruppen als auch in der Gesamtstichprobe deutlich im negativen Bereich (Tabelle 11). Demnach gab es hier mehr Beobachtungswerte im mittleren Bereich. Die t-Test-Analysen ergaben, dass die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der geometriebezogenen Leistung nicht signifikant waren, $t(251) = 1.17$, $p = .242$ (Tabelle 12).

Tabelle 15: Häufigkeiten der Punkte im geometriebezogenen Test in den Experimentalbedingungen und der Gesamtstichprobe

Geometriebez. Leistung (Test-Punkte)	(1) Skizzenverbot (n = 87)		(2) Skizzenaufforderung (n = 166)		Gesamtstichprobe (N = 253)	
	absolut	%	absolut	%	absolut	%
0	6	7	12	7	18	7
1	9	10	23	14	32	13
2	14	16	22	13	36	14
3	9	10	23	14	32	13
4	10	12	29	18	39	15
5	11	13	21	13	32	13
6	11	13	16	10	27	11
7	15	17	11	7	26	10
8	2	2	9	5	11	4

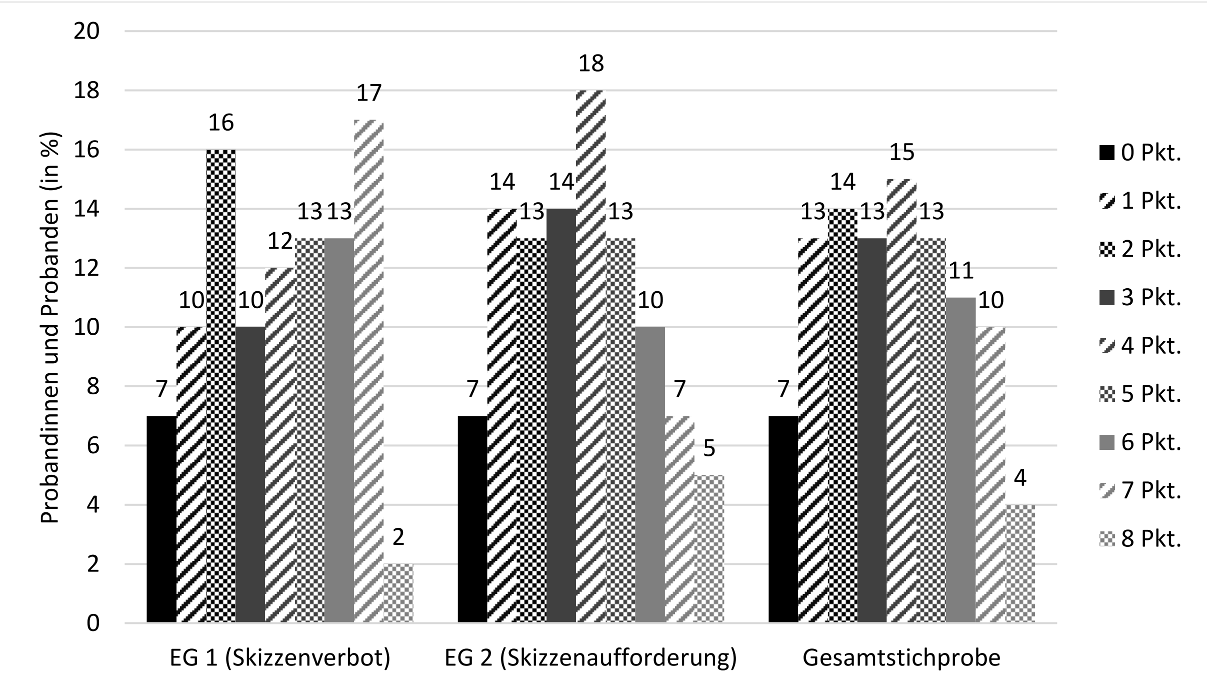


Abbildung 19: Prozentuale Häufigkeiten der Probandinnen und Probanden bzgl. der Punkte zum geometriebezogenen Test innerhalb der Experimentalgruppen (EG) und der Gesamtstichprobe

8.1.1.4 Skizzenpräferenz

Zur Einschätzung der Skizzenpräferenz wurden, wie in Kapitel 7.1.2 beschrieben, die Antworten der Teilnehmenden mit zunehmender Häufigkeit der Skizzennutzung mit den Scores 0 bis 3 bewertet und daraus anschließend ein Mittelwert errechnet, der Auskunft über die mittlere Skizzenpräferenz gab.

Die Berechnung der Mittelwerte bewirkte eine hohe Anzahl unterschiedlicher Werte, weshalb auf eine tabellarische Darstellung der Häufigkeiten zu dieser Variable verzichtet wird. Stattdessen wird die Häufigkeitsverteilung durch Diagramme veranschaulicht. Die Diagramme lassen eine rechtssteile Verteilung erahnen, da hier mehr Beobachtungswerte im hohen Wertebereich zu erkennen sind (Abbildung 20 – Abbildung 22). Die Berechnung der Schiefe bestätigt die Annahme, da die Werte deutlich im negativen Bereich lagen (Tabelle 10). Demnach traten hinsichtlich der Skizzenpräferenz bei der vorliegenden Untersuchung deutlich mehr hohe Beobachtungswerte auf, als es bei einer Normalverteilung zu erwarten wäre. Die Kurtosis ist in der Gruppe mit Skizzenverbot und in der Gesamtstichprobe unauffällig, allerdings überstieg der Wert für die Gruppe mit Skizzenaufforderung den Grenzwert von 1.69. Die Wölbung der Verteilungskurve ist demnach spitzer als bei einer Normalverteilungskurve, was darauf hindeutet, dass hier mehr Beobachtungswerte in den Randbereichen der Verteilung vorlagen.

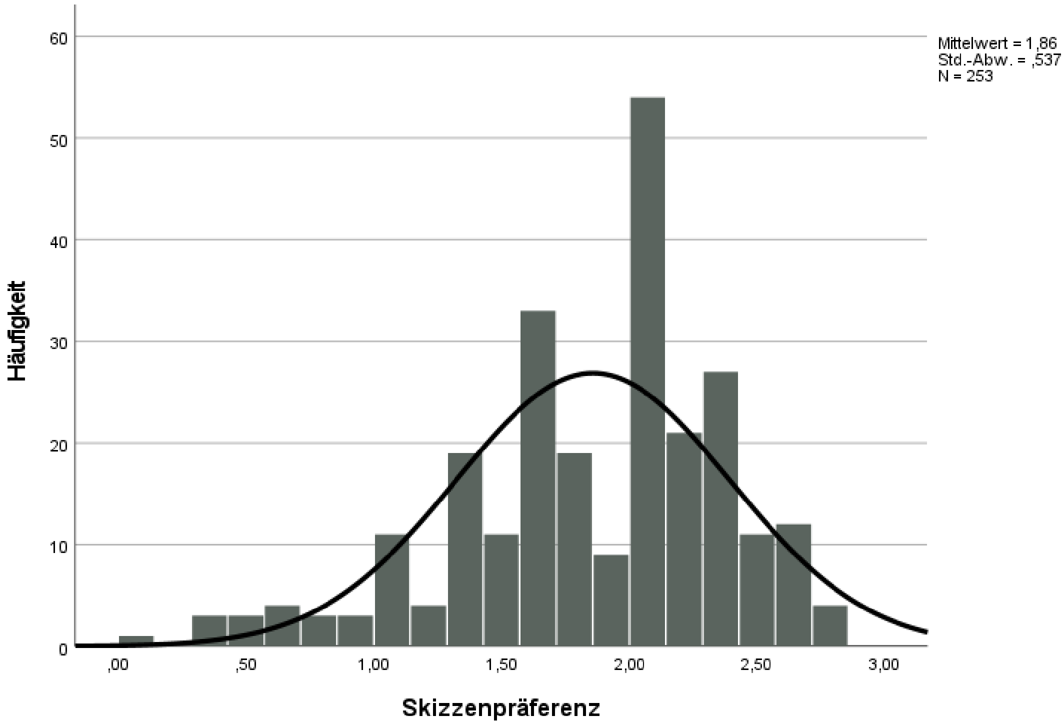


Abbildung 20: Verteilung der Skizzenpräferenz in der Gesamtstichprobe

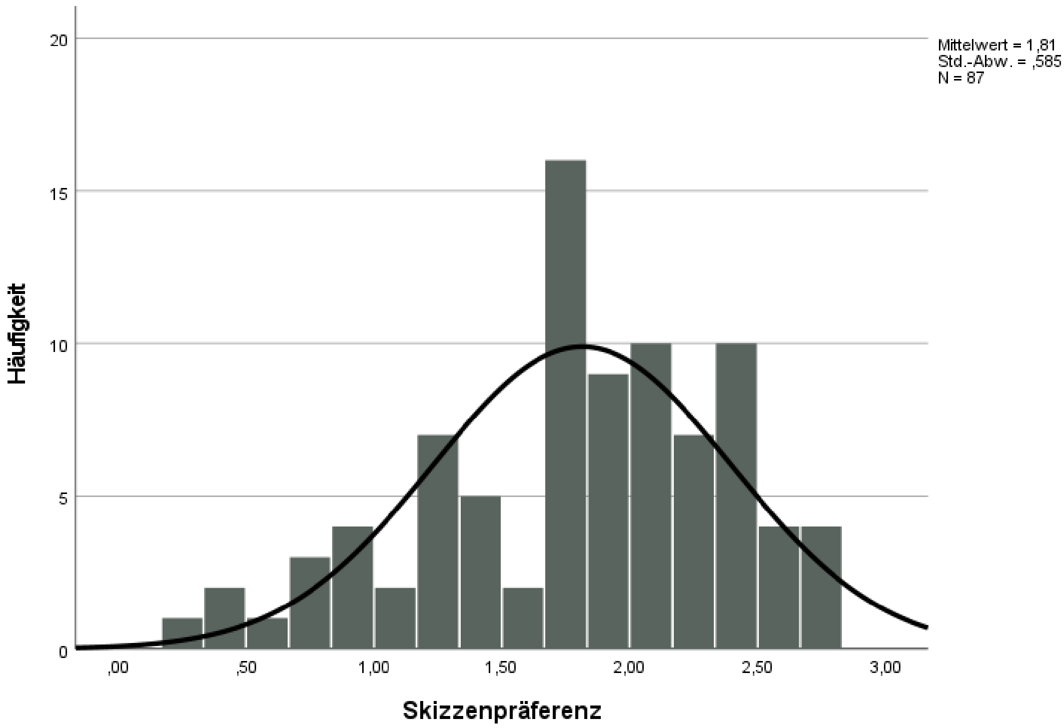


Abbildung 21: Verteilung der Skizzenpräferenz in der Experimentalgruppe (1) mit Skizzenverbot

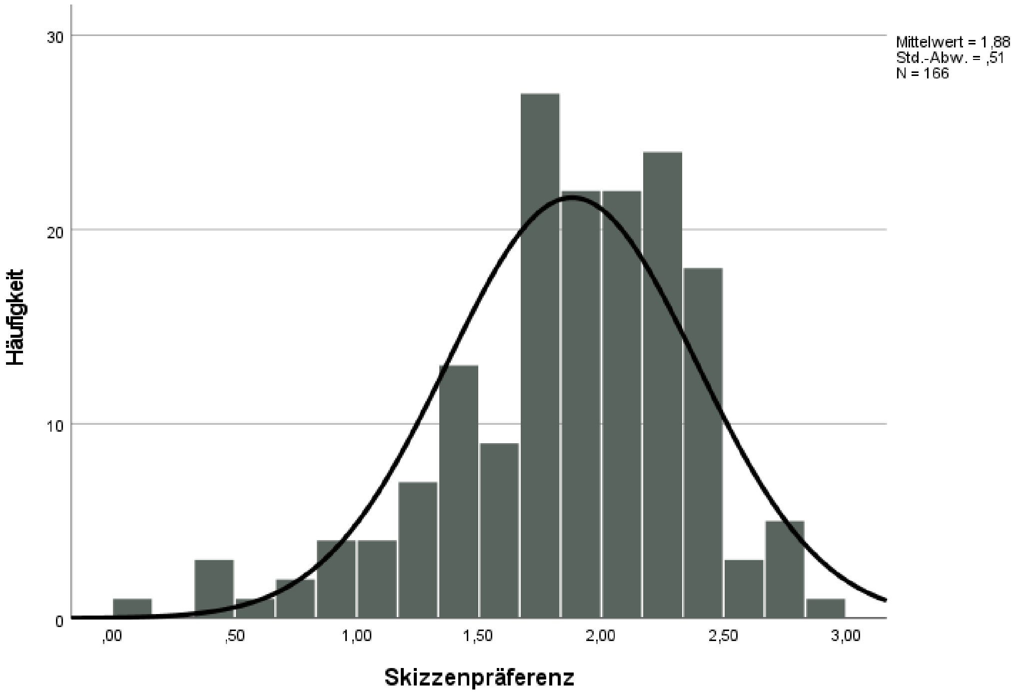


Abbildung 22: Verteilung der Skizzenpräferenz in der Experimentalgruppe (2) mit Skizzenaufforderung

Zusammenfassung

Die Analysen zeigten, dass zwischen den Hintergrundvariablen keine statistisch signifikanten Unterschiede hinsichtlich der Mittelwerte vorlagen. Bei Betrachtung der Verteilungsparameter ergaben sich bei der Schiefe ebenfalls keine Abweichungen zwischen den Gruppen. Einzig bei der Kurtosis zeigten sich bei der allgemeinen Mathematikleistung und bei der Skizzenpräferenz Unterschiede zwischen der Experimentalgruppe mit Skizzenverbot und der Gruppe mit Skizzenaufforderung. Während in der Gruppe mit Skizzenverbot keine Auffälligkeiten auftraten, war die Verteilung in der Gruppe mit Skizzenaufforderung hinsichtlich der allgemeinen Mathematikleistung flacher und hinsichtlich der Skizzenpräferenz spitzer als die Normalverteilung. Einige Abweichungen gab es außerdem hinsichtlich der prozentualen Häufigkeiten zwischen den Experimentalgruppen, die aber weder bei den genannten Variablen noch beim *Geschlecht* statistisch signifikant waren.

8.1.2 Zusammenhänge zwischen Hintergrundvariablen

Um weitere Erkenntnisse über die Merkmale der Probandengruppen zu erlangen, wurden bivariate Korrelationsanalysen zwischen den Hintergrundmerkmalen untereinander sowie der Modellierungsleistung durchgeführt (Tabelle 16).

Zwischen dem Jahrgang und dem Geschlecht lag keine statistisch relevante Korrelation vor. Ebenfalls statistisch nicht signifikant war die Korrelation zwischen dem Geschlecht und der allgemeinen Mathematikleistung – sowie dem Geschlecht und der geometriebezogenen Leistung. Dieses Ergebnis unterscheidet sich insofern von den Ergebnissen anderer Studien zu mathematikspezifischen Geschlechterunterschieden (z. B. Lewalter et al., 2022, S. 8; Reinhold et al., 2018), dass Mädchen häufig schlechter im Bereich Mathematik abschneiden als Jungen. Zwischen dem Geschlecht und der allgemeinen Modellierungsleistung lag dagegen eine statistisch signifikante Korrelation zugunsten der Jungen vor, $r = -.13$, $p = .043$. In diesem Ergebnis spiegelt sich der häufig nachgewiesene Leistungsvorteil von Jungen im Bereich der Mathematik wider – bei themenbezogener Betrachtung der Modellierungsleistung zeigte sich dieser Zusammenhang allerdings nur im Bereich *Satz des Pythagoras*, $r = -.19$, $p = .003$, und nicht beim Thema *Flächeninhalte*, $r = -.04$, $p = .513$. Einschränkend muss berücksichtigt werden, dass es sich um schwache Korrelationen handelte.

Zwischen dem Jahrgang und der allgemeinen Mathematikleistung, $r = .28$, $p < .001$, sowie der geometriebezogenen Leistung, $r = .23$, $p < .001$, und der allgemeinen Modellierungsleistung, $r = .22$, $p < .001$, lagen jeweils schwache, positive Korrelationen vor. Möglicherweise sind diese Korrelationen darauf zurückzuführen, dass in Jahrgang neun nur Schülerinnen und Schüler des Realschulniveaus an der Studie teilnahmen, während in Jahrgang zehn sowohl Lernende des Realschul- als auch des gymnasialen Niveaus beteiligt waren. Tatsächlich traten die beschriebenen Korrelationen nicht mehr auf, wenn die Analysen unter Ausschluss der Gymnasialschülerinnen und -schüler durchgeführt wurden. Die entsprechenden Korrelationen sind in Tabelle 16 mit Schrägstrich abgetrennt in Grau dargestellt. Der Jahrgang korrelierte außerdem schwach negativ mit der Skizzenpräferenz, $r = -.27$, $p < .001$. Dieser Zusammenhang wurde durch ausschließliche Betrachtung der Lernenden des Realschulniveaus noch verstärkt und hat dann eine moderate Ausprägung, $r = -.41$, $p < .001$. Demnach wiesen die Schülerinnen und Schüler mit zunehmend höherem Jahrgang eine geringere Skizzenpräferenz auf.

Die allgemeine Mathematikleistung – bestimmt anhand des Kursniveaus und der Mathematiknote auf dem letzten Zeugnis – korrelierte hoch mit der geometriebezogenen Leistung, $r = .63$, $p < .001$, mit der allgemeinen, $r = .65$, $p < .001$, sowie der jeweils themenbezogenen Modellierungsleistung, $r = .58$, $p < .001$ (Satz das Pythagoras) bzw. $r = .59$, $p < .001$ (*Flächeninhalte*). Diese Korrelationen waren insofern zu erwarten, dass die geometriebezogene Leistung und die Modellierungsleistung wichtige Teilbereiche der allgemeinen Mathematikleistung sind.

Es lag eine geringfügig negative Korrelation zwischen der allgemeinen Mathematikleistung und der Skizzenpräferenz vor, $r = -.13$, $p = .050$, die darauf hindeutet, dass die Lernenden umso weniger das Zeichnen von Skizzen präferieren, je höher ihre Leistung ist – wenn auch nur im geringen Ausmaß.

Die geometriebezogene Leistung korrelierte ebenfalls hoch mit der Modellierungsleistung, $r = .77$, $p < .001$, bzw. mit der themenspezifischen Modellierungsleistung im Bereich *Satz des Pythagoras*, $r = .71$, $p < .001$, und im Bereich *Flächeninhalte*, $r = .68$, $p < .001$. Dies entsprach den Erwartungen, da es sich um geometriebezogene Modellierungsaufgaben handelt, bei denen die entsprechenden mathematischen Kenntnisse von hoher Relevanz sind. Zwischen der geometriebezogenen Leistung und der Skizzenpräferenz bestand eine geringfügig negative Korrelation, $r = -.15$, $p = .017$. Wie bereits bei der allgemeinen Mathematikleistung deutet sich also an, dass die Lernenden mit steigender geometriebezogener Leistung eher weniger das Skizzenzeichnen präferieren. Diese Tendenz bestätigte sich erneut dadurch, dass die Skizzenpräferenz geringfügig negativ mit der allgemeinen Modellierungsleistung korrelierte, $r = -.21$, $p < .001$, ebenso wie mit der Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras*, $r = -.16$, $p = .014$, und zum Thema *Flächeninhalte*, $r = -.23$, $p < .001$.

Während also die allgemeine Mathematikleistung, die geometriebezogene Leistung und die Modellierungsleistung in einem engen, positiven Zusammenhang standen, wies die Präferenz für das Skizzenzeichnen eine gegenläufige Tendenz auf. Zwar war dieser negative Zusammenhang nur schwach ausgeprägt, aber es zeichnet sich die Tendenz ab, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler das Skizzenzeichnen eher präferieren als leistungsstärkere.

Der hohe Zusammenhang zwischen allgemeiner Mathematikleistung, geometriebezogener Leistung und Modellierungsleistung lässt sich dadurch erklären, dass sowohl geometrische Inhalte (unter den Leitideen „Messen“ und „Raum und Form“) als auch die Modellierungskompetenz wesentliche Komponenten der allgemeinen mathematischen Kompetenz gemäß deutscher Bildungsstandards sind (Kultusministerkonferenz, 2004). Zudem wurde in verschiedenen Studien nachgewiesen, dass ein substanzieller Zusammenhang zwischen innermathematischer Kompetenz und Modellierungskompetenz besteht (Leiss et al., 2010; Maaß, 2004). Das liegt nicht zuletzt daran, dass das innermathematische Arbeiten einen wesentlichen Teilschritt im Modellierungsprozess darstellt (vgl. Kapitel 4.4). Außerdem wurden die geometriebezogene Leistung und die Modellierungskompetenz in Bezug auf die gleichen mathematischen Themen erhoben (*Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte*), weshalb der Zusammenhang ebenfalls plausibel ist.[44]

Die ungleiche Verteilung der Leistungsniveaus, die sich in den Korrelationen zu den Jahrgangsstufen widerspiegelte, wurde in den folgenden Analysen berücksichtigt. Hinsichtlich des Geschlechts waren die Korrelationen sehr unterschiedlich und es zeichneten sich keine eindeutigen Tendenzen z. B. hinsichtlich der Leistung ab.

Tabelle 16: Mittelwerte, Standardabweichungen und bivariate Korrelationen (Pearsons r) zwischen den Hintergrundvariablen und der Modellierungsleistung

Variable	*M*	*(SD)*	Geschlecht (0 = m, 1 = w)	Jahrgang (9 und 10)	Allgemeine Mathematikleistung	Geometriebezogene Leistung	Skizzenpräferenz
Geschlecht (0 = m, 1 = w)	.50	(0.50)	–				
Jahrgang (9 und 10)	9.76	(0.43)	.04	–			
Allgemeine Mathematikleistung	3.86	(1.15)	.04	.28** /-.09	–		
Geometriebezogene Leistung	3.75	(2.26)	-.08	.23** /-.00	.63**	–	
Skizzenpräferenz	1.86	(0.54)	.27**	-.27** /-.41**	-.13*	-.15*	–
Modellierungsleistung (allgemein)	0.46	(0.27)	-.13*	.22** /.00	.65**	.77**	-.21**
Modellierungsleistung (*Satz des Pythagoras*)	0.44	(0.31)	-.19**	.11 /-.15	.58**	.71**	-.16*
Modellierungsleistung (*Flächeninhalte*)	0.48	(0.29)	-.04	.30** /.17	.59**	.68**	-.23**

** $p < .01$; * $p < .05$; zweiseitig

Anmerkungen: Da die Werte der allgemeinen Modellierungsleistung eine Zusammenfassung der Werte der Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* und zum Thema *Flächeninhalte* darstellt, ist eine Berechnung von Korrelationen hier überflüssig.
Die in Grau dargestellten Korrelationen wurden unter Ausschluss der Lernenden des gymnasialen Niveaus berechnet, da eine ungleiche Leistungsniveau-Verteilung in den Jahrgängen vorlag.

[44] Die Ergebnisse zur Analyse der Probandengruppe werden an dieser Stelle der Arbeit bereits knapp theoretisch eingebettet, um als Verständnisgrundlage für die darauffolgenden Hauptergebnisse der Studie genutzt werden zu können. Auf diese Ergebnisse wird außerdem in der Diskussion nicht mehr eingegangen, um sich dort auf die zentralen Ergebnisse der Studie fokussieren zu können.

8.2 Analyse der Modellierungsprozesse

Zunächst werden die Ergebnisse einer deskriptiven Analyse der Modellierungsschritte anhand der einzelnen Aufgaben vorgestellt, um die Qualität der Modellierungsprozesse in der vorliegenden Studie zu dokumentieren. Dazu werden Mittelwerte und Streuungsmaße der Lösungsraten sowie prozentuale Häufigkeitsverteilungen der Bearbeitungsqualitäten für die verschiedenen Modellierungsphasen betrachtet.[45]

8.2.1 Lösungsraten

Die mittleren Lösungsraten konnten Werte zwischen 0 und 1 annehmen, da es sich um Mittelwerte der einzelnen Aufgabenscores handelt, bei denen eine 0 für eine falsche Lösung und eine 1 für eine korrekte Lösung vergeben wurden. Fehlende Bearbeitungen aufgrund abgebrochener Testheftbearbeitungen wurden nicht berücksichtigt (vgl. Kapitel 7.5.1). Die Anzahl der gewerteten Bearbeitungen variierte daher. Die Lösungsraten der Modellierungsaufgaben lagen zwischen $M = 0.16$ und 0.84 und die Standardabweichungen zwischen $SD = 0.37$ und 0.5. Die Standardabweichung lag bei allen Aufgaben auf einem ähnlichen Niveau. Verhältnismäßig gering war die Varianz bei den Aufgaben „Dachfenster“ und „Feuerwehr“. Dies waren gleichzeitig die beiden Aufgaben, bei denen die mittlere Lösungsrate besonders hoch (Aufgabe „Dachfenster“) bzw. besonders niedrig war (Aufgabe „Feuerwehr“). Aufgrund der hohen Standardabweichungen werden in der Abbildung zu den Lösungsraten (Abbildung 23) stattdessen die Varianzen dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass der intendierte Wechsel zwischen leichten und schwierigen Aufgaben erreicht wurde (vgl. Kapitel 6.1.1).

Um die Aufgaben im Hinblick auf die Lösungsrate systematisch analysieren sowie die mathematischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* separat betrachten zu können, wurden die Modellierungsaufgaben entsprechend sortiert und eine weitere Abbildung mit neuer Reihenfolge erstellt (Abbildung 24). Die Abbildung zeigt, dass in beiden Themenbereichen verschiedene Schwierigkeitsniveaus abgedeckt wurden.

[45] Die Tabellen mit den detaillierten Häufigkeiten der Bearbeitungsqualitäten in den einzelnen Modellierungsphasen finden sich in Anhang N.

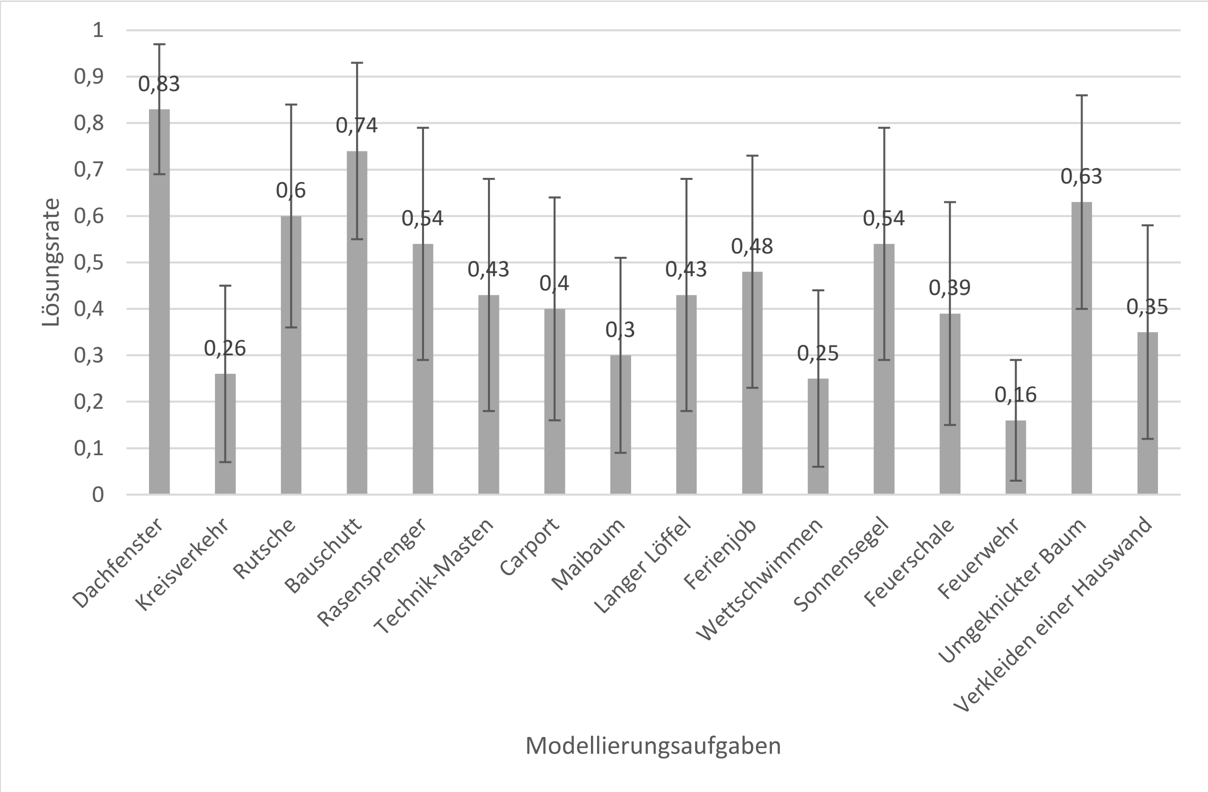


Abbildung 23: Lösungsraten (Mittelwerte, Varianz) der Modellierungsaufgaben (Reihenfolge gemäß Testheft)

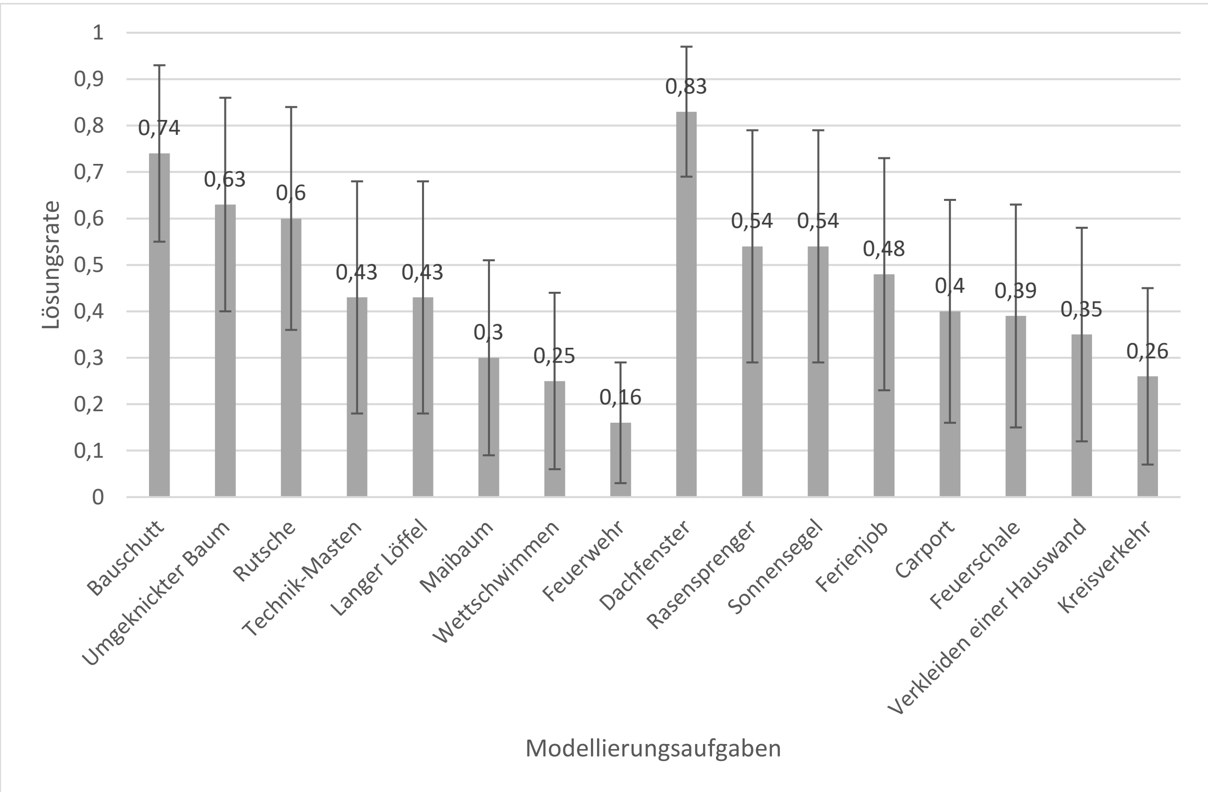


Abbildung 24: Lösungsraten (Mittelwerte, Varianz) der Modellierungsaufgaben (sortiert nach mathematischem Thema und absteigender Lösungsrate; erste 8 Aufgaben zum *Satz des Pythagoras*, letzte 8 Aufgaben zu *Flächeninhalten*)

Um mögliche Ursachen der empirischen Aufgabenschwierigkeit analysieren zu können, wurden die Kriterien betrachtet, die bei der Aufgabenerstellung variiert wurden (Anhang A). Beim Thema *Satz des Pythagoras* zeichneten sich die drei Aufgaben, deren Lösungsrate am höchsten war („Bauschutt", „Umgeknickter Baum" und „Rutsche") vor allem durch eine geringe *Anzahl der relevanten Zahlangaben,* leichte *Rechenoperationen,* wenige *Lösungsschritte* sowie ein simples *mathematisches Modell* aus (rechtwinkliges Dreieck aus genau drei Objekten, keine zusätzlichen Rechenschritte nötig). Die Aufgaben „Maibaum", „Wettschwimmen" und „Feuerwehr", die die niedrigsten Lösungsraten aufwiesen, unterschieden sich von den anderen Aufgaben vor allem durch anspruchsvollere *Rechenoperationen* und ein komplexeres *mathematisches Modell*, das die Umstellung der pythagoräischen Formel sowie *zusätzliche Lösungsschritte* erforderte.

Die Analyse lässt darauf schließen, dass in erster Linie die Komplexität des *mathematischen Modells* (d. h. die Prägnanz des rechtwinkligen Dreiecks bzw. die Mehrstufigkeit des Lösungsprozesses) sowie das Anspruchsniveau der notwendigen *Rechenoperationen* beim Thema *Satz des Pythagoras* für die empirische Schwierigkeit der Aufgaben ausschlaggebend zu sein scheinen.

Beim Thema *Flächeninhalte* gab es eine Aufgabe, deren Lösungsrate deutlich höher lag als bei den anderen Aufgaben: die Aufgabe „Dachfenster". Hinsichtlich der Aufgabenkriterien zeichnete die Aufgabe „Dachfenster" sich durch die Verwendung *alltagsnaher Begrifflichkeiten*, sowie ein besonders simples *mathematisches Modell* aus, das keine *zusätzlichen Rechenoperationen* erforderte.

Die Lösungsraten der Aufgaben „Rasensprenger", „Sonnensegel" und „Ferienjob" lagen im mittleren bis hohen Bereich, allerdings lassen sich diese Aufgaben weniger deutlich durch bestimmte Kriterien von den übrigen Aufgaben abgrenzen. Bei den Aufgaben lagen sehr verschiedene Ausprägungen hinsichtlich der Kriterien vor. Ähnlich war es mit den übrigen Aufgaben „Carport", „Feuerschale", „Verkleiden einer Hauswand" und „Kreisverkehr". Auch hier ließ sich weniger eine klare Abstufung hinsichtlich der Kriterien feststellen. Am ehesten war eine Abstufung des Schwierigkeitsniveaus bei dem Kriterium des *mathematischen Modells* und den damit verbundenen mathematischen Formeln und *zusätzlichen Rechenschritten* festzustellen.

Bei beiden mathematischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* scheinen demnach die Komplexität des *mathematischen Modells*, die Anzahl der notwendigen *Lösungsschritte* sowie die Vielfalt der *Rechenoperationen* einen hohen Stellenwert in Bezug auf die Lösungsrate und damit für die empirische Aufgabenschwierigkeit einzunehmen.

8.2.2 Bewältigung der Modellierungsphasen

Um die Bewältigung der einzelnen Modellierungsschritte, d. h. Bilden des Realmodells, Bilden des allgemeinen bzw. spezifischen mathematischen Modells und Bestimmen einer mathematischen Lösung bei den einzelnen Aufgaben nachvollziehen zu können, werden im folgenden

Kapitel die Häufigkeitsverteilungen hinsichtlich der Korrektheit der einzelnen Modellierungsschritte betrachtet. Im Anhang N finden sich ergänzend Tabellen, aus denen zusätzlich zu den prozentualen auch die absoluten Häufigkeiten sowie die fehlenden Werte entnommen werden können. Die in den folgenden Abschnitten verwendeten Säulendiagramme enthalten nur die Prozentangaben und ermöglichen somit einen anschaulichen Vergleich zwischen den Aufgaben sowie zwischen den verschiedenen Modellierungsschritten. Bei prozentualen Häufigkeiten unter 3 % werden zugunsten der Übersichtlichkeit keine Zahlenwerte im Diagramm angezeigt.

Für die Analyse der Bewältigung der Modellierungsphasen wurden nicht die Scores verwendet, sondern die ursprüngliche Kodierung der Teilprozesse. Auf diese Weise werden Informationen zu den genauen Bearbeitungsprozessen gewonnen, um diese in den weiteren Ergebniskapiteln und der Diskussion nutzen zu können. Wie bei der Lösungsrate wurden die Aufgaben auch bei dieser Analyse zum einen nach den Themenbereichen separiert und zum anderen nach dem höchsten Anteil an korrekten Durchführungen des jeweiligen Modellierungsschrittes sortiert, um Regelmäßigkeiten deutlicher veranschaulichen zu können.

8.2.2.1 Bilden des Realmodells

Das Bilden des Realmodells wurde anhand der Auswahl der Basisgrößen aus der jeweiligen Aufgabenstellung operationalisiert. Im Mittel ist es 75 % der Probandinnen und Probanden gelungen, ein korrektes Realmodell zu bilden (Tabelle 56), bei 9 % aller erreichten Aufgaben wurde nur ein Teil der Basisgrößen berücksichtigt und bei 12 % fehlte die Bearbeitung und damit auch das Realmodell. Falsche Realmodelle, bei denen die Basisgrößen nicht berücksichtigt wurden, kamen – ebenso wie (bei diesem Schritt) abgebrochene Bearbeitungen und unsinnige Bearbeitungen – kaum vor (3 % oder weniger).

Satz des Pythagoras

Tabelle 56 (Anhang N) sowie Abbildung 25 zeigen, dass beim Thema *Satz des Pythagoras* (84 – 90 %)[46] besonders häufig bei den Aufgaben „Bauschutt“, „Rutsche“, „Technik-Masten“ und „umgeknickter Baum“ ein korrektes Realmodell gebildet wurde. Am geringsten war der Anteil an Bearbeitungen mit korrektem Realmodell bei den Aufgaben „Wettschwimmen“ (55 %) und „Feuerwehr“ (38%). Anhand Abbildung 25 lässt sich unmittelbar erkennen, dass diese Anteile zudem geringer sind als bei allen Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte*. Demnach gab es beim Thema *Satz des Pythagoras* zum Teil Aufgaben, bei denen schon das Bilden des Realmodells große Schwierigkeiten mit sich brachte, sodass gut die Hälfte bzw. weniger als die Hälfte der Bearbeitungen ein korrektes Realmodell enthielten.

Bei den Aufgaben „Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“ wurde außerdem verhältnismäßig häufig nur ein Teil des Basisgrößen korrekt ausgewählt (21 – 37 %). Bei den

[46] Die Prozentangaben in Klammern beziehen sich jeweils auf die Anteile an Bearbeitungen, die auch in Säulendiagrammen dargestellt sind.

übrigen Aufgaben trat dieser Fall eher selten auf (2 – 6 %). Fehlende Bearbeitungen gab es häufig bei den Aufgaben „Langer Löffel“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“ (16 – 20%). Ansonsten betrug der Anteil an fehlenden Bearbeitungen zwischen 4 und 10 %.

Flächeninhalte

Beim Thema *Flächeninhalte* gab es drei Aufgaben, bei denen das Realmodell besonders häufig korrekt gebildet wurde: „Dachfenster“, „Kreisverkehr“ und „Carport“ (83 – 97 %). Verhältnismäßig gering (aber höher als die niedrigsten Werte beim Thema *Satz des Pythagoras*) waren die Anteile an korrekten Realmodellen bei den Aufgaben „Ferienjob“, „Sonnensegel“ und „Verkleiden einer Hauswand“ (61 – 65 %).

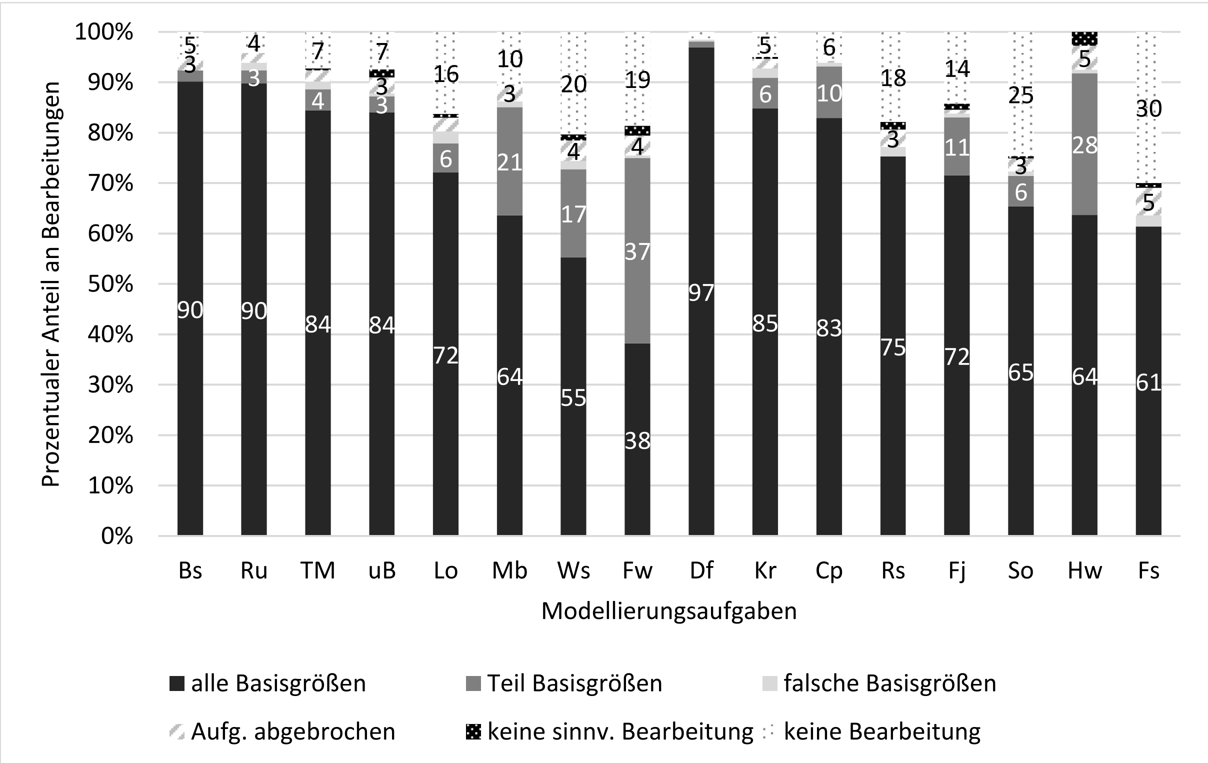


Abbildung 25: Auswahl der Basisgrößen zur Bildung des Realmodells (Df – Hw sind Abkürzungen der Aufgabennamen)

Der Fall, dass nur ein Teil der Basisgrößen korrekt ausgewählt wurde, trat bei den Aufgaben „Kreisverkehr“, „Carport“, „Ferienjob“, „Sonnensegel“ (6 – 11 %) und zu einem besonders großen Anteil bei der Aufgabe „Hauswand“ (28 %) auf. Fehlende Bearbeitungen gab es besonders oft bei den Aufgaben „Sonnensegel“ und „Feuerschale“ (25 bzw. 30 %). Auch bei den Aufgaben „Rasensprenger“ und „Ferienjob“ waren die Anteile an fehlenden Bearbeitungen relativ hoch (18 bzw. 14 %), während bei den übrigen Aufgaben nur wenig fehlende Bearbeitungen vorlagen (0 – 6 %).

Insgesamt zeigte die Analyse zur Bildung des Realmodells, dass dieser Modellierungsschritt bei drei Viertel (und damit den meisten) der Aufgaben zum Großteil korrekt bewältigt wurde.

Nicht erfolgreiche Bewältigungen sind hauptsächlich auf fehlende Bearbeitungen sowie die Lösungsprozesse zurückzuführen, bei denen nur ein Teil der Basisgrößen korrekt ausgewählt wurde. Bearbeitungen mit der Auswahl falscher Basisgrößen, unsinnige Bearbeitungen sowie Lösungsprozesse, die beim Aufstellen des Realmodells abgebrochen wurden, traten bei beiden Themenbereichen nur selten auf (max. 2 %).

8.2.2.2 Bilden des allgemeinen mathematischen Modells

Beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells wurde betrachtet, ob die allgemeine Formel des *Satzes des Pythagoras* ($a^2 + b^2 = c^2$ oder eine umgestellte Variante) bzw. die Formel zur Flächeninhaltsberechnung der jeweiligen geometrischen Figur (z. B. Formel für Flächeninhalt vom Rechteck ($A = a \cdot b$) notiert wurde.

Insgesamt wurde bei 64 % der Bearbeitungen das korrekte allgemeine mathematische Modell gebildet (Tabelle 57, Anhang N). Bearbeitungen, bei denen schon ein häufig falsches mathematisches Modell erkennbar war, traten in diesem Schritt fast gar nicht auf. In 13 % der Fälle wurde ein falsches allgemeines mathematisches Modell gebildet und ähnlich häufig (11 %) wurde die Bearbeitung spätestens bei diesem Modellierungsschritt abgebrochen. Die Anteile an fehlenden sowie unsinnigen Bearbeitungen bleiben entsprechend der Kodierung bei jedem Modellierungsschritt gleich, da hier jeweils die Bearbeitungen im Ganzen kodiert wurden.

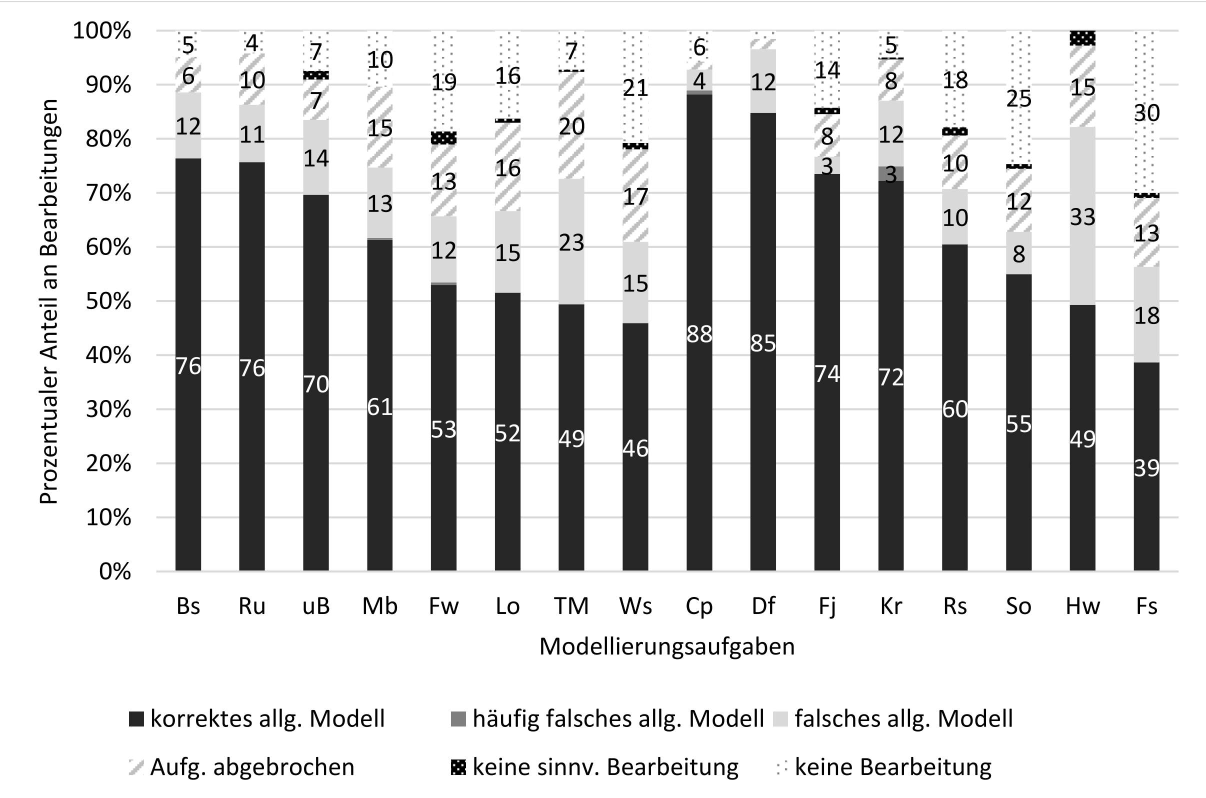


Abbildung 26: Bildung des allgemeinen mathematischen Modells (Df – Hw sind Abkürzungen der Aufgabennamen)

Bei der Betrachtung der prozentualen Anteile fällt auf, dass unabhängig vom Themenbereich bei vielen Aufgaben ein Rückgang an korrekten Durchführungen gegenüber dem vorherigen

Modellierungsschritt zu verzeichnen ist (Abbildung 26 im Vergleich zu Abbildung 25). Dieser Rückgang war zu erwarten, da der Mathematisierungsprozess in großen Teilen auf dem Realmodell aufbaut. Nichtsdestotrotz gibt es aufgrund der Operationalisierung in der vorliegenden Studie Fälle, in denen das Bilden des allgemeinen mathematischen Modells (operationalisiert durch die Auswahl der allgemeinen mathematischen Formel) häufiger korrekt gelungen ist als die Bildung des Realmodells (operationalisiert durch die Auswahl der Basisgrößen): die Aufgaben „Carport", „Ferienjob" und „Feuerwehr". Demnach gelang den Teilnehmenden bei diesen Aufgaben häufiger zu erkennen, welches allgemeine mathematische Modell zur Lösung der Problemsituation benötigt wird, als zu erkennen, welche Basisgrößen auszuwählen sind.

Satz des Pythagoras

Beim Thema *Satz des Pythagoras* wurde vor allem bei den Aufgaben „Bauschutt", „Rutsche" und „Umgeknickter Baum" häufig das korrekte allgemeine mathematische Modell gebildet (70 – 76 %). Auch bei der Aufgabe „Maibaum" gelang die Bildung des allgemeinen mathematischen Modells häufig (60%). Dagegen gelang die korrekte Auswahl der allgemeinen mathematischen Formel bei den Aufgaben „Feuerwehr", „Langer Löffel", „Technik-Masten" und „Wettschwimmen" nur in etwa 50 % der Fälle.

Besonders häufig wurde ein *falsches* mathematisches Modell bei der Aufgabe „Technik-Masten" ausgewählt (23 %, bei den übrigen Aufgaben 11 - 15 %). Eine mögliche Ursache liegt darin, dass es sich bei der Aufgabe „Technik-Masten" um die einzige *Satz-des-Pythagoras*-Aufgabe handelt, bei der das rechtwinklige Dreieck gleichzeitig ein Teil einer anderen geometrischen Figur ist (Parallelogramm). Abgebrochene Lösungsprozesse traten häufig bei den Aufgaben „Maibaum", „Feuerwehr", „Langer Löffel", „Technik-Masten" und „Wettschwimmen" auf (13 – 20 %, sonst 6 – 10 %).

Flächeninhalte

Beim Thema *Flächeninhalte* gab es zwei Aufgaben, „Carport" und „Dachfenster", bei denen das allgemeine mathematische Modell besonders häufig korrekt gebildet wurde (88 bzw. 85 %). Am seltensten – und jeweils in weniger als der Hälfte der Fälle – wurde die allgemeine mathematische Formel bei den Aufgaben „Hauswand" und „Feuerschale" korrekt ausgewählt (49 bzw. 39 %). Diese beiden Aufgaben waren die einzigen zum Thema *Flächeninhalte*, bei denen verschiedene geometrische Formen innerhalb einer Aufgabe vorkamen.

Auch der Anteil an Bearbeitungen mit der Auswahl eines *falschen* mathematischen Modells variierte bei den Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* stark: besonders häufig trat der Fall bei der Aufgabe „Hauswand" auf (33%), während dies bei den Aufgaben „Carport" und „Ferienjob" fast gar nicht vorkam (unter 5 %). Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass diese beiden Aufgaben die einzigen waren, in denen ausschließlich das Rechteck als geometrische Figur auftritt. Bei allen anderen Aufgaben kamen Kreis und Dreieck als geometrische Figuren vor, deren Flächeninhaltsformeln komplexer sind, und die laut Lehrplan (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012) erst in den höheren Jahrgängen behandelt werden.

Abgebrochene Lösungsprozesse gab es bei den Aufgaben „Carport“ und „Dachfenster“ kaum (2 %), bei den übrigen Aufgaben zu je 8 – 15 %. Bei einem Vergleich mit dem vorherigen Modellierungsschritt fiel auf, dass es beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells (bei den Aufgaben zum Thema *Satz des Pythagoras* noch mehr als bei denen zum Thema *Flächeninhalte*) deutlich mehr abgebrochene Lösungsprozesse gab als beim Bilden des Realmodells. Demnach wurde der Modellierungsprozess häufiger bei der Auswahl des allgemeinen mathematischen Modells abgebrochen als bei der Auswahl der Basisgrößen. Häufig falsche allgemeine mathematische Modelle traten nur bei den Aufgaben „Carport“ und „Kreisverkehr“ zu einem sehr geringen Anteil (1 bzw. 3 %) auf.

Insgesamt war der Anteil an korrekten Durchführungen beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells bei den meisten Aufgaben um ca. 5 – 10 Prozentpunkte geringer als beim vorherigen Modellierungsschritt, lag aber in den meisten Fällen noch bei über der Hälfte der Bearbeitungen. Die nicht erfolgreiche Bewältigung des Bildens des allgemeinen mathematischen Modells ist in ähnlichen Teilen auf fehlende Bearbeitungen, auf falsche mathematische Modelle sowie auf abgebrochene Lösungsprozesse zurückzuführen.

8.2.2.3 Bilden des spezifischen mathematischen Modells

Das Bilden des spezifischen mathematischen Modells gelang insgesamt bei 46 % und damit bei knapp der Hälfte der Bearbeitungen (Tabelle 58). Der Vergleich mit der erfolgreichen Bewältigung des vorherigen Modellierungsschritts – dem Bilden des allgemeinen mathematischen Modells – zeigte eine deutliche Abnahme um 18 Prozentpunkte. Bei 2 % der Bearbeitungen wurde zwar das korrekte mathematische Modell ausgewählt, aber nur ein Teil der relevanten Zahlenwerte wurde korrekt eingesetzt. Ein häufig falsches mathematisches Modell[47] trat insgesamt bei 5 % der Bearbeitungen auf. 25 % der Bearbeitungen zeichneten sich durch ein falsches mathematisches Modell aus und in 11 % der Fälle (und damit kaum mehr als beim vorherigen Modellierungsschritt) wurde der Bearbeitungsprozess spätestens in diesem Modellierungsschritt abgebrochen.

Satz des Pythagoras

Das Bilden des spezifischen mathematischen Modells gelang im Themenbereich *Satz des Pythagoras* mit 59 – 75 % besonders häufig bei den Aufgaben „Bauschutt“, „Umgeknickter Baum“ und „Rutsche“ (Abbildung 27). Auffällig gering war der Anteil an Bearbeitungen mit korrektem spezifischem mathematischem Modell bei der Aufgabe „Feuerwehr“ (16 %) und ebenfalls sehr gering bei den Aufgaben „Maibaum“ und „Wettschwimmen“ (30 bzw. 26 %).

Der Fall, dass zwar das korrekte spezifische Modell gebildet, aber nur ein Teil der Zahlenwerte richtig einbezogen wurde, trat bei der Aufgabe „Wettschwimmen“ deutlich häufiger auf als

[47] In den folgenden Absätzen wird in Bezug auf die einzelnen Aufgaben erläutert, was unter dem „häufig falschen mathematischen Modell“ verstanden wird.

bei den übrigen Aufgaben (11 %, sonst max. 2 %). Dies betraf vor allem Fälle, in denen zwar die Länge der Schwimmbahn, nicht aber die Breite berücksichtigt wurde.

Bei den Aufgaben „Maibaum“ und „Feuerwehr“ wurde jeweils ein bestimmtes falsches mathematisches Modell gesondert betrachtet, das besonders häufig gebildet wurde. Bei der Aufgabe „Maibaum“ handelt es sich um ein Modell, bei dem die Haltehöhe nicht berücksichtigt wurde und bei der Aufgabe „Feuerwehr“ um ein Modell, das die Fahrzeughöhe vernachlässigte. Der Anteil dieser besonderen Fälle betrug bei der Aufgabe „Maibaum“ 13 % und bei der Aufgabe „Feuerwehr“ 25 %. Da aber auch diese Modelle als *nicht korrekt* eingestuft wurden, werden diese bei der folgenden Analyse falscher Durchführungen miteingerechnet.

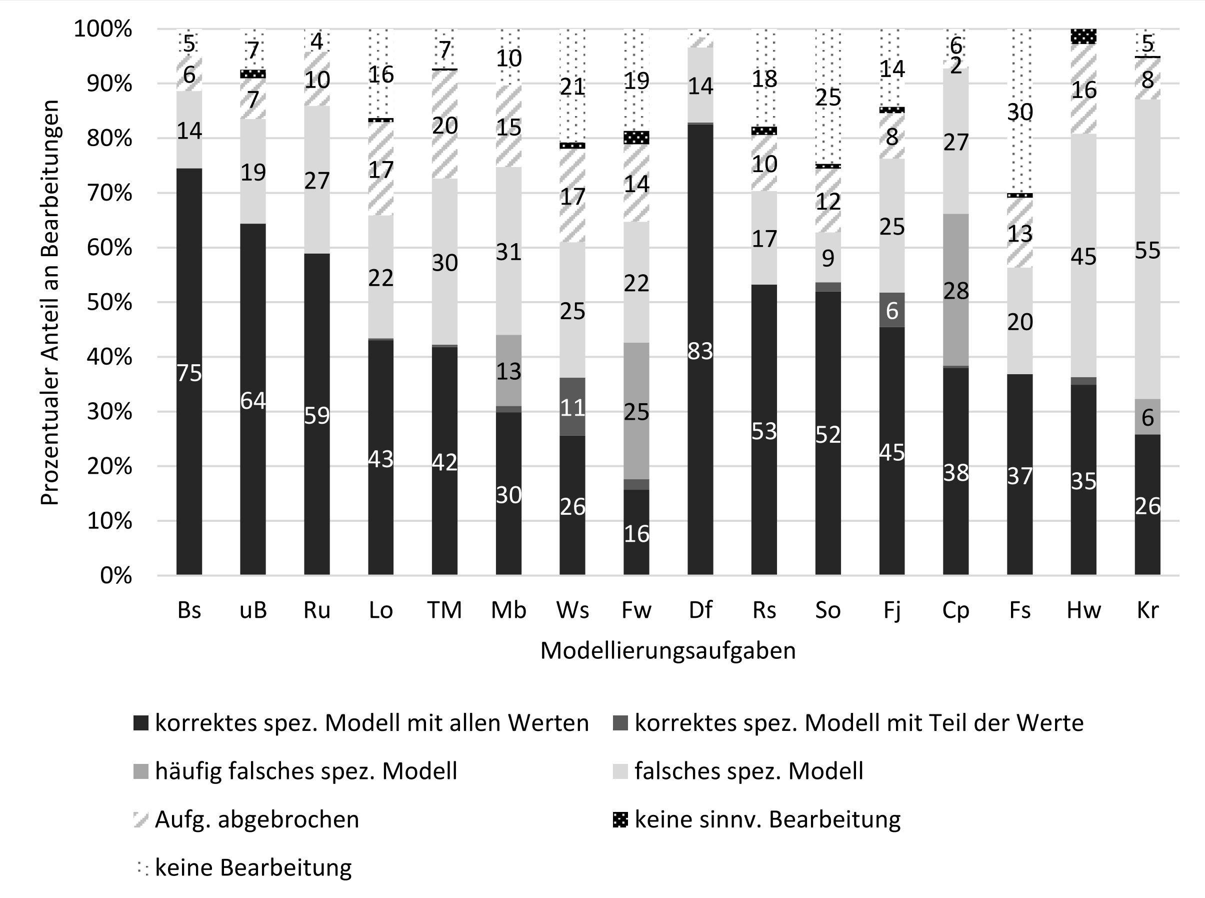


Abbildung 27: Bildung des spezifischen mathematischen Modells (Df – Hw sind Abkürzungen der Aufgabennamen)

Genau diese Aufgaben „Maibaum“ und „Feuerwehr“ wiesen auch die höchsten Anteile an falschen spezifischen mathematischen Modellen auf (44 bzw. 47 %). Am seltensten traten falsche spezifische Modelle bei der Aufgabe „Bauschutt“ auf (14 %).

Flächeninhalte

Beim Thema *Flächeninhalte* hatte die Aufgabe Dachfenster einen auffallend hohen Anteil (83 %) an Bearbeitungen mit korrektem spezifischem mathematischem Modell. Bei den Aufgaben „Rasensprenger“, „Sonnensegel“ und „Ferienjob“ lag der Anteil bei um die 50 % und bei den Aufgaben „Carport“, „Feuerschale“ und „Hauswand“ nur bei 35 – 38 %. Am geringsten war der Anteil an korrekten Durchführungen des Modellierungsschrittes bei der Aufgabe „Kreisverkehr“ (26 %). Bei der Aufgabe „Ferienjob“ kam es verhältnismäßig oft vor, dass zwar das korrekte spezifische Modell gebildet, aber nur ein Teil der Zahlenwerte korrekt integriert wurde (6 %, sonst unter 2 %). Vermutlich ist das Ergebnis darin begründet, dass bei der Aufgabe „Ferienjob“ vergleichsweise viele Zahlenwerte zu verarbeiten waren.

Besonders viele falsche spezifische mathematische Modelle traten bei den Aufgaben „Carport“, „Hauswand“ und „Kreisverkehr“ auf. Auch beim Themenbereich *Flächeninhalte* gab es Aufgaben, bei denen häufig falsche mathematische Modelle gesondert betrachtet wurden: Bei der Aufgabe „Kreisverkehr“ handelte es sich um Bearbeitungen, bei denen der Kreisring anstelle des gesamten Flächeninhalts berechnet wurde und bei der Aufgabe „Carport“ um Bearbeitungen, bei denen der Rand um die Carport-Fläche herum nur auf einer Seite berücksichtigt wurde. Bei der Aufgabe „Carport“ machte dieses häufig falsche mathematische Modell einen Anteil von 28 Prozentpunkten von insgesamt 55 % der Bearbeitungen mit falschem mathematischem Modell aus. Bei der Aufgabe Kreisverkehr betrug der Anteil nur 6 Prozentpunkte von insgesamt 61 %. Am seltensten gab es Bearbeitungen mit falschem spezifischem mathematischem Modell bei den Aufgaben „Dachfenster“, „Rasensprenger“ und „Sonnensegel“ (9 – 17 %).

Bei der Betrachtung der Anteile an abgebrochenen Lösungsprozessen ist vor allem der Vergleich mit dem vorherigen Schritt interessant, da auf diese Weise erkennbar ist, wie viele Probandinnen und Probanden bei diesem konkreten Schritt den Modellierungsprozess abgebrochen haben. Bei beiden geometrischen Themenbereichen war der Anstieg an abgebrochenen Bearbeitungen minimal (0 – 1 Prozentpunkte). Der Modellierungsprozess wurde unabhängig vom jeweiligen Thema demnach deutlich häufiger beim Übergang vom Realmodell zum allgemeinen mathematischen Modell als beim Übergang vom allgemeinen zum spezifischen mathematischen Modell abgebrochen. Wenn also schon ein allgemeines mathematisches Modell gefunden wurde, wurde dieses in der Regel auch (unabhängig davon, ob richtig oder falsch) spezifiziert.

Insgesamt ergab die Analyse, dass der Anteil an korrekten Ausführungen je Aufgabe bei diesem Modellierungsschritt erneut deutlich geringer war als beim vorherigen Schritt. Demnach stellte auch der Übergang vom allgemeinen zum spezifischen mathematischen Modell, das die konkreten Situationsmerkmale und Zahlenwerte berücksichtigt, eine Hürde für die Lernenden dar. Die nicht erfolgreichen Durchführungen des Modellierungsschrittes begründeten sich zum Großteil in falschen spezifischen mathematischen Modellen sowie zu jeweils geringeren Anteilen in abgebrochenen und fehlenden Bearbeitungen.

8.2.2.4 Bestimmen des mathematischen Resultats

Bei insgesamt 41 % der Bearbeitungen wurde das korrekte mathematische Resultat bestimmt (Tabelle 59, Anhang N), wobei in weiteren 4 % fast korrekte Lösungen errechnet wurden, bei denen nur geringfügige Flüchtigkeitsfehler auftraten.[48] Eine korrekte Lösung zu einem der häufig falschen mathematischen Modelle wurde ebenfalls in 4 % der Bearbeitungen bestimmt (wobei die Lösungen letztlich falsch sind und somit im Hinblick auf den Score zur nachfolgenden Kategorie zu rechnen sind). In 27 % der Bearbeitungen war das mathematische Resultat falsch und – wie bei den zwei vorherigen Modellierungsphasen – wurde der Modellierungsprozess bei 11 % der Bearbeitungen spätestens in diesem Schritt abgebrochen.

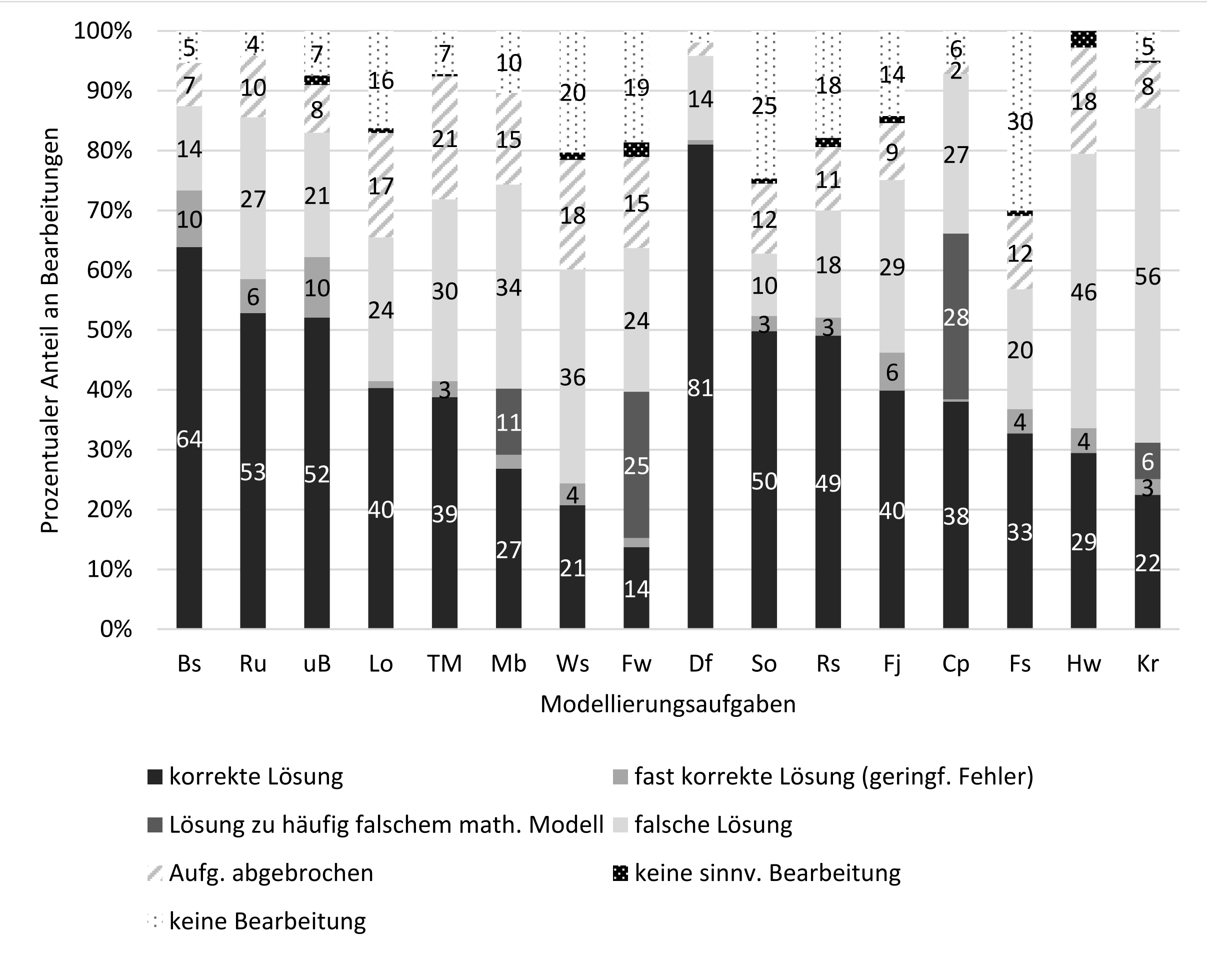


Abbildung 28: Bestimmen des mathematischen Resultats (Df – Hw sind Abkürzungen der Aufgabennamen)

Die Anteile an korrekten Durchführungen waren in der Phase des Bestimmens des mathematischen Resultats unabhängig vom geometrischen Themenbereich bei allen Aufgaben etwas geringer als beim vorherigen Modellierungsschritt (Abbildung 28 im Vergleich zu Abbildung 27). Dabei traten keine auffälligen Besonderheiten bezüglich einzelner Aufgaben auf, die sich nicht schon beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells abgezeichnet hätten. In

[48] Diese fast korrekten Lösungen wurden gesondert berücksichtigt, da beim Scoring des gesamten Modellierungsprozesses bis zu zwei Flüchtigkeitsfehler geduldet wurden (vgl. Kapitel 6.2.2.4).

ungefähr dem gleichen Maße, in dem die korrekten Durchführungen vom vorherigen Schritt zu diesem abnahmen, traten Bearbeitungen mit *fast* korrekten Lösungen auf. Die Differenz an korrekten Berechnungen des mathematischen Ergebnisses gegenüber der Bildung des spezifischen mathematischen Modells ist demnach vor allem auf mathematische Arbeitsprozesse zurückzuführen, bei denen geringfügige Flüchtigkeitsfehler gemacht wurden. Vor allem bei den Aufgaben „Bauschutt“, „Rutsche“, „Umgeknickter Baum“ (aus dem Themenbereich *Satz des Pythagoras*) und „Ferienjob“ (aus dem Themenbereich *Flächeninhalte*) traten vermehrt Fälle auf, bei denen geringfügige Fehler gemacht wurden (6 – 10 %, sonst 4 % oder weniger).

Meist handelte es sich um Flüchtigkeitsfehler, weshalb keine systematischen Besonderheiten identifizierbar waren. Bei drei der vier Aufgaben kamen Dezimalzahlen vor, die möglicherweise schneller zu Rechenfehlern geführt haben. Allerdings gab es einige weitere Aufgaben, bei denen ebenfalls Dezimalzahlen vorkamen.

Insgesamt scheinen die Lernenden nur selten gravierende Fehler beim Bestimmen des mathematischen Resultats zu machen, sondern sind – abgesehen von geringfügigen Rechenfehlern – in der Lage, das korrekte mathematische Ergebnis zu bestimmen, wenn zuvor das korrekte spezifische Modell aufgestellt wurde. Ein Blick auf die übrigen Kategorien bestätigt diese Beobachtung: Der Anteil an falschen mathematischen Lösungen entsprach bei allen Aufgaben in etwa dem Anteil an Bearbeitungen mit falschem spezifischem Modell. Abgebrochene Bearbeitungen traten – wenn überhaupt – nur um 1 – 2 Prozentpunkte häufiger auf als bei der vorigen Modellierungsphase. Wenn also die mathematische Formel mit Teilschritten korrekt aufgestellt und die Zahlenwerte korrekt eingesetzt wurden, wurde meist auch eine korrekte mathematische Lösung für die Aufgaben bestimmt.

8.3 Analyse der Skizzen

Während in den vorherigen Abschnitten eine grundsätzliche Analyse der Hintergrundvariablen und der Modellierungsprozesse stattfand, dienen die folgenden Kapitel zur Überprüfung der für die Arbeit aufgestellten Hypothesen (vgl. Kapitel 5). In den Unterkapiteln 8.3.1 bis 8.3.3 geht es um die Hypothesen zum Skizzenzeichenverhalten der Teilnehmenden, d. h. um die Skizzenhäufigkeit, die Skizzenqualität und den Abstraktionsgrad der Skizzen, sowie den Vergleich dieser Kriterien zwischen den geometrischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte*. Da die Skizzen, wie durch das Untersuchungsdesign intendiert, hauptsächlich in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung erstellt wurden, werden in den folgenden Analysen ausschließlich die Ergebnisse aus dieser Gruppe betrachtet.

8.3.1 Skizzenhäufigkeit

Die Skizzenhäufigkeit über alle Modellierungsaufgaben betrug im Mittel $M = 86.53$ % ($SD = 17.36$ %) (Tabelle 17). Beim Thema *Satz des Pythagoras* betrug die mittlere Skizzenhäufigkeit $M = 87.31$ % ($SD = 19.77$) und lag damit um 1.74 Prozentpunkte höher als die Häufigkeit der Skizzen beim Thema *Flächeninhalte* mit M = 85.57 % (SD = 19.75 %). Das Ergebnis des gepaarten t-Tests zeigte, dass dieser Unterschied nicht signifikant war, $t(165) = -1.22$, $p = .224$.

Betrachtet man also die Häufigkeit der gezeichneten Skizzen an allen Aufgaben je Themenbereich, so zeigt sich, dass bei beiden mathematischen Themenbereichen ähnlich viele Skizzen gezeichnet wurden. In beiden Fällen wurden zu über 96 % – und damit zu fast allen – der Aufgaben Skizzen erstellt. Insgesamt war also eine hohe Skizzenhäufigkeit unabhängig vom jeweiligen mathematischen Thema gegeben.

Tabelle 17: Mittelwerte (Standardabweichungen) der prozentualen Skizzenhäufigkeit in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung auf Basis der Aufgabenbearbeitungen (unter Ausschluss unbearbeiteter Items am Ende des Testheftes)

	Gesamt (N = 2382)			Thema *Satz des Pythagoras* (n = 1207)			Thema *Flächeninhalte* (n = 1175)		
	n	*M*	(*SD*)	*n*	*M*	(*SD*)	*n*	*M*	(*SD*)
Skizzenhäufigkeit (%)	2058	86.53	(17.36)	1056	87.31	(19.77)	1002	85.57	(19.75)

(1.1.) Die Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs zeichnen sehr häufig Skizzen bei der Bearbeitung geometrischer Modellierungsaufgaben, wenn sie dazu aufgefordert werden (im Durchschnitt zu etwa 87 % der Bearbeitungen). Die Skizzenhäufigkeit unterscheidet sich nicht zwischen den Themen Satz des Pythagoras *und* Flächeninhalte.

Betrachtet man die absoluten Häufigkeiten der Skizzen aufgabenweise, so zeigt sich ein deutlicher Abfall, je weiter hinten die Aufgabe im Testheft platziert war – ebenso wie es bereits für die Aufgabenbearbeitungen im Allgemeinen beobachtet wurde (Kapitel 7.5.1). Da fehlende Bearbeitungen aufgrund abgebrochener Testheftbearbeitung als fehlende Werte hinsichtlich der Modellierungsleistung behandelt wurden, wurde parallel dazu zusätzlich eine Analyse der *relativen* Häufigkeiten durchgeführt, bei der die nicht erreichten Aufgaben ausgeschlossen wurden (Tabelle 18). Aber auch dann zeigte sich die Tendenz, dass die Lernenden im Durchschnitt weniger Skizzen zeichneten, wenn die Aufgabe weiter hinten im Testheft positioniert war (Abbildung 29 und Abbildung 30). Daher werden zusätzlich die relativen Häufigkeiten der Skizzen an allen *bearbeiteten* Aufgaben betrachtet.

Tabelle 18: Absolute und relative Skizzenhäufigkeit je Modellierungsaufgabe geordnet nach der Reihenfolge im Testheft, separiert nach den geometrischen Themen

Aufgabe	Absolute Häufigkeit der Skizzen	Anzahl der erreichten[a] Bearbeitungen	Anteil der Skizzen an erreichten Aufgaben (%)	Anzahl der Bearbeitungen[b]	Anteil der Skizzen an bearbeiteten Aufgaben (%)
Satz des Pythagoras					
Rutsche	155	166	93.37	158	98.10
Bauschutt	158	166	95.18	160	98.75
Technik-Masten	154	166	92.77	157	98.09
Maibaum	143	165	86.67	146	97.95
Langer Löffel	138	163	84.66	139	99.28
Wettschwimmen	116	153	75.82	122	95.08
Feuerwehr	94	122	77.05	97	96.91
Umgeknickter Baum	98	109	89.91	101	97.03
Flächeninhalte					
Dachfenster	162	166	97.59	164	98.78
Kreisverkehr	156	166	93.98	159	98.11
Rasensprenger	133	166	80.12	142	93.66
Carport	155	166	93.37	157	98.73
Ferienjob	133	160	83.13	137	97.08
Sonnensegel	105	144	72.92	111	94.59
Feuerschale	87	133	65.41	91	95.60
Hauswand	71	80	88.75	78	91.03

Anmerkungen: [a] unter Ausschluss unbearbeiteter Items am Ende des Testheftes. [b] unter Ausschluss aller unbearbeiteten Items.

Die relative Skizzenhäufigkeit war bei den Aufgaben „Rutsche", „Bauschutt", „Technik-Masten", „Dachfenster", „Kreisverkehr" und „Carport" besonders hoch, wenn man den Anteil an Skizzen an allen *erreichten* Aufgaben betrachtet, aber in ähnlicher Weise auch, wenn man den Anteil an Skizzen an allen *bearbeiteten* Aufgaben betrachtet. Anhand der Aufgabencharakteristika (Anhang A) sowie der Lösungsraten (vgl. Kapitel 8.2) ließen sich keine Besonderheiten dieser Aufgaben feststellen, die die vermehrte Skizzennutzung erklären würden. Auffällig ist hingegen, dass es sich in erster Linie um Aufgaben handelt, die zu Beginn des Testheftes positioniert waren. Demnach scheinen die Lernenden mit zunehmender Testzeit weniger Skizzen gezeichnet zu haben.

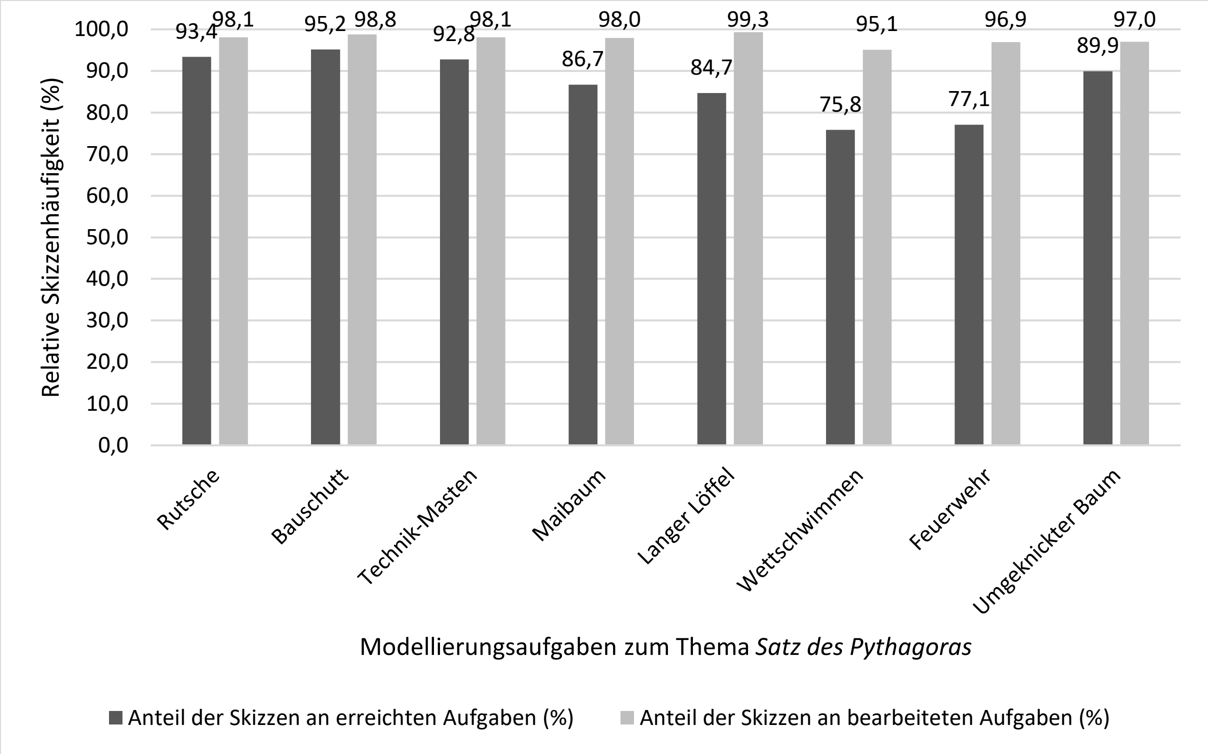


Abbildung 29: Relative Skizzenhäufigkeit je Modellierungsaufgabe geordnet nach der Reihenfolge im Testheft zum Thema *Satz des Pythagoras*

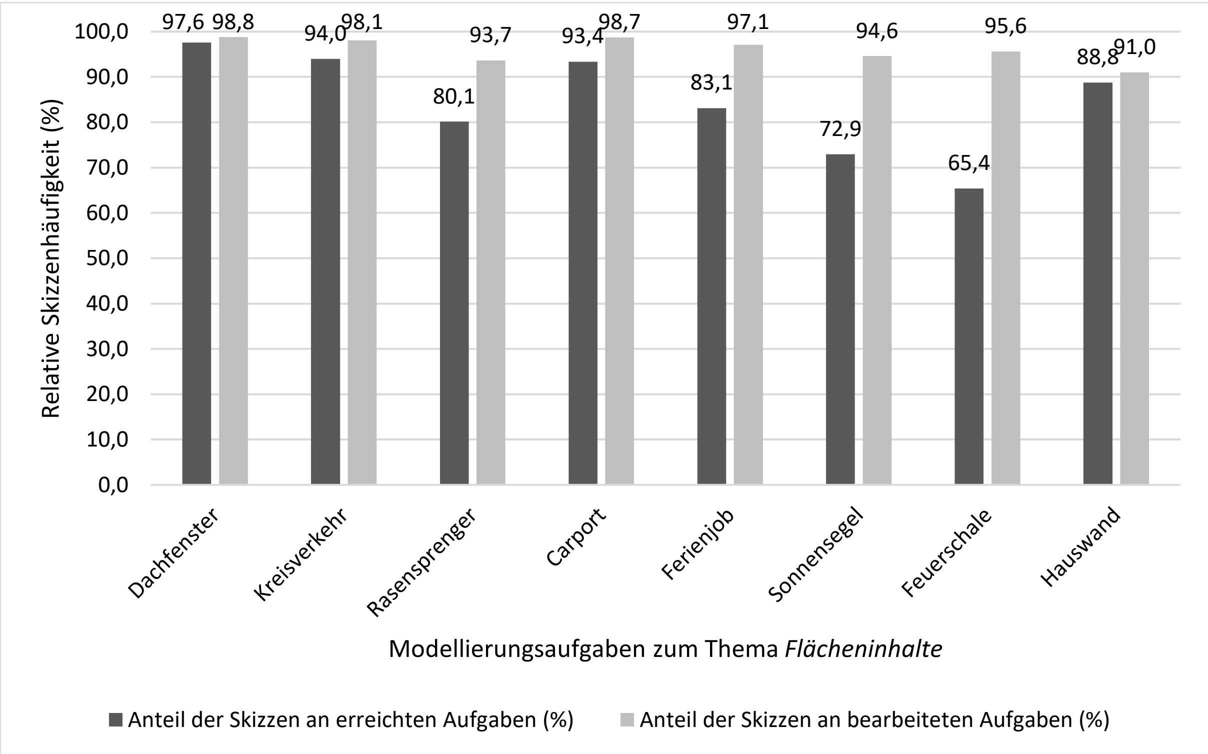


Abbildung 30: Relative Skizzenhäufigkeit je Modellierungsaufgabe geordnet nach der Reihenfolge im Testheft zum Thema *Flächeninhalte*

Aufgrund der abfallenden Skizzenhäufigkeit entsprechend der Testheftposition könnte eine Analyse von Häufigkeiten, die von dieser Tendenz abweichen, zusätzliche Erkenntnisse bringen. Bei den Aufgaben zum *Satz des Pythagoras* waren die Skizzenhäufigkeiten im Vergleich zu der abfallenden Tendenz bei den Aufgaben „Bauschutt“, „Feuerwehr“ und „Umgeknickter Baum“ verhältnismäßig hoch. Bei Betrachtung der Lösungsraten und der Aufgabencharakteristika ließ sich bei diesen jedoch kein besonderer Zusammenhang erkennen. Beim Thema *Flächeninhalte* wichen die Skizzenhäufigkeiten von der regressiven Tendenz bei den Aufgaben „Ferienjob“, „Carport“ und „Hauswand“ ab und lagen höher, als es aufgrund der abfallenden Häufigkeiten entsprechend der Testheftposition anzunehmen wäre. Bei diesen Aufgaben handelte es sich um solche, bei denen im Vergleich zu den übrigen Aufgaben mehr relevante Zahlenwerte zu verarbeiten waren und bei denen die aufzustellende mathematische Formel komplexer war als bei den anderen Aufgaben (Anhang A).

Besonders wenige Skizzen (unter 80 %) wurden bei den Aufgaben „Wettschwimmen“, „Sonnensegel“, und „Feuerschale“ gezeichnet (Tabelle 18). Bei den Aufgaben „Sonnensegel“ und „Feuerschale“ handelte es sich um *Flächeninhalts*-Aufgaben, bei denen besonders wenige Objekte und Relationen in der Skizze hätten dargestellt werden müssen (Anhang A). Die Skizze hatte bei diesen Aufgaben demnach wenig Potenzial zum Entdecken relevanter Zusammenhänge. Bei der *Satz-des-Pythagoras*-Aufgabe „Wettschwimmen“ gab es dagegen ähnlich viele darzustellende Objekte und Relationen wie bei den übrigen Aufgaben zum gleichen Thema. Allerdings zeichneten sich die Objekte und Relationen bei der Aufgabe „Wettschwimmen“ dadurch aus, dass sie besonders abstrakt und komplex in der Aufgabenstellung beschrieben wurden („schwimmt gerade auf Bahn 1“, „schwimmt schräg“, usw.). Eventuell hat dies dazu geführt, dass den Lernenden das Skizzenzeichnen zu dieser Aufgabe besonders schwerfiel.

8.3.2 Skizzenqualität

Insgesamt betrug die Skizzenqualität in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung durchschnittlich $M = 1.38$ Punkte (max. 2 Punkte) ($SD = 0.40$), wenn beide Themenbereiche gemeinsam betrachtet werden (Tabelle 19). Analysiert man die Skizzenqualität getrennt für die Themenbereiche, so betrug die mittlere Skizzenqualität beim Thema *Satz des Pythagoras* $M = 1.46$ Punkte ($SD = 0.42$) und beim Thema *Flächeninhalte* $M = 1.31$ Punkte ($SD = 0.48$). Beide Werte lagen damit eher im mittleren Bereich der Skizzenqualität (max. 2 Punkte). Die gepaarte t-Test-Analyse ergab, dass die Skizzenqualität beim Thema *Satz des Pythagoras* statistisch signifikant höher war als beim Thema *Flächeninhalte*, $t(165) = 4.71$, $p < .001$. Gemäß Cohen handelte es sich dabei um einen großen Effekt ($d_z = 2.50$).

Während die Skizzen*häufigkeit* (vgl. Kapitel 8.3.1) zu beiden mathematischen Themen sehr hoch war, war die Skizzenqualität bei beiden Themen eher im mittleren Bereich. Dabei wurden zum Thema *Satz des Pythagoras* signifikant hochwertigere Skizzen gezeichnet als beim Thema *Flächeninhalte*. Die Häufigkeitsverteilung der durchschnittlichen Skizzenqualität (Abbildung 31) zeigte, dass die Häufigkeiten beim Thema Flächeninhalte insbesondere im niedrigen Qualitätsbereich kontinuierlich anstiegen, und die höheren durchschnittlichen Qualitätsscores ähnlich häufig erreicht wurden (etwa ab einem Durchschnittswert von 1). Beim Thema *Satz des Pythagoras* handelte es sich dagegen um eine linksschiefe Verteilung (Abbildung 32), bei der die niedrigen Durchschnittswerte hinsichtlich der Skizzenqualität nur selten erreicht wurden, während sich ein deutlicher Anstieg ab einem Durchschnittswert von 1 zeigte und hohe durchschnittliche Qualitätswerte von 1,5 bis 2 besonders häufig erreicht wurden. Demnach kam es beim Thema *Flächeninhalte* häufiger als beim Thema *Satz des Pythagoras* vor, dass die Teilnehmenden über alle Modellierungsaufgaben hinweg Skizzen von geringer Qualität anfertigten. Lernende mit einer durchschnittlichen Skizzenzeichenleistung im mittleren Qualitätsbereich waren bei beiden Themen ähnlich häufig vertreten. Hingegen gab es beim Thema *Satz des Pythagoras* häufiger Lernende, die über alle Modellierungsaufgaben hinweg eine durchschnittlich hohe Skizzenzeichenleistung erreichten.

Tabelle 19: Mittelwerte (Standardabweichungen) der Skizzenqualität in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung

	Gesamt (beide Themen)		Thema *Satz des Pythagoras* (n = 166)		Thema *Flächeninhalte* (n = 166)		t-Test		
	M	(*SD*)	*M*	(*SD*)	*M*	(*SD*)	*t (df)*	*p*	d_z
Skizzenqualität (max. 2 Punkte)	1.38	(0.40)	1.46	(0.42)	1.31	(0.48)	4.71 (165)	< .001	2.50

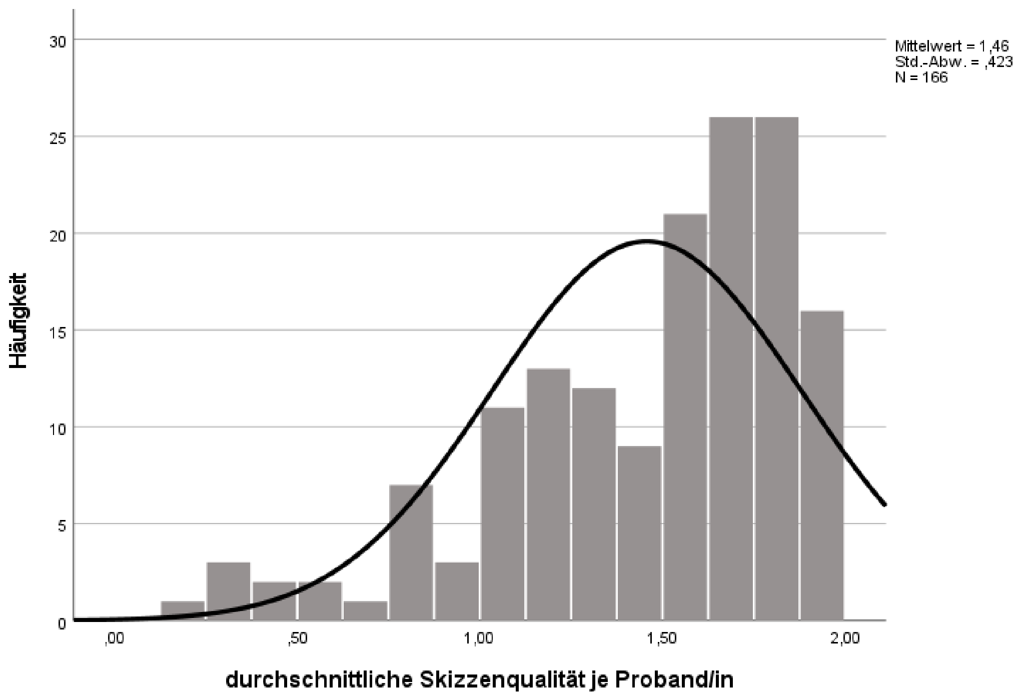


Abbildung 31: Häufigkeitsverteilung der durchschnittlichen Skizzenqualität zum Thema *Satz des Pythagoras*

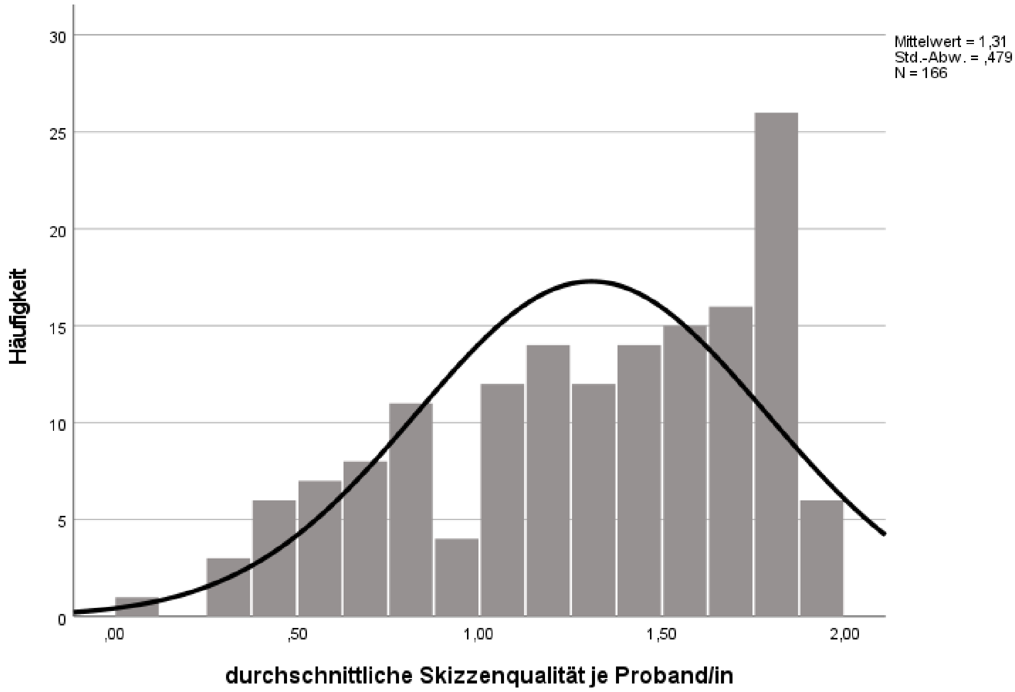


Abbildung 32: Häufigkeitsverteilung der durchschnittlichen Skizzenqualität zum Thema *Flächeninhalte*

> *(1.2.) Die Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs zeichnen Skizzen von etwas über mittlerer Qualität bei der Bearbeitung geometrischer Modellierungsaufgaben, wenn sie dazu aufgefordert werden. Die Qualität der Skizzen zum Thema* Satz des Pythagoras *ist signifikant höher als zum Thema* Flächeninhalte*.*

Um Erkenntnisse darüber zu gewinnen, worin sich der Unterschied in der Skizzenqualität zwischen den Themenbereichen begründete, werden im Folgenden die Ergebnisse von aufgabenweise durchgeführten Analysen der Skizzenqualität sowie Analysen der einzelnen Skizzenkriterien vorgestellt.

8.3.2.1 Aufgabenweise Skizzenqualität

Die aufgabenweise Analyse der Skizzenqualität in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung ergab, dass die Mittelwerte in beiden geometrischen Themenbereichen etwa zwischen M = 1.00 und 1.75 Punkten lagen (max. 2.00 Punkte). Die Standardabweichung lag bei den einzelnen Aufgaben ungefähr zwischen SD = 0.60 und 0.80, wobei die Werte beim Thema *Satz des Pythagoras* insgesamt geringer waren als beim Thema *Flächeninhalte*. Demnach wichen die erhobenen Daten zur Skizzenqualität bei den einzelnen Aufgaben zum Themenbereich *Flächeninhalte* stärker vom Mittelwert ab als beim Themenbereich *Satz des Pythagoras*.

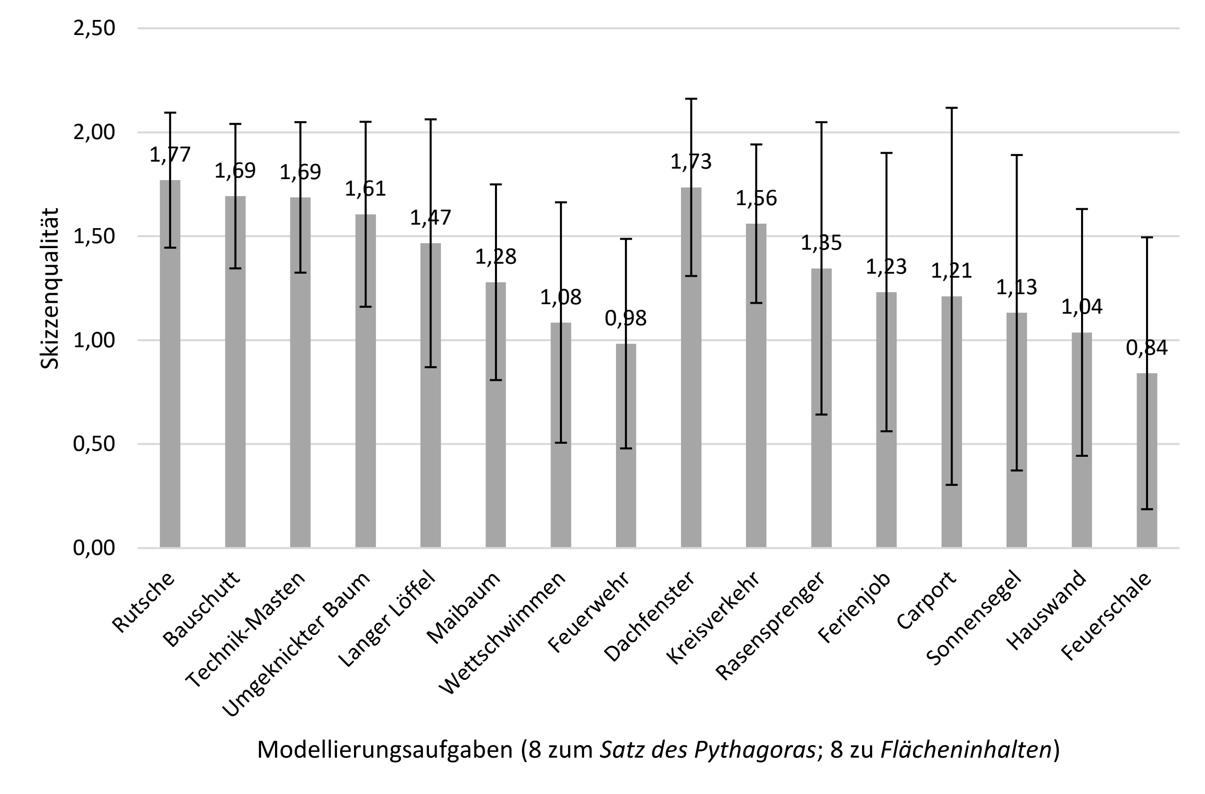


Abbildung 33: Mittelwerte und Standardabweichungen der Skizzenqualität je Aufgabe geordnet nach den Mittelwerten, separiert nach den geometrischen Themenbereichen

Beim Thema *Satz des Pythagoras* wurden zu den Aufgaben „Rutsche“, „Bauschutt“, „Technik-Masten“ und „Umgeknickter Baum“ im Mittel Skizzen erstellt, deren Qualität zwischen M = 1.61 und 1.77 Punkte betrug und damit vergleichsweise hoch war. Bei der Aufgabe „Langer Löffel“ lag die durchschnittliche Skizzenqualität bei M = 1.47. Bei den Aufgaben „Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“ war die durchschnittliche Skizzenqualität mit etwa M = 1.00 Punkten gering.

Im Themenbereich *Flächeninhalte* gab es zwei Aufgaben, „Dachfenster“ und „Kreisverkehr“, bei denen die durchschnittliche Skizzenqualität mit M = 1.73 bzw. 1.56 Punkten im oberen Bereich lag. Bei den Aufgaben „Rasensprenger“, „Ferienjob“, „Carport“ und „Sonnensegel“ betrugen die Mittelwerte um M = 1.13 bis 1.35 und bildeten damit den mittleren Qualitätsbereich. Besonders gering fiel die mittlere Skizzenqualität bei den Aufgaben „Hauswand“ und „Feuerschale“ aus und betrug nur M = 1.04 bzw. 0.84 Punkte.

Wenn man die Mittelwerte der Aufgaben stufenweise zwischen den beiden Themenbereichen vergleicht (Abbildung 33), fällt auf, dass die Mittelwerte der Skizzenqualität beim Thema *Satz des Pythagoras* (je Stufe) durchgängig über denen zum Thema *Flächeninhalte* lagen. Außerdem gab es beim Thema *Satz des Pythagoras* mehr Aufgaben, die einen hohen Mittelwert der Skizzenqualität aufwiesen, während im Themenbereich *Flächeninhalte* viele Aufgaben auf der mittleren Qualitätsstufe angesiedelt waren. Demnach scheint der statistisch signifikante Unterschied der mittleren Skizzenqualität zwischen den Themenbereichen vor allem darin begründet zu sein, dass es beim Thema *Satz des Pythagoras* in der vorliegenden Studie mehr

Aufgaben gab, bei denen Teilnehmende eine gute Skizze erstellten. Auch insgesamt gelang es den Teilnehmenden über alle Aufgaben besser, qualitativ hochwertigere Skizzen zum Thema *Satz des Pythagoras* als zum Thema *Flächeninhalte* anzufertigen.

8.3.2.2 Analyse der Qualitätskriterien

Die Hypothese (1.3.) befasst sich mit der Qualität der Skizzen hinsichtlich der einzelnen Qualitätskriterien (Darstellung der lösungsrelevanten Objekte, Darstellung der lösungsrelevanten Relationen und Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten) sowie mit den Unterschieden zwischen den geometrischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte*.

Tabelle 20: t-Tests zum Vergleich der Skizzenzeichenleistung hinsichtlich der Qualitätskriterien der Skizze zwischen den Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte*

	Thema *Satz des Pythagoras*	Thema *Flächeninhalte*	t-Test		
Kriterium für die Skizzenqualität	*M (SD)*	*M (SD)*	*t (df)*	*p*	d_z
Darstellung der lösungsrelevanten Objekte (max. 1 Punkt)	0.73 (0.23)	0.67 (0.26)	3.69 (165)	< .001	2.00
Darstellung der lösungsrelevanten Relationen (max. 1 Punkt)	0.67 (0.24)	0.59 (0.27)	3.85 (165)	< .001	4.00
Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten (max. 1 Punkt)	0.68 (0.25)	0.67 (0.27)	0.66 (165)	.511	–

Eine Analyse der Mittelwerte und Standardabweichungen (Tabelle 20) in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung zeigte, dass die Mittelwerte bei beiden Themenbereichen hinsichtlich aller drei Qualitätskriterien bei etwa $M = 0.6 – 0.7$ Punkten lagen (Maximalwert 1.00 Punkt). Bei allen drei Qualitätskriterien überstiegen die Werte zum Thema *Satz des Pythagoras* die Werte zum Thema *Flächeninhalte*.

Beim Kriterium Darstellung der lösungsrelevanten Objekte lag der Mittelwert beim Thema *Satz des Pythagoras* höher ($M = 0.73$) als der beim Thema *Flächeninhalte* ($M = 0.67$). Eine inferenzstatistische Analyse mittels t-Test ergab, dass der Mittelwertunterschied signifikant war, $t(165) = 3.69$, $p < .001$, $d_z = 2.00$. Auch die Darstellung der lösungsrelevanten Relationen fiel im Mittel beim Thema *Satz des Pythagoras* höher aus ($M = 0.67$) als beim Thema *Flächeninhalte* ($M = 0.59$). Auch dieser Unterschied war statistisch signifikant, $t(165) = 3.85$, $p < .001$, $d_z = 4.00$. Die Mittelwerte hinsichtlich der Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten waren bei beiden Themenbereichen ähnlich hoch (mit $M = 0.68$ und $M = 0.67$). Der t-Test bestätigte, dass sich die durchschnittliche Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten zwischen den Themenbereichen nicht unterschied, $t(165) = 0.66$, $p = .511$.

Um zu analysieren, inwiefern der Unterschied zwischen den Skizzenqualitätskriterien innerhalb eines Themenbereichs statistisch relevant war, wurden gepaarte t-Tests zwischen den Kriterien durchgeführt. Beim Thema *Satz des Pythagoras* gelang den Teilnehmenden die Darstellung der Objekte signifikant besser als die Darstellung der Relationen in der Skizze,

$t(165) = 8.95$, $p < .001$, $d_z = 0.69$, und auch signifikant besser als die Beschriftung mit Zahlenwerten, $t(165) = 4.16$, $p < .001$, $d_z = 3.22$, wohingegen der Unterschied zwischen der Darstellung der Relationen und der Beschriftung mit relevanten Zahlenwerten nicht signifikant war, $t(165) = -1.38$, $p = .169$, $d_z = 0.11$.

Beim Thema *Flächeninhalte* waren die Teilnehmenden statistisch signifikant erfolgreicher bei der Darstellung der Objekte in der Skizze als bei der Darstellung der Relationen in der Skizze, $t(165) = 10.01$, $p < .001$, $d_z = 0.78$. Der Unterschied zwischen der Darstellung der Objekte und der Beschriftung mit relevanten Zahlenwerten war nicht signifikant, $t(165) = -0.49$, $p = .627$, $d_z = 0.04$. Die Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten gelang den Lernenden aber wiederum signifikant besser als die Darstellung der lösungsrelevanten Relationen, $t(165) = -5.98$, $p < .001$, $d_z = 0.46$.

(1.3.) Beim Zeichnen von Skizzen zu geometrischen Modellierungsaufgaben gelingt den Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs hinsichtlich der als relevant befundenen Skizzenqualitätskriterien...

- *am besten die Darstellung der lösungsrelevanten Objekte in der Skizze*
- *am zweitbesten die Beschriftung der Skizze mit den lösungsrelevanten Zahlenwerten*
- *am wenigsten gut die Darstellung der lösungsrelevanten Relationen in der Skizze.*

Dabei gelingt es den Lernenden signifikant besser, die lösungsrelevanten Objekte sowie die lösungsrelevanten Relationen in Skizzen zum Thema Satz des Pythagoras *darzustellen als zum Thema* Flächeninhalte*. Bei der Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten gibt es dagegen keine Unterschiede zwischen den geometrischen Themen.*

8.3.3 Abstraktionsgrad der Skizzen

Entsprechend dem maximalen Score je Aufgabe (Score 1 = schematische Skizze, Score 0 = situative Skizze) konnte auch beim Mittelwert maximal der Wert 1 erreicht werden. Insgesamt lag der Mittelwert bezüglich des Abstraktionsgrades der Skizzen in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung bei $M = 0.90$ ($SD = 0.15$) (Tabelle 21). Demzufolge wurden im Durchschnitt häufig schematische Skizzen und selten situative Skizzen erstellt.

Betrachtet man die Mittelwerte für die geometrischen Themen einzeln, so übertraf der Mittelwert zum Thema *Flächeninhalte* ($M = 0.95$) den zum Thema *Satz des Pythagoras* ($M = 0.86$). Eine t-Test-Analyse ergab, dass der Abstraktionsgrad der Skizzen beim Thema *Flächeninhalte* statistisch signifikant höher war als beim Thema *Satz des Pythagoras*, $t(166) = 6.306$, $p < 0.001$, $d = 0.49$. Dabei handelte es sich nach Cohen um einen kleinen Effekt (nah an der Grenze zum mittleren Effekt).

Tabelle 21: Mittelwerte (Standardabweichungen) des Abstraktionsgrads der Skizzen

	Gesamt (beide Themen)		Thema *Satz des Pythagoras* (*n* = 166)		Thema *Flächeninhalte* (*n* = 166)		t-Test	
	M	(*SD*)	*M*	(*SD*)	*M*	(*SD*)	*t (df)*	*p*
Abstraktionsgrad (max. 1 Punkt)	0.91	(0.15)	0.86	(0.22)	0.95	(0.11)	-6.31 (165)	< .001

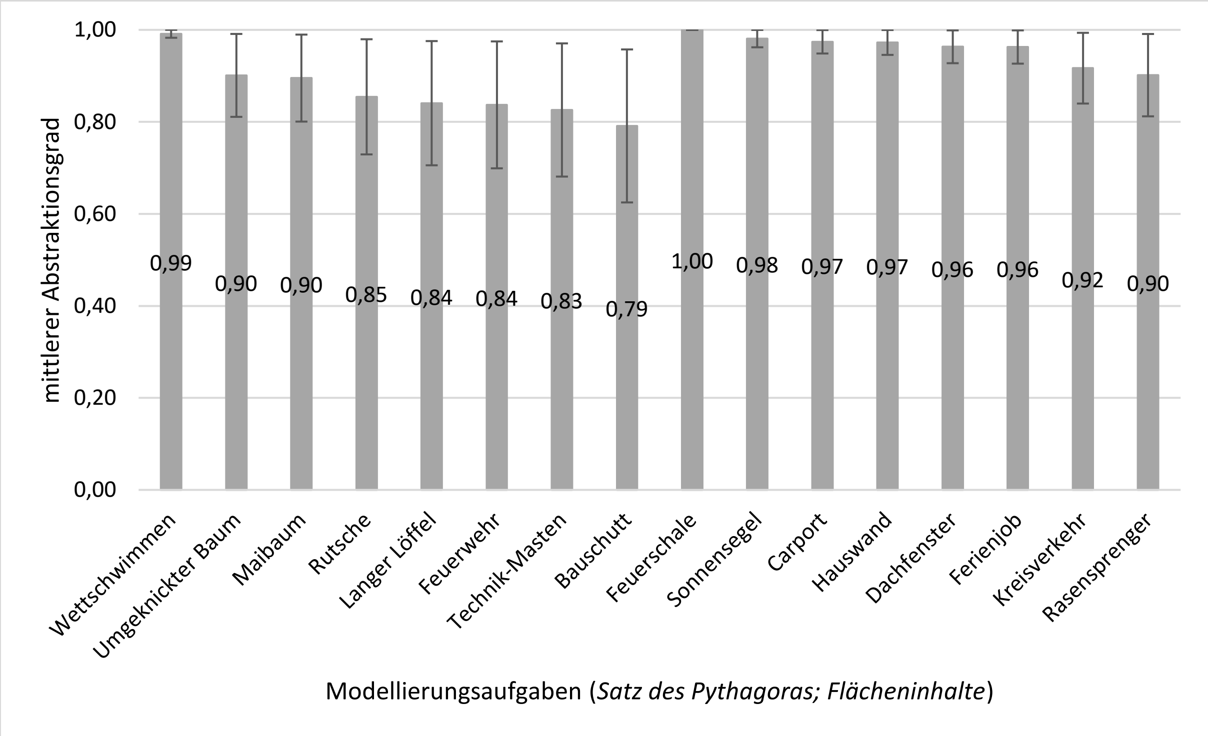


Abbildung 34: Mittelwerte und Varianzen des Abstraktionsgrads der Skizzen unterteilt nach Themen und geordnet nach Höhe der Mittelwerte

Bei einer aufgabenweisen Analyse zeigte sich, dass der Abstraktionsgrad beim Thema *Satz des Pythagoras* bei den meisten Aufgaben zwischen 0.80 und 0.90 lag. Besonders hoch war der Abstraktionsgrad bei der Aufgabe Wettschwimmen (M = 0.99) und vergleichsweise niedrig bei der Aufgabe „Bauschutt" (M = 0.79).

Anhand des Diagramms (Abbildung 34) wird deutlich, dass der Abstraktionsgrad beim Thema *Flächeninhalte* bei vielen Aufgaben höher war als beim Thema *Satz des Pythagoras*. Bei den meisten Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* lag der mittlere Abstraktionsgrad bei ca. M = 0.96 – 0.98. Bei der Aufgabe „Feuerschale" war der Abstraktionsgrad besonders hoch mit M = 1.00 und bei den Aufgaben „Kreisverkehr" und „Rasensprenger" verhältnismäßig niedrig mit M = 0.92 und M = 0.90.

Im Allgemeinen wiesen die Teilnehmenden eine hohe Fähigkeit auf, die Skizzen schematisch zu zeichnen. Den Schülerinnen und Schülern gelang es geringfügig besser, die Skizzen zum Thema *Flächeninhalte* abstrakt darzustellen, als schematische Skizzen zum Thema *Satz des*

Pythagoras zu zeichnen. Die aufgabenweise Analyse des Abstraktionsgrades ergab, dass der statistisch signifikante Unterschied zwischen den Themen darauf zurückzuführen ist, dass zum Thema *Flächeninhalte* aufgabenübergreifend abstraktere Skizzen erstellt werden als zum Thema *Satz des Pythagoras*.

> *(1.4.) Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs zeichnen sehr häufig schematische und selten situative Skizzen bei der Bearbeitung geometrischer Modellierungsaufgaben. Bei Modellierungsaufgaben zum Thema* Flächeninhalte *ist der Abstraktionsgrad der Skizzen geringfügig, aber signifikant höher als bei Aufgaben zum Thema* Satz des Pythagoras*.*

8.4 Zusammenhang zwischen dem Skizzenzeichnen und der geometrischen Modellierungsleistung

Die Hypothesen (2.1.) und (2.2.) beinhalten zum einen den Zusammenhang zwischen Skizzenhäufigkeit, -qualität und Abstraktionsgrad mit der allgemeinen Modellierungsleistung und zum anderen mit der Leistung in den einzelnen Teilprozessen des Modellierens. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Regressionsanalysen berichtet, die zur Überprüfung dieser Hypothesen durchgeführt wurden. Hierfür werden ausschließlich die Daten aus der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung herangezogen, da nicht auszuschließen ist, dass der Zusammenhang unter dem Einfluss eines Skizzenverbots anders ausfallen könnte.

8.4.1 Varianzaufklärung der allgemeinen Modellierungsleistung

Um Erkenntnisse über den Zusammenhang zwischen dem Skizzenzeichnen und der allgemeinen Modellierungsleistung zu gewinnen, wurden hierarchische, multiple Regressionsanalysen in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung durchgeführt. Diese sollten Aufschluss darüber geben, welchen Anteil an Varianzaufklärung die Skizzenvariablen für die Modellierungsleistung liefern, wenn für andere leistungsrelevante Merkmale kontrolliert wird (*geometriebezogene Leistung*, *allgemeine Mathematikleistung*, *Geschlecht*, *Skizzenpräferenz*). Darüber hinaus können die Regressionsanalysen Hinweise darauf geben, welche der Skizzenmerkmale (Häufigkeit, Qualität, Abstraktionsgrad) besonders relevant sind. Zur Beantwortung der Frage nach Unterschieden zwischen den Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* werden die Regressionsanalysen für die Themen separat durchgeführt. Dabei werden die Prädiktoren blockweise nach kausaler Priorität eingeführt.

In Tabelle 22 sind die Korrelationen zwischen den Hintergrund-, den Skizzenvariablen und der Modellierungsleistung dargestellt, um darauf in den Regressionsanalysen Bezug nehmen zu können.

Tabelle 22: Mittelwerte, Standardabweichungen sowie bivariate Korrelationen der Kontrollvariablen, Skizzenvariablen und der Modellierungsleistung

	M	*(SD)*	AV	1	2	3	4	5	6	7
AV: Modellierungsleistung (*Satz des Pythagoras*)	0.43	(0.31)	–							
1. Geometriebezogene Leistung	3.63	(2.22)	.64**	–						
2. Allgemeine Mathematikleistung	3.85	(1.11)	.55**	.62**	–					
3. Geschlecht (0 = m, 1 = w)	0.60	(0.65)	-.17*	-.14	-.02	–				
4. Skizzenpräferenz	1.88	(0.51)	-.11	-.15	-.18*	.21**	–			
5. Skizzenhäufigkeit	97.51	(7.72)	.16*	.16*	.25**	.02	-.01	–		
6. Skizzenqualität	1.46	(0.42)	.61**	.51**	.46**	.08	-.11	.37**	–	
7. Abstraktionsgrad	0.86	(0.22)	.31**	.27**	.14**	-.07	-.03	.05	.19*	–
AV: Modellierungsleistung (*Flächeninhalte*)	0.46	(0.29)	–							
1. Geometriebezogene Leistung	3.63	(2.22)	.64**	–						
2. Allgemeine Mathematikleistung	3.85	(1.11)	.58**	.62**	–					
3. Geschlecht (0 = m, 1 = w)	0.60	(0.65)	-.01	-.14	-.02	–				
4. Skizzenpräferenz	1.88	(0.51)	-.17*	-.15	-.18*	.21**	–			
5. Skizzenhäufigkeit	96.18	(9.10)	.24**	.18*	.22**	.02	-.01	–		
6. Skizzenqualität	1.31	(0.48)	.76**	.51**	.46**	.04	-.17*	.38**	–	
7. Abstraktionsgrad	0.95	(0.11)	.29**	.28**	.18*	.05	.03	.14	.24**	–

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Bei den Regressionsanalysen wurden im ersten Schritt die Hintergrundvariablen als Block eingefügt (Cohen, Cohen, West, & Aiken, 2003, S. 158 ff.; Tabachnick & Fidell, 2013, S. 179): *Geometriebezogene Leistung*, *allgemeine Mathematikleistung*, *Geschlecht*, *Skizzenpräferenz*. Dabei wurde auf eine Priorisierung verzichtet, sodass die Prädiktoren simultan aufgenommen wurden. Auch wenn das Geschlecht und die Skizzenpräferenz gar nicht oder sehr geringfügig negativ mit den abhängigen Variablen korrelierten (Tabelle 22), wurden die Prädiktoren berücksichtigt, um aussagen zu können, welcher Anteil der Varianz unabhängig vom Geschlecht oder der Skizzenpräferenz auf die Skizzenvariablen zurückzuführen ist.

Im zweiten Schritt wurden die Skizzenvariablen (Häufigkeit, Qualität, Abstraktionsgrad) in das Modell integriert. Auch hierbei wurden keine Prioritäten gesetzt, sodass die Faktoren simultan in das Modell aufgenommen wurden. Tabelle 23 zeigt die Ergebnisse der multiplen Regressionsanalysen.

Tabelle 23: Standardisierte Beta-Koeffizienten der hierarchischen Regressionsanalyse zur Vorhersage der Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras* in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung

	Thema *Satz des Pythagoras*		Thema *Flächeninhalte*	
Prädiktoren	M 1	M 2	M 1	M 2
Geometriebezogene Leistung	.48***	.27***	.45***	.24***
Allgemeine Mathematikleistung	.25**	.21**	.30**	.18*
Geschlecht (0 = m, 1 = w)	-.08	-.15*	.08	.01
Skizzenpräferenz	-.00	.03	-.07	-.02
Skizzenhäufigkeit		-.09		-.08
Skizzenqualität		.39***		.55***
Abstraktionsgrad der Skizzen		.11†		.06
R^2 =	**.45**	**.56**	**.47**	**.67**
ΔR^2 =		**.11*** **		**.20*** **

† $p < .10$, * $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Beim Thema *Satz des Pythagoras* lieferte das Modell mit den Kontrollvariablen (M 1) eine Varianzaufklärung von 45 %, $F(4, 149) = 30.82$, $p < .001$. Das Modell mit allen unabhängigen Variablen (M 2) erklärte 56 % der Varianz der Modellierungsleistung, $F(7, 146) = 26.40$, $p < .001$. Insgesamt konnte damit mehr als die Hälfte der Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* durch die unabhängigen Variablen vorhergesagt werden. Dies entspricht einer hohen Varianzaufklärung.

Eine Betrachtung der β-Koeffizienten ergab, dass insbesondere die Skizzenqualität ein signifikanter Prädiktor der Modellierungsleistung war ($\beta = .39$, $p < .001$), während die Vorhersage durch den Abstraktionsgrad der Skizze deutlich geringer war ($\beta = .11$) und geringfügig über der statistischen Signifikanzgrenze lag ($p = .052$). Die Skizzenhäufigkeit war kein signifikanter Prädiktor.

Beim Thema *Flächeninhalte* konnten 47 % der Varianz der Modellierungsleistung durch das Modell mit den Kontrollvariablen (M 1) erklärt werden, $F(4, 149) = 33.27$, $p < .001$. Durch die Hinzunahme der Skizzenvariablen (M 2) stieg die Varianzaufklärung auf 67 %, $F(7, 146) = 41.95$. Die β-Koeffizienten verdeutlichen, dass dieser Anstieg ausschließlich auf den Prädiktor *Skizzenqualität* zurückzuführen ist ($\beta = .55$, $p < .001$), während die *Skizzenhäufigkeit* und der *Abstraktionsgrad der Skizzen* keine signifikanten Prädiktoren der Modellierungsleistung darstellten.

Im Vergleich der beiden Themenbereiche wird deutlich, dass die Kontrollvariablen die jeweilige Modellierungsleistung ähnlich stark vorhersagen. Dagegen scheint der Abstraktionsgrad der Skizze nur bei der Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* eine – wenn auch geringe – Rolle zu spielen. Ein Vergleich der Regressionskoeffizienten zwischen den Themen führt zu der Vermutung, dass die Skizzenqualität beim Thema *Flächeninhalte* ein stärkerer Prädiktor der Modellierungsleistung ist als beim Thema *Satz des Pythagoras*.

Hinsichtlich der Kontrollvariablen lieferte, wie aufgrund der theoretischen Vorüberlegungen erwartet, insbesondere die geometriebezogene Leistung einen hohen Anteil der Varianzaufklärung der Modellierungsleistung bei beiden Themen. Zweitstärkster Prädiktor war die allgemeine Mathematikleistung, die ebenfalls bei beiden Themen statistisch signifikant war. Das Geschlecht wurde im Fall der Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* bei Hinzunahme der Skizzenvariablen geringfügig signifikant ($\beta = -.15$, $p = .010$). Da die Hintergrundvariable jedoch ohne Einbezug der Skizzenvariablen nicht signifikant war, ist eine inhaltliche Interpretation fraglich.

> *(2.1.) Die* ***Skizzenqualität*** *sagt den Lösungserfolg beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben signifikant vorher, wobei die Varianzaufklärung durch die Skizzenqualität beim Thema* Flächeninhalte *höher ist als beim Thema* Satz des Pythagoras*. Die* ***Skizzenhäufigkeit*** *stellt bei beiden geometrischen Themen keinen signifikanten Prädiktor dar. Beim Thema* Satz des Pythagoras *deutet sich eine Vorhersagekraft durch den* ***Abstraktionsgrad*** *der Skizzen an, die jedoch nicht statistisch signifikant ist. Beim Thema* Flächeninhalte *ist der Abstraktionsgrad kein signifikanter Prädiktor.*

8.4.2 Varianzaufklärung der Leistung in den Modellierungsphasen

Wie in Kapitel 7.5.4.2 beschrieben, wurden zur Überprüfung der Forschungshypothese (2.2.) multiple, hierarchische Regressionsanalysen mit der Leistung in den Teilphasen des Modellierungsprozesses (Leistung bei der *Bildung des Realmodells*, bei der *Auswahl des allgemeinen mathematischen Modells*, bei der *Bildung des spezifischen mathematischen Modells* und bei der *Berechnung des mathematischen Resultats*) als abhängige Variablen durchgeführt. Diese Analysen erfolgten analog zu denen der allgemeinen Modellierungsleistung, allerdings mit der zusätzlichen Berücksichtigung der Leistung im jeweils vorherigen Modellierungsschritt. Dies entfällt bei der Bildung des Realmodells als erstem Modellierungsschritt.[49] Erneut werden die Ergebnisse ausschließlich für die Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung berichtet.

8.4.2.1 Skizzenzeichnen beim Bilden des Realmodells

Im ersten Schritt lieferte das Modell mit den Kontrollvariablen sowohl beim *Satz des Pythagoras*, $F(4, 149) = 13.02$, $p < .001$, als auch beim Thema *Flächeninhalte*, $F(4, 149) = 15.71$, $p < .001$, deutlich weniger Varianzaufklärung der Leistung beim Bilden des Realmodells als bei

[49] Die Korrelationstabellen zum Zusammenhang zwischen den Skizzenvariablen und der Leistung in den einzelnen Modellierungsphasen befinden sich aus Gründen der Übersichtlichkeit im Anhang M.

der Modellierungsleistung insgesamt (vgl. Kapitel 8.4.1), nämlich 26 bzw. 30 %[50] (Tabelle 24) (anstatt 45 und 47 %, Tabelle 23). Die geometriebezogene Leistung war bei beiden Themen im Modell M 1 ein hoch signifikanter Prädiktor. Beim Thema *Satz des Pythagoras* war zudem das Geschlecht signifikant (Mädchen gelang das Bilden des Realmodells demnach geringfügig besser); beim Thema *Flächeninhalte* war zusätzlich die allgemeine Mathematikleistung ein signifikanter Prädiktor. Beide Prädiktoren wurden unter Hinzunahme der Skizzenvariablen allerdings nicht mehr signifikant und scheinen demnach für die Bildung des Realmodells einen untergeordneten Stellenwert zu haben. Die Skizzenpräferenz trat in keinem der Modelle als signifikanter Prädiktor auf, weshalb sie beim Bilden des Realmodells nicht relevant zu sein scheint.

Tabelle 24: Standardisierte Beta-Koeffizienten der hierarchischen Regressionsanalyse zur Vorhersage der Leistung beim Bilden des Realmodells

	Thema *Satz des Pythagoras*		Thema *Flächeninhalte*	
Prädiktoren	M1	M 2	M 1	M 2
Geometriebezogene Leistung	.39***	.04	.37***	.15*
Allgemeine Mathematikleistung	.14	-.01	.20*	.03
Geschlecht (0 = m, 1 = w)	.18*	.02	.10	.01
Skizzenpräferenz	-.05	.03	-.09	.00
Skizzenhäufigkeit		.04		.02
Skizzenqualität		.85***		.74***
Abstraktionsgrad der Skizzen		-.13**		-.15**
R^2 =	**.26**	**.73**	**.30**	**.69**
ΔR^2 =		**.47*** **		**.39*** **

† $p < .10$, * $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Durch die Hinzunahme der Skizzenvariablen erhöhte sich die aufgeklärte Varianz deutlich auf 73 % beim *Satz des Pythagoras*, $F(7, 146) = 56.90$, $p < .001$, und auf 69 % beim Thema *Flächeninhalte*, $F(7, 146) = 46.12$, $p < .001$. Die Zunahme an Varianzaufklärung durch die Aufnahme der Skizzenvariablen war in beiden Fällen deutlich höher als bei der Modellierungsleistung im Allgemeinen (vgl. Kapitel 8.4.1). Dies deutet darauf hin, dass das Zeichnen einer Skizze für das Bilden des Realmodells besonders relevant ist.

Bei beiden Themen war die Skizzenqualität ein starker Prädiktor ($\beta = .85$, $p < .001$ bzw. $\beta = .74$, $p < .001$). Auffällig ist, dass der Abstraktionsgrad der Skizzen ebenfalls in beiden Themenbereichen die Leistung beim Bilden des Realmodells signifikant vorhersagte, allerdings mit jeweils negativem β-Koeffizienten ($\beta = -.13$, $p = .003$ bzw. $\beta = -.15$, $p = .002$). Je geringer also

[50] Aus Gründen der Stringenz werden die Ergebnisse der Analysen in geeigneten Fällen zu beiden Themenbereichen gemeinsam berichtet. In diesen Fällen bezieht sich der erste Wert immer auf das Thema *Satz des Pythagoras*, der zweite Wert auf das Thema *Flächeninhalte*.

der Abstraktionsgrad der Skizzen ist, desto höher ist die Leistung beim Bilden des Realmodells. Die Skizzenhäufigkeit war hingegen kein signifikanter Prädiktor.

> *Beim* **Bilden des Realmodells** *sagt die* ***Skizzenqualität*** *die erfolgreiche Bewältigung der Modellierungsphase signifikant vorher. Die Zunahme an Varianzaufklärung gegenüber dem Modell ohne Skizzenvariablen ist deutlich höher als bei der Modellierungsleistung im Allgemeinen. Die* ***Skizzenhäufigkeit*** *stellt bei beiden geometrischen Themen keinen signifikanten Prädiktor dar. Der* ***Abstraktionsgrad*** *der Skizzen ist bei beiden geometrischen Themen ein signifikanter, negativer Prädiktor beim Bilden des Realmodells. Die Zunahme an Varianzaufklärung gegenüber dem Modell ohne Skizzenvariablen ist deutlich höher als bei der Modellierungsleistung im Allgemeinen.*

8.4.2.2 Skizzenzeichnen beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells

Beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells zum Thema *Satz des Pythagoras* lieferte der vorherige Modellierungsschritt (Bilden des Realmodells) eine eher geringe Varianzaufklärung und unter Hinzunahme der Kontrollvariablen sowie der Skizzenvariablen wurde der Prädiktor nicht mehr signifikant (Tabelle 25). Dagegen stellte die geometriebezogene Leistung in M2 (β = .38, p < .001) und M3 (β = .25, p = .002) einen signifikanten Prädiktor der Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells dar. Auch die Skizzenqualität (β = .41, p < .001) sowie der Abstraktionsgrad der Skizzen (β = .19, p = .002) sagten die Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells signifikant vorher. Dabei war der standardisierte Regressionskoeffizient der Skizzenqualität höher als der der geometriebezogenen Leistung, während der Abstraktionsgrad der Skizzen einen niedrigeren Regressionskoeffizienten aufwies. Die allgemeine Mathematikleistung war nur geringfügig signifikant (β = .17, p = .037 in M 2 bzw. β = .15, p = .044 in M 3) und war damit ein weniger relevanter Prädiktor. Geschlecht, Skizzenpräferenz und Skizzenhäufigkeit waren in keinem der Modelle signifikante Prädiktoren.

Sowohl der Einbezug der Kontrollvariablen als auch die Integration der Skizzenvariablen führten jeweils zu einer signifikanten Steigerung der Varianzaufklärung (Tabelle 25). Das Modell unter Einbezug aller Prädiktoren lieferte insgesamt eine hohe Varianzaufklärung von 54 %, $F(8, 145) = 21.46$, p < .001.

Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass sowohl die geometriebezogene Leistung als auch die Skizzenqualität und der Abstraktionsgrad der Skizzen eine Rolle beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells spielen. Interessant ist, dass der Abstraktionsgrad der Skizze – anders als beim Bilden des Realmodells – in einem positiven Zusammenhang mit der Leistung beim Bilden des Realmodells stand. Demnach scheint das Zeichnen einer schematischen Skizze eher mit dem Bilden des allgemeinen mathematischen Modells in Zusammenhang zu stehen, während das Zeichnen einer situativen Skizze eher mit dem Bilden des Realmodells einhergeht. Interessant ist außerdem, dass das Bilden des Realmodells beim Thema *Satz des*

Pythagoras offenbar eine weniger bedeutende Rolle für die Bildung des allgemeinen mathematischen Modells spielt – anders als beim Thema *Flächeninhalte*.

Tabelle 25: Standardisierte Beta-Koeffizienten der hierarchischen Regressionsanalyse zur Vorhersage der Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells[51]

	Thema *Satz des Pythagoras*			Thema *Flächeninhalte*		
Prädiktoren	M 1	M 2	M 3	M 1	M 2	M 3
Leistung bei der Bildung des Realmodells	.51***	.28***	.01	.78***	.59***	.42***
Geometriebezogene Leistung		.38***	.25**		.25***	.20**
Allgemeine Mathematikleistung		.17*	.15*		.10	.07
Geschlecht (0 = m, 1 = w)		-.02	-.04		.05	.03
Skizzenpräferenz		.05	.07		-.07	-.06
Skizzenhäufigkeit			-.05			-.05
Skizzenqualität			.41***			.27**
Abstraktionsgrad der Skizzen			.19**			.08†
R^2 =	**.26**	**.45**	**.54**	**.60**	**.68**	**.72**
ΔR^2 =		**.19*** **	**.09*** **		**.08*** **	**.04*** **

† $p < .10$, * $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Im Themenbereich *Flächeninhalte* stellte die Leistung beim Bilden des Realmodells in allen drei Modellschritten einen signifikanten Prädiktor dar, der durch die Hinzunahme von Kontroll- und Skizzenvariablen aber deutlich verringert wurde (von β = .78, $p < .001$ in M 1 auf β = .42, $p < .001$ in M 3). Darüber hinaus sagte die geometriebezogene Leistung unter Einbezug aller Prädiktoren die Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells signifikant voraus (β = .20, $p = .002$) ebenso wie die Skizzenqualität (β = .27, $p = .001$). Der Abstraktionsgrad der Skizzen lag zwar nah an der Signifikanzgrenze, wurde jedoch nicht statistisch signifikant (β = .08, $p = .088$). Die allgemeine Mathematikleistung, das Geschlecht, die Skizzenpräferenz und die Skizzenhäufigkeiten waren keine signifikanten Prädiktoren der Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells zum Thema *Flächeninhalte*.

Insgesamt lieferte das Modell bei Integration aller unabhängigen Variablen eine Varianzaufklärung von 72 %, $F(8, 145) = 45.50$, $p < .001$, wobei der Einschluss von Kontroll- und Skizzenvariablen jeweils signifikante Steigerungen bewirkten. Allerdings war die Steigerung durch Aufnahme der Skizzenvariablen geringer als bei der allgemeinen Modellierungsleistung,

[51] Die Regressionsanalysen zur Vorhersage der Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells wurden für beide Themen mit Bootstrapping durchgeführt, da die Residuen in diesen Fällen nicht normalverteilt waren. Das Bootstrapping wurde mit 1000 Samples durchgeführt. Die signifikanten Prädiktoren wurden darauf geprüft, dass die Null in den Konfidenzintervallen beim Bootstrapping nicht enthalten ist. Dies traf bei allen Prädiktoren zu.

was darauf hindeutet, dass das Zeichnen einer Skizze bei diesem Schritt eine geringere Rolle spielt als bei anderen Modellierungsphasen.

> *Beim* **Bilden des allgemeinen mathematischen Modells** *sagt die* ***Skizzenqualität*** *die erfolgreiche Bewältigung des Modellierungsschrittes signifikant vorher. Während sie beim Thema* Satz des Pythagoras *den höchsten Prädiktor darstellt, liegt sie beim Thema* Flächeninhalte *hinter der Leistung beim Bilden des Realmodells. Die Skizzenhäufigkeit stellt bei beiden geometrischen Themen keinen signifikanten Prädiktor dar. Der* ***Abstraktionsgrad*** *der Skizzen sagt die Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells im Themenbereich* Satz des Pythagoras *signifikant voraus, beim Thema* Flächeninhalte *ist der Prädiktor statistisch nicht relevant. Die Zunahme an Varianzaufklärung gegenüber dem Modell ohne Skizzenvariablen ist etwas geringer als bei der Modellierungsleistung im Allgemeinen.*

8.4.2.3 Skizzenzeichnen beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells

Im Modellierungsteilprozess des Bildens des spezifischen mathematischen Modells stellte der vorherige Schritt (die Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells) auf allen Stufen der hierarchischen Regressionsanalyse in beiden mathematischen Themenbereichen den mit Abstand größten Prädiktor dar ($\beta = .73$, $p < .001$ bzw. $\beta = .60$, $p < .001$ bei M 3) (Tabelle 26). Die geometriebezogene Leistung wurde unter Einbezug aller Variablen nicht mehr signifikant, wobei dies auf das Auspartialisieren des vorherigen Modellierungsschritts zurückzuführen ist. Zumindest aber die allgemeine Mathematikleistung sagte die Leistung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells bei beiden Themen signifikant voraus, wobei die standardisierten Regressionskoeffizienten gering waren ($\beta = .09$, $p = .041$ bzw. $\beta = .12$, $p = .018$). Das Geschlecht stellte beim Thema *Flächeninhalte* keinen, beim Thema *Satz des Pythagoras* einen geringen Prädiktor dar, wobei die Jungen tendenziell eine höhere Leistung aufwiesen als die Mädchen ($\beta = -.11$, $p = .002$).

Skizzenpräferenz, Skizzenhäufigkeit und Abstraktionsgrad der Skizzen waren keine signifikanten Prädiktoren. Die Skizzenqualität dagegen stellte bei beiden mathematischen Themen einen signifikanten Prädiktor der Leistung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells dar ($\beta = .12$, $p = .016$ bzw. $\beta = .20$, $p = .002$). Insgesamt lieferten die Regressionsmodelle unter Einzug aller Variablen eine sehr hohe Varianzaufklärung von 83 % beim Thema *Satz des Pythagoras*, $F(8, 145) = 89.82$, $p < .001$, und 78 % beim Thema *Flächeninhalte*, $F(8, 145) = 69.43$, $p < .001$, allerdings hauptsächlich durch Einbezug des vorherigen Modellierungsschrittes. Die Hinzunahme der Skizzenvariablen bewirkte nur eine geringe Steigerung der Varianzaufklärung um 1 bzw. 2 Prozentpunkte.

Tabelle 26: Standardisierte Beta-Koeffizienten der hierarchischen Regressionsanalyse zur Vorhersage der Leistung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells

	Thema *Satz des Pythagoras*			Thema *Flächeninhalte*		
Prädiktoren	M 1	M 2	M 3	M 1	M 2	M 3
Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells	.89***	.77***	.73***	.87***	.73***	.60***
Geometriebezogene Leistung		.11*	.08		.10†	.08
Allgemeine Mathematikleistung		.09†	.09*		.13*	.12*
Geschlecht (0 = m, 1 = w)		-.09*	-.11**		-.00	-.02
Skizzenpräferenz		-.05	-.03		.00	.00
Skizzenhäufigkeit			-.07†			-.05
Skizzenqualität			.12*			.20**
Abstraktionsgrad der Skizzen			-.01			.05
***R^2* =**	**.79**	**.82**	**.83**	**.75**	**.77**	**.78**
ΔR^2 =		**.04*** **	**.01***		**.03*** **	**.02***

† *p* < .10, * *p* < .05, ** *p* < .01, *** *p* < .001

Beim **Bilden des spezifischen mathematischen Modells** *sagt die* ***Skizzenqualität*** *die erfolgreiche Bewältigung des Modellierungsschrittes signifikant vorher. Im Vergleich zur Leistung beim vorherigen Modellierungsschritt (Bilden des allgemeinen mathematischen Modells) stellt die Skizzenqualität jedoch einen deutlich geringeren Prädiktor dar. Weder die* ***Skizzenhäufigkeit*** *noch der* ***Abstraktionsgrad*** *sagen die Leistung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells signifikant vorher.*

8.4.2.4 Skizzenzeichnen beim Bestimmen des mathematischen Resultats

Beim Bestimmen des mathematischen Resultats lieferte das erste Modell der Regressionsanalyse, das nur die Leistung beim vorherigen Modellierungsschritt (Bilden des spezifischen mathematischen Modells) enthielt, eine sehr hohe Varianzaufklärung von 90 % zum Thema *Satz des Pythagoras*, $F(1, 152) = 1360.56$, $p < .001$, und von 92 % zum Thema *Flächeninhalte*, $F(1, 152) = 1961.58$ $p < .001$ (Tabelle 27). Bei beiden Themen wurde durch die Hinzunahme der Kontrollvariablen in M 2 und der Skizzenvariablen in M 3 keine signifikante Steigerung der Varianzaufklärung erreicht. Die Ergebnisse verdeutlichen die hohe Vorhersagekraft der Leistung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells für die Leistung beim Bestimmen des mathematischen Resultats. Die besonders hohen Regressionskoeffizienten bestätigen das Ergebnis ($\beta = .95$, $p < .001$ bzw. $\beta = .96$, $p < .001$ in M 1).

Beim Thema *Satz des Pythagoras* stellte darüber hinaus die geometriebezogene Leistung ($\beta = .09$, $p = .016$ in M 2) einen signifikanten, aber deutlich geringeren Prädiktor dar. Beim Thema *Flächeninhalte* lag die geometriebezogene Leistung etwas unter der statistischen

Signifikanzgrenze (in M 2). Alle anderen Prädiktoren, darunter auch die Skizzenvariablen, lieferten bei beiden Themen keine Varianzaufklärung.

Die Regressionsanalysen verdeutlichen die hohe Relevanz des vorherigen Modellierungsschrittes für das Bestimmen des mathematischen Resultats. Wenn also die Lernenden die Bildung des spezifischen mathematischen Modells gut bewältigt haben, bestimmen sie mit hoher Wahrscheinlichkeit auch das korrekte mathematische Resultat. Bei beiden mathematischen Themen scheinen die Skizzenhäufigkeit, -qualität und der Abstraktionsgrad der Skizzen dagegen keine besondere Relevanz für das Errechnen des Resultats zu haben.

Tabelle 27: Standardisierte Beta-Koeffizienten der hierarchischen Regressionsanalyse zur Vorhersage der Leistung beim Berechnen des mathematischen Resultats

	Thema *Satz des Pythagoras*			Thema *Flächeninhalte*		
Prädiktoren	M 1	M 2	M 3	M 1	M 2	M 3
Leistung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells	.95***	.89***	.90***	.96***	.92***	.93***
Geometriebezogene Leistung		.09*	.09*		.06†	.06†
Allgemeine Mathematikleistung		.01	.01		.01	.01
Geschlecht (0 = m, 1 = w)		-.03	-.02		.03	.03
Skizzenpräferenz		.01	.01		-.02	-.02
Skizzenhäufigkeit			.01			.01
Skizzenqualität			-.04			-.01
Abstraktionsgrad der Skizzen			.02			.00
***R^2* =**	**.90**	**.91**	**.91**	**.92**	**.93**	**.92**
ΔR^2 =		**.01†**	**.00**		**.00**	**.00**

† *p* < .10, * *p* < .05, ** *p* < .01, *** *p* < .001

Beim **Bestimmen des mathematischen Resultats** *stellt keines der Skizzenkriterien einen signifikanten Prädiktor für die erfolgreiche Bewältigung des Modellierungsschrittes dar; weder beim Thema* Satz des Pythagoras *noch beim Thema* Flächeninhalte*.*

(2.2.) Die ***Skizzenqualität*** *selbst erstellter Skizzen von Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs steht in einem positiven Zusammenhang mit der Leistung beim Bilden des Realmodells, beim Bilden des allgemeinen und beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells; nicht aber mit der Leistung beim Bestimmen der mathematischen Lösung. Beim Bilden des Realmodells und des allgemeinen mathematischen Modells ist die Varianzaufklärung durch die Skizzenqualität beim Thema* Satz des Pythagoras *höher,*

beim Bilden des spezifischen Modells liefert die Skizzenqualität beim Thema Flächeninhalte *mehr Varianzaufklärung. Beim Bilden des Realmodells stellt die Skizzenqualität insgesamt einen besonders hohen Prädiktor dar.*

Der ***Abstraktionsgrad*** *selbst erstellter Skizzen von Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs steht im negativen Zusammenhang mit dem erfolgreichen Bilden des Realmodells, d. h. situative Skizzen gehen mit dem erfolgreichen Bilden des Realmodells einher. Dagegen steht der Abstraktionsgrad selbst erstellter Skizzen in einem positiven Zusammenhang mit dem erfolgreichen Bilden des allgemeinen mathematischen Modells beim Thema* Satz des Pythagoras*. Beim Thema* Flächeninhalte *und auch bei den darauffolgenden Modellierungsschritten liegt kein statistisch signifikanter Zusammenhang vor.*

Die ***Skizzenhäufigkeit*** *selbst erstellter Skizzen von Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs steht in keinem Zusammenhang mit der erfolgreichen Bewältigung der Teilprozesse beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben.*

8.5 Explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze

Zur Analyse der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze werden im ersten Schritt deskriptive Analysen zu dem Kriterium aus der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung vorgestellt. Erneut werden ausschließlich Ergebnisse zu dieser Gruppe berichtet, um eine Verzerrung durch die Experimentalbedingung zu vermeiden. Die Mittelwerte zur Darstellung des mathematischen Modells waren in beiden Themenbereichen ähnlich hoch (*Satz des Pythagoras* $M = 0.57$, $SD = 0.27$, *Flächeninhalte* $M = 0.59$, $SD = 0.27$). Eine inferenzstatistische Analyse mittels t-Test für verbundene Stichproben ergab, dass der Mittelwertunterschied nicht signifikant war, $t(165) = -0.85$, $p = .397$. Demnach gelang es den Schülerinnen und Schülern bei beiden geometrischen Themen ähnlich gut, das mathematische Modell beim Zeichnen einer Skizze darzustellen. Zu beachten ist dabei allerdings, dass die Mittelwerte bei beiden Themen mit ca. 0.5 – 0.6 nur etwas über dem mittleren Niveau waren. Demnach gelang es den Teilnehmenden im Durchschnitt nur bei etwas mehr als der Hälfte der Aufgaben, die sie erreichten[52], das mathematische Modell zeichnerisch darzustellen.

Eine aufgabenweise Analyse der Mittelwerte zeigte, dass die explizite Darstellung des mathematischen Modells über die Aufgaben stark variierte (Abbildung 35). Beim Thema *Satz des Pythagoras* wurde das mathematische Modell bei den Aufgaben „Rutsche“, „Bauschutt“, „Langer Löffel“ häufiger erfolgreich gezeichnet, während die Darstellung bei den Aufgaben „Technik-Masten“, „Maibaum“, „Wettschwimmen“, „Feuerwehr“ und „Umgeknickter Baum“

[52] Auch hier wurde eine Mittelwert-Score über alle Bearbeitungen gebildet, wobei alle Aufgaben, die aufgrund der begrenzten Testzeit nicht mehr erreicht wurden (d. h. alle unbearbeiteten Aufgaben, auf die keine Bearbeitung mehr folgte) unberücksichtigt blieben.

weniger gut gelang. Beim Thema *Flächeninhalte* wurde das mathematische Modell in der Skizze bei den Aufgaben „Dachfenster“, „Kreisverkehr“, „Rasensprenger“ und „Carport“ häufig korrekt gezeichnet; weniger häufig bei den Aufgaben „Ferienjob“, „Sonnensegel“, „Feuerschale“ und „Hauswand“.

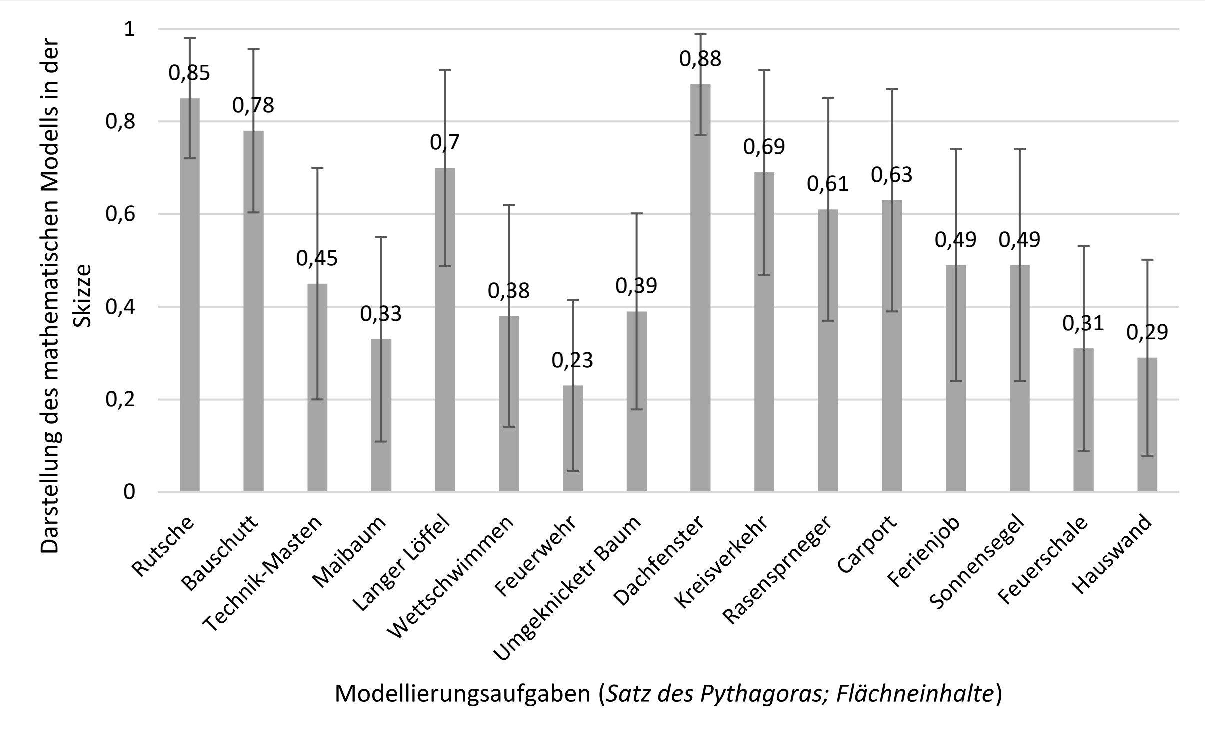


Abbildung 35: Mittelwerte und Varianzen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze geordnet nach der Reihenfolge im Testheft, aber unterteilt nach Themen (je 8 Aufgaben)

> *(3.1.) Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs gelingt es teilweise, das mathematische Modell beim Zeichnen einer Skizze zu geometrischen Modellierungsaufgaben explizit darzustellen. Hierbei gibt es keine Unterschiede zwischen den geometrischen Themen* Satz des Pythagoras *und* Flächeninhalte*. Die erfolgreiche explizite Darstellung des mathematischen Modells variiert bei beiden Themen stark je nach Aufgabe.*

8.5.1 Zusammenhang zwischen mathematischem Modell und Modellierungsleistung

Um den Zusammenhang zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und der Modellierungsleistung analysieren zu können, wurden Korrelationsanalysen in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung durchgeführt. Sowohl beim Thema *Satz des Pythagoras* (Pearsons $r = 0.72$, $p < .001$) als auch beim Thema *Flächeninhalte* (Pearsons $r = 0.77$, $p < .001$) lagen hohe signifikante Korrelationen zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und der Modellierungsleistung vor.

Das Ergebnis war insofern nicht überraschend, dass bereits eine hohe Korrelation zwischen der Skizzenqualität und der Modellierungsleistung nachgewiesen wurde – und die Darstellung des mathematischen Modells zumindest die vollständige Darstellung der Objekte und Relationen in der Regel voraussetzt. Deshalb ist vor allem interessant, ob das mathematische Modell über dieses Kriterium (Vollständigkeit der Objekte und Relationen) hinaus den Lösungserfolg erklären kann.

8.5.2 Zusammenhang der expliziten Darstellung des mathematischen Modells mit der Modellierungsleistung über die Darstellung von Objekten und Relationen hinaus

Zunächst wurde die relative Lösungshäufigkeit für die verschiedenen Kategorien der nachfolgenden Varianzanalyse deskriptiv untersucht:

- Stufe 1: Skizzen, in denen die Objekte und Relationen *un*vollständig dargestellt sind
- Stufe 2: Skizzen mit vollständigen Objekten und Relationen, aber *ohne* explizites mathematisches Modell
- Stufe 3: vollständige Skizzen, die alle Objekte und Relationen enthalten, *mit* expliziter Darstellung des mathematischen Modells

Eine Betrachtung der Anzahl der Fälle (*n*) in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung zeigte, dass es in beiden Themenbereichen Aufgaben gab, bei denen es kaum vorkam, dass die Objekte und Relationen vollständig, aber das mathematische Modell nicht explizit dargestellt wurde (Tabelle 28). In diesen Fällen waren die Häufigkeiten kaum interpretierbar. Dies trat beim Großteil der Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* auf. Einzig bei der Aufgabe „Hauswand“ gab es sechs Fälle, in denen die Objekte und Relationen vollständig, aber das mathematische Modell nicht explizit dargestellt wurde. In allen diesen Fällen wurde die Aufgabe *nicht* korrekt gelöst.

Im Themenbereich *Satz des Pythagoras* gab es häufiger den Fall, dass die Objekte und Relationen zwar vollständig gezeichnet wurden, aber das korrekte mathematische Modell in der Skizze nicht explizit erkennbar war. Vor allem bei den Aufgaben „Bauschutt“, „Technik-Masten“, „Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“ kam dies häufiger vor. Bei den Aufgaben „Technik-Masten“, „Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“ war die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Lösung (wenn die Objekte und Relationen vollständig, aber das mathematische Modell nicht explizit in der Skizze dargestellt wurden) sehr gering – und ähnlich gering, wenn die Objekte und Relationen *un*vollständig dargestellt wurden (vor allem bei den Aufgaben „Technik-Masten“, „Maibaum“, und „Feuerwehr“). Bei den Aufgaben „Bauschutt“ und „Wettschwimmen“ waren die Lösungsraten im Falle der vollständigen Darstellung der Objekte und Relationen ohne explizites mathematisches Modell deutlich höher gegenüber der unvollständigen Darstellung. Allerdings ist bei allen Aufgaben zu erkennen, dass die Lösungsraten noch einmal deutlich höher lagen, wenn das korrekte mathematische Modell in der Skizze explizit dargestellt wurde. Um diese Unterschiede auf statistische Relevanz prüfen zu können, wurden einfaktorielle Varianzanalysen durchgeführt.

Tabelle 28: Lösungsraten, Standardabweichungen und Häufigkeiten der Modellierungsaufgabenbearbeitungen für stufenweise Skizzen-Kategorien hinsichtlich der Objekte, Relationen und dem mathematischem Modell[a]

		Objekte und Relationen					
				vollständig			
				Korrektes mathematisches Modell			
		unvollständig		*nicht explizit dargestellt*		*explizit dargestellt*	
	Aufgabe	Lösungsrate (*SD*)	*n*	Lösungsrate (*SD*)	*n*	Lösungsrate (*SD*)	*n*
Thema *Satz des Pythagoras*	Rutsche	0.25 (0.45)	16	0.67 (0.58)	3	0.66 (0.48)	143
	Bauschutt	0.37 (0.50)	19	0.54 (0.52)	13	0.84 (0.36)	129
	Technik-Masten	0.08 (0.28)	25	0.09 (0.28)	58	0.83 (0.38)	75
	Maibaum	0.16 (0.37)	75	0.11 (0.32)	18	0.59 (0.50)	54
	Langer Löffel	0.13 (0.34)	23	0.50 (0.58)	4	0.56 (0.50)	113
	Wettschwimmen	0.04 (0.19)	53	0.25 (0.45)	12	0.47 (0.50)	57
	Feuerwehr	0.09 (0.28)	58	0.10 (0.32)	10	0.62 (0.49)	29
	Umgeknickter Baum	0.29 (0.47)	17	0.00 (0.00)	3	0.75 (0.44)	87
Thema *Flächeninhalte*	Dachfenster	0.63 (0.50)	16	0.00 (0.00)	1	0.86 (0.35)	147
	Kreisverkehr	0.11 (0.32)	44	0.00 (0.00)	1	0.28 (0.45)	114
	Rasensprenger	0.20 (0.41)	35	0.00 (0.00)	2	0.78 (0.41)	102
	Carport	0.10 (0.30)	50	0.00 (0.00)	1	0.64 (0.48)	104
	Ferienjob	0.09 (0.29)	56	1.00 (0.00)	1	0.85 (0.36)	79
	Sonnensegel	0.26 (0.45)	38	1.00 (0.00)	1	0.85 (0.36)	71
	Feuerschale	0.22 (0.42)	55	0.00 (0.00)	0	0.78 (0.42)	41
	Hauswand	0.20 (0.40)	51	0.00 (0.00)	6	0.52 (0.51)	23

Anmerkungen: [a] Die Kategorien lauten wie folgt: „Objekte und Relationen unvollständig“, „Objekte und Relationen vollständig, korrektes mathematisches Modell nicht explizit dargestellt“ und „Objekte und Relationen vollständig, korrektes mathematisches Modell explizit dargestellt“.

Die einfaktorielle Varianzanalyse ohne Messwiederholung zur Analyse des Zusammenhangs des mathematischen Modells in der Skizze mit der erfolgreichen Lösung der Modellierungsaufgaben erfolgte anhand der oben genannten und bereits in Kapitel 7.5.6.2 beschriebenen drei Stufen für die einzelnen Modellierungsaufgaben in der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung.[53]

[53] Da der Fokus der Fragestellung auf dem mathematischen Modell liegt, beschränkten sich die Analysen auf die Modellierungsaufgaben, die ausreichend Fälle in allen drei Skizzen-Kategorien lieferten. Für Aufgaben, bei denen weniger als 5 Fälle in einer der Kategorien vorhanden waren, wurden keine Varianzanalysen durchgeführt.

Die Varianzanalyse zur Aufgabe „Bauschutt“ ergab, dass sich die Lösungsrate statistisch signifikant für die verschiedenen Skizzen-Kategorien unterschied,[54] $F(2, 21.45) = 9.55$, $p = .001$, $\eta_p^2 = .15$. Der Games-Howell-post-hoc-Test zeigte, dass ein signifikanter Unterschied zwischen Stufe 1 und Stufe 3 vorlag (0.48, 95 %-CI[0.18, 0.77], $p = .002$). Demnach war die durchschnittliche Lösungsrate bei der Aufgabe „Bauschutt“ höher, wenn eine vollständige Skizze mit explizitem mathematischem Modell gezeichnet wurde, als wenn die Skizze unvollständig war. Zwischen den Stufen 1 und 2 sowie 2 und 3 gab es keine signifikanten Unterschiede.

Bei der Aufgabe „Technik-Masten“ zeigte die Varianzanalyse ebenfalls einen statistisch signifikanten Unterschied für die Lösungsrate je nach Kategorie, $F(2, 71.55) = 94.51$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .56$. Die Ergebnisse des Games-Howell-post-hoc-Tests zeigten einen statistisch signifikanten Unterschied von unvollständigen zu vollständigen Skizzen mit explizitem mathematischem Modell (0.75, 95 %-CI[0.58, 0.92], $p < .001$) sowie vollständigen Skizzen *ohne* zu vollständigen Skizzen *mit* explizitem mathematischem Modell (0.74, 95 %-CI[0.60, 0.88], $p < .001$). Mit ansteigender Stufe der Skizzenkategorie nahm die Lösungsrate zu. Zwischen den *un*vollständigen Skizzen und den vollständigen Skizzen *ohne* explizites mathematisches Modell gab es hinsichtlich der Lösungsrate keinen signifikanten Unterschied.

Die Varianzanalyse zur Aufgabe „Maibaum“ ergab, dass es einen signifikanten Unterschied der Lösungsrate in Abhängigkeit von den Skizzenkategorien gab $F(2, 50.57) = 16.55$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .21$. Gemäß dem Games-Howell-post-hoc-Test lag ein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Kategorien der *un*vollständigen Skizzen zu vollständigen *mit* explizitem mathematischem Modell (0.43, 95 %-CI[0.24, 0.62], $p < .001$), sowie zwischen vollständigen Skizzen *ohne* und vollständigen Skizzen *mit* explizitem mathematischem Modell (0.48, 95 %-CI[0.23, 0.73], $p < .001$) vor. Je höher die Stufe der Skizzenkategorie war, desto höher war die mittlere Lösungsrate. Zwischen den Kategorien der *un*vollständigen Skizzen und der vollständigen Skizzen *ohne* explizites mathematisches Modell gab es keinen statistisch relevanten Unterschied.

Die Ergebnisse der Varianzanalyse zur Aufgabe „Wettschwimmen“ zeigten, dass es auch hier einen signifikanten Unterschied der Lösungsrate abhängig von der Skizzenkategorie gab $F(2, 26.99) = 18.65$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .22$. Der Games-Howell-post-hoc-Test ergab, dass die Lösungsrate statistisch signifikant höher war, wenn vollständige Skizzen *mit* explizitem mathematischem Modell erstellt wurden, als wenn *un*vollständige Skizzen gezeichnet wurden (0.44, 95 %-CI[0.26, 0.61], $p < .001$). Ansonsten lagen keine statistisch relevanten Unterschiede zwischen den Kategorien vor.

Bei der Aufgabe „Feuerwehr“ ergab die Varianzanalyse erneut, dass sich die Lösungsrate in Abhängigkeit von den Skizzenkategorien statistisch signifikant unterschied, $F(2, 22.79) = 14.34$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .32$. Sowohl zwischen der Kategorie der *un*vollständigen Skizzen im Vergleich zu vollständigen Skizzen *mit* explizitem mathematischem Modell (0.53,

[54] Aufgrund der Verletzung der Varianzhomogenität werden jeweils die Ergebnisse des Welch-Tests berichtet.

95 %-CI[0.29, 0.78], $p < .001$) als auch beim Vergleich der Kategorie vollständiger Skizzen *ohne* zu denen *mit* explizitem mathematischem Modell (0.52, 95 %-CI[0.18, 0.86], $p = .002$) traten statistisch signifikante Unterschiede auf. Erneut waren die Lösungsraten umso höher, je höher die Skizzenkategorie war. Zwischen der Kategorie *un*vollständiger Skizzen und vollständiger Skizzen *ohne* explizites mathematisches Modell gab es keinen statistisch signifikanten Unterschied.

Zusammenfassung und Verknüpfung mit aufgabenspezifischen Merkmalen

Insgesamt zeigten die Varianzanalysen zum Themenbereich *Satz des Pythagoras*, dass die explizite Darstellung des mathematischen Modells bei einem Großteil der Aufgaben („Bauschutt“, „Technik-Masten“, „Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“) einen entscheidenden diskriminierenden Faktor im Hinblick auf die Lösungsrate darstellte. Während in keinem Fall ein Unterschied zwischen der Kategorie *un*vollständiger Skizzen und vollständiger Skizzen *ohne* explizites mathematisches Modell auftrat, gab es in allen Fällen statistisch relevante Unterschiede zwischen der Kategorie *un*vollständiger Skizzen und der Kategorie vollständiger Skizzen *mit* explizitem mathematischem Modell auf. Bei den Aufgaben „Technik-Masten“, „Maibaum“ und „Feuerwehr“ lag darüber hinaus ein deutlicher Unterschied hinsichtlich der Lösungsrate zwischen den Kategorien der vollständigen Skizzen *ohne* explizites mathematisches Modell und denen *mit* explizitem mathematischem Modell vor. Bei diesen Aufgaben scheint die explizite Darstellung des mathematischen Modells demnach besonders mit der erfolgreichen Bewältigung der Aufgabe zusammenzuhängen.

Bei vier der fünf Aufgaben zum *Satz des Pythagoras* („Technik-Masten“, „Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“) handelte es sich um genau die Aufgaben mit einem komplexen mathematischen Modell, bei dem durch die lösungsrelevanten Objekte nicht nur ein rechtwinkliges Dreieck gebildet wird, sondern eine weitere Komponente zu berücksichtigen ist (Anhang A). Alle übrigen Aufgaben beinhalteten ein weniger komplexes mathematisches Modell (darunter allerdings auch die Aufgabe „Bauschutt“). Eine Betrachtung der erfolgreichen Bewältigung der einzelnen Modellierungsschritte (vgl. Kapitel 8.2.2) zeigte, dass die vier Aufgaben „Technik-Masten“, „Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“ ab dem Schritt des Bildens des spezifischen mathematischen Modells die Aufgaben sind, bei denen am wenigsten korrekte Bewältigungen auftraten. Bei drei der Aufgaben („Maibaum“, „Wettschwimmen“ und „Feuerwehr“) gab es außerdem Fälle, bei denen ein häufig falsches mathematisches Modell aufgestellt wurde. Demnach scheint die explizite Darstellung des mathematischen Modells vor allem bei solchen Aufgaben im Zusammenhang mit der Modellierungsleistung zu stehen, bei denen den Lernenden das Bilden des spezifischen mathematischen Modells besonders schwerfällt. Eine Ausnahme bildet die Aufgabe „Bauschutt“, bei der in allen Modellierungsphasen die meisten korrekten Bewältigungen auftraten.

Beim Thema *Flächeninhalte* gab es nur eine Aufgabe, die Aufgabe „Hauswand“, bei der zumindest in einigen Fällen eine Skizze mit vollständigen Objekten und Relationen, aber *ohne* explizites mathematisches Modell erstellt wurde. In diesen Fällen wurde die Aufgabe stets falsch gelöst, während die Lösungsrate bei Skizzen mit vollständig dargestellten Objekten und Relationen sowie explizitem mathematischem Modell bei $M = 0.52$, und damit deutlich höher lag. Der Welch-Test konnte hier allerdings nicht durchgeführt werden, da in der mittleren Kategorie (Stufe 2) eine Varianz von Null vorlag. Bei der Aufgabe „Hauswand“ handelt es sich um die einzige Aufgabe, bei der zwei verschiedene geometrische Formen das mathematische Modell bilden. Außerdem ergaben die Analysen zur Bewältigung der einzelnen Modellierungsphasen (vgl. Kapitel 8.2.2), dass den Lernenden die erfolgreiche Bewältigung bei dieser Aufgabe in allen Phasen fast am wenigsten gut gelang (bei lediglich einer Aufgabe gab es noch weniger erfolgreiche Bewältigungen der Phasen). Demnach scheint es sich auch hier um eine Aufgabe mit besonderen Herausforderungen für die Lernenden zu handeln, bei der – zumindest tendenziell – die Darstellung des expliziten mathematischen Modells über die Darstellung der Objekte und Relationen hinaus im Zusammenhang mit der Modellierungsleistung steht.

> *(3.2.) Die explizite Darstellung des mathematischen Modells in selbst erstellten Skizzen von Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs hat nur beim Thema* Satz des Pythagoras *einen Zusammenhang mit dem Lösungserfolg beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben über die Qualitätskriterien der Darstellung der lösungsrelevanten Objekte und Relationen hinaus. Beim Thema* Flächeninhalte *ist kein Zusammenhang über die üblichen Qualitätskriterien hinaus bestimmbar, da die Kriterien hier kaum voneinander zu trennen sind.*

8.6 Einfluss der Skizzenzeichenaufforderung auf die Modellierungsleistung im Vergleich zum Skizzenverbot

Forschungsfrage (4.) befasst sich damit, welchen Einfluss die Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot auf die Modellierungsleistung hat und ob diesbezüglich Unterschiede zwischen den Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* vorliegen. Im Rahmen dieser Forschungsfrage wurde zunächst der Einfluss der Aufforderung gegenüber dem Verbot des Zeichnens einer Skizze auf die allgemeine Modellierungsleistung untersucht, aber auch der Einfluss auf die Teilprozesse des Modellierens sowie die Wirkung auf die Modellierungsleistung in verschiedenen Gruppen bezüglich der Hintergrundvariablen. Dafür wurden jeweils die Ergebnisse aus der Experimentalgruppe mit Skizzenaufforderung mit denen aus der Gruppe mit Skizzenverbot verglichen. Zusätzlich zu den Varianzanalysen werden außerdem die Ergebnisse der aufgabenweisen t-Tests berichtet, um mögliche aufgabenspezifische Wirkungen beschreiben zu können. Zur Bereinigung der Manipulation wurden – wie in Kapitel 7.5.2 beschrieben – Testpersonen aus den Untersuchungen ausgeschlossen, die trotz des Skizzenverbots bei mehr als 30 % der erreichten Testitems eine Skizze zeichneten bzw. trotz der Skizzenaufforderung bei weniger als 70 % der erreichten Bearbeitungen Skizzen zeichneten.

8.6.1 Allgemeiner Effekt der Skizzenaufforderung auf die Modellierungsleistung

Die zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung zur Prüfung der Hypothese (4.1.) zum Einfluss der Skizzenaufforderung auf die Modellierungsleistung in Abhängigkeit vom jeweiligen geometrischen Thema ergab, dass es keine statistisch signifikante Interaktion zwischen dem Thema und der Experimentalbedingung gab, $F(1, 251) = 0.21$, $p = .646$, $\eta_p^2 = .001$. Demnach bestand kein Unterschied hinsichtlich der Wirkung der Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot in Abhängigkeit vom mathematischen Thema *Satz des Pythagoras* oder *Flächeninhalte*.

Tabelle 29: Mittelwerte und Standardabweichungen der Modellierungsleistung unterteilt nach der Experimentalbedingung und dem geometrischen Thema

	Gruppe mit Skizzenverbot (*n* = 87)		Gruppe mit Skizzenaufforderung (*n* = 166)		Gesamtstichprobe (*N* = 253)	
Modellierungsleistung	*M*	(*SD*)	*M*	(*SD*)	*M*	(*SD*)
zum Thema *Satz des Pythagoras*	0.47	(0.32)	0.43	(0.31)	0.44	(0.31)
zum Thema *Flächeninhalte*	0.51	(0.31)	0.46	(0.29)	0.48	(0.29)
Beide Themen	0.49	(0.29)	0.44	(0.26)	0.46	(0.27)

Die Analyse der Haupteffekte zeigte, dass das geometrische Thema einen signifikanten Einfluss auf die Modellierungsleistung hatte, $F(1, 251) = 5.00$, $p = .026$, $\eta_p^2 = .02$. Betrachtet man die Mittelwerte (Tabelle 29), so zeigte sich, dass der Mittelwert der Modellierungsleistung zum Thema *Flächeninhalte* höher war als zum Thema *Satz des Pythagoras*. Demnach schnitten die Lernenden unabhängig von der Experimentalbedingung beim Modellieren zum Thema *Flächeninhalte* besser ab als zum Thema *Satz des Pythagoras*.

Dagegen gab es keinen Haupteffekt der Experimentalbedingung, $F(1, 251) = 1.62$, $p = .203$, $\eta_p^2 = .01$. Dies lässt darauf schließen, dass die Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, keinen Einfluss auf die allgemeine Modellierungsleistung hat.

(4.1.) Die Aufforderung zum Skizzenzeichnen hat gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, keinen Einfluss auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs.

8.6.2 Effekt der Skizzenaufforderung auf die Leistung in den Modellierungsphasen

Auch wenn die Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot keinen statistisch signifikanten Einfluss auf die allgemeine Modellierungsleistung hatte, ist es denkbar, dass es einen Einfluss auf spezifische Phasen des Modellierens gibt (Hypothese (4.2.)). Um diese Annahme zu prüfen, wurden weitere zweifaktorielle Varianzanalysen mit Messwiederholung durchgeführt, bei denen jeweils die Leistung in einer der Modellierungsphasen als abhängige Variable eingefügt wurde.

Tabelle 30: Mittelwerte und Standardabweichungen der Leistung in den Teilphasen des Modellierens unterteilt nach der Experimentalbedingung und dem geometrischen Thema

	(1) Skizzenverbot (n = 87)		(2) Skizzenaufforderung (n = 166)	
Leistung in Modellierungsteilphasen	*M*	(*SD*)	*M*	(*SD*)
Bilden des Realmodells				
zum Thema *Satz des Pythagoras*	0.70	(0.25)	0.76	(0.22)
zum Thema *Flächeninhalte*	0.77	(0.27)	0.76	(0.23)
Bilden des allgemeinen mathematischen Modells				
zum Thema *Satz des Pythagoras*	0.65	(0.34)	0.59	(0.35)
zum Thema *Flächeninhalte*	0.72	(0.28)	0.66	(0.27)
Bilden des spezifischen mathematischen Modells				
zum Thema *Satz des Pythagoras*	0.48	(0.32)	0.44	(0.31)
zum Thema *Flächeninhalte*	0.51	(0.32)	0.46	(0.29)
Bestimmen des mathematischen Resultats				
zum Thema *Satz des Pythagoras*	0.42	(0.32)	0.38	(0.31)
zum Thema *Flächeninhalte*	0.47	(0.30)	0.41	(0.26)

Beim ***Bilden des Realmodells*** ergab die Varianzanalyse einen signifikanten Interaktionseffekt des Themas und der Experimentalbedingungen auf die korrekte Ausführung des Modellierungsschrittes, $F(1, 251) = 6.29$, $p = .013$, $\eta_p^2 = .02$. Der anschließende Welch-Test zur Überprüfung des bedingten Haupteffekts der Experimentalbedingung ergab, dass es beim Thema *Satz des Pythagoras* einen signifikanten bedingten Haupteffekt der Experimentalbedingung gab, $p = .044$, während beim Thema *Flächeninhalte* kein bedingter Haupteffekt vorlag, $p = .930$. Der t-Test zum Thema *Satz des Pythagoras* zeigte, dass die Lernenden beim Bilden des Realmodells signifikant besser abschnitten, wenn sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert wurden, als wenn sie aufgefordert wurden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, $t(153.73) = -2.03$, $p = .044$. Die Modellierungsleistung war in der Gruppe mit Skizzenaufforderung durchschnittlich um 0.06 Punkte höher als in der Gruppe mit Skizzenverbot (Tabelle 30).

Zur Testung des bedingten Haupteffekts des geometrischen Themas wurden einfaktorielle Varianzanalysen mit Messwiederholung für die einzelnen Experimentalbedingungen durchgeführt. Diese ergaben, dass in der Gruppe mit Skizzenverbot ein signifikanter Effekt des Themas vorlag, $F(1, 86) = 9.05$, $p = .003$, $\eta_p^2 = .10$, während es in der Experimentalbedingung mit Skizzenaufforderung keinen signifikanten Effekt des Themas gab, $F(1, 165) = 0.02$, $p = .902$, $\eta_p^2 = .00$. Die paarweisen Vergleiche zeigten, dass die Lernenden in der Gruppe mit Skizzenverbot beim Thema *Satz des Pythagoras* schlechter abschnitten als beim Thema *Flächeninhalte*, $M_{Diff} = -0.07$, $p = .003$.

Beim darauffolgenden Modellierungsschritt, dem ***Bilden des allgemeinen mathematischen Modells***, ergab die zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung keinen signifikanten Interaktionseffekt der Experimentalbedingung und des geometrischen Themas auf die Modellierungsleistung, $F(1, 251) = 0.00$, $p = .963$, $\eta_p^2 = .00$. Das geometrische Thema hatte einen signifikanten Haupteffekt auf die Modellierungsleistung, $F(1, 251) = 11.07$, $p = .001$, $\eta_p^2 = .04$. Die Lernenden schnitten beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells unabhängig von der Experimentalbedingung beim Thema *Flächeninhalte* signifikant besser ab als beim Thema *Satz des Pythagoras*, $t(252) = -3.53$, $p < .001$. Dagegen hatte die Experimentalbedingung keinen signifikanten Haupteffekt auf die Leistung beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells, $F(1, 251) = 2.78$, $p = .097$, $\eta_p^2 = .01$.

Beim ***Bilden des spezifischen mathematischen Modells*** gab es ebenfalls keine signifikante Interaktion zwischen dem Thema und der Experimentalbedingung, $F(1, 251) = 0.22$, $p = .637$, $\eta_p^2 = .00$. Zudem hatten weder das Thema, $F(1, 251) = 2.91$, $p = .089$, $\eta_p^2 = .01$, noch die Experimentalbedingung, $F(1, 251) = 1.45$, $p = .230$, $\eta_p^2 = .01$, einen signifikanten Haupteffekt auf die Leistung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells.

Ebenfalls keine Interaktion zwischen dem Thema und der Experimentalbedingung gab es auf die Leistung beim ***Bestimmen des mathematischen Resultats***, $F(1, 251) = 0.42$, $p = .52$, $\eta_p^2 = .00$. Bei diesem Modellierungsschritt hatte allerdings das Thema einen signifikanten Haupteffekt auf die Leistung, $F(1, 251) = 4.29$, $p = .039$, $\eta_p^2 = .02$. Wie schon beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells schnitten die Teilnehmenden beim Bestimmen des mathematischen Resultats bei Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* grundsätzlich besser ab als beim Thema *Satz des Pythagoras*, $t(252) = -1.97$, $p = .050$[55]. Die Experimentalbedingung hatte keinen Haupteffekt auf die Leistung beim Bestimmen des mathematischen Resultats, $F(1, 251) = 1.81$, $p = .179$, $\eta_p^2 = .01$.

> *(4.2.) Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs bewältigen das Bilden des Realmodells beim Thema* Satz des Pythagoras *signifikant besser, wenn sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden. Beim Bilden des Realmodells zum Thema* Flächeninhalte *sowie bei allen darauffolgenden Modellierungsschritten hat es keinen Einfluss auf die erfolgreiche Bewältigung, ob Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden oder dazu aufgefordert werden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen.*

8.6.3 Aufgabenweise Analyse des Effekts der Skizzenaufforderung

Die aufgabenweisen t-Tests zur Analyse möglicher aufgabenspezifischer Unterschiede hinsichtlich der Wirkung der Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot auf die

[55] Der genaue p-Wert beträgt $p = .049871$ und liegt somit unter der Signifikanzgrenze von $p = .05$.

Modellierungsleistung zeigten, dass es mehr Aufgaben gab, bei denen die Modellierungsleistung in der Gruppe mit Skizzenverbot tendenziell höher war als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung (Tabelle 31; kursiv und hellgrau hinterlegt).

Tabelle 31: Mittelwerte und Standardabweichungen der Modellierungsleistung für die einzelnen Aufgaben sowie t-Tests bzw. Welch-Tests[56] zum Vergleich der Mittelwerte

		(1) Skizzen-verbot (n = 87)	(2) Skizzen-aufforderung (n = 166)	t-Test		
	Aufgabe	M (SD)	M (SD)	t (df)	p	d
Satz des Pythagoras	Rutsche	0.63 (0.49)	0.59 (0.49)	0.64 (251)	.520	–
	Bauschutt	0.76 (0.43)	0.73 (0.44)	0.41 (251)	.684	–
	Technik-Masten	0.46 (0.50)	0.41 (0.49)	0.76 (251)	.446	–
	Maibaum	0.35 (0.48)	0.28 (0.45)	1.12 (163.09)	.264	–
	Langer Löffel	0.45 (0.50)	0.42 (0.50)	0.45 (246)	.653	–
	Wettschwimmen*	***0.34 (0.48)***	***0.21 (0.41)***	***2.08 (147.82)***	***.040***	***0.29***
	Feuerwehr	0.11 (0.32)	0.19 (0.39)	-1.54 (177.22)	.125	–
	Umgeknickter Baum	0.66 (0.48)	0.61 (0.49)	0.57 (177)	.568	–
Flächen-inhalte	Dachfenster	0.86 (0.35)	0.82 (0.39)	0.87 (251)	.387	–
	Kreisverkehr†	***0.33 (0.47)***	***0.22 (0.42)***	***1.83 (156.69)***	***.069***	***0.25***
	Rasensprenger	0.56 (0.50)	0.53 (0.50)	0.50 (251)	.617	–
	Carport†	**0.32 (0.47)**	**0.43 (0.50)**	**-1.76 (183.56)**	**.079**	**0.23**
	Ferienjob	0.52 (0.50)	0.46 (0.50)	0.91 (241)	.362	–
	Sonnensegel	0.62 (0.49)	0.49 (0.50)	1.87 (159.24)	.130	–
	Feuerschale*	***0.48 (0.50)***	***0.33 (0.47)***	***2.13 (150.79)***	***.035***	***0.31***
	Hauswand*	***0.46 (0.50)***	***0.28 (0.45)***	***2.21 (116.77)***	***.029***	***0.38***

† $p < .10$, * $p < .05$

Beim Thema *Satz des Pythagoras* galt dies für die Aufgabe „Wettschwimmen" und beim Thema *Flächeninhalte* für die Aufgaben „Kreisverkehr", „Feuerschale" und „Hauswand". Bei der Aufgabe „Kreisverkehr" war der Unterschied allerdings nur auf dem 7 %-Niveau signifikant. Der Mittelwertunterschied war bei allen genannten Aufgaben gering (Cohens d lag zwischen 0.25 und 0.38).

Die Aufgabe „Carport" zum Themenbereich *Flächeninhalte* war die einzige Aufgabe, bei der die Teilnehmenden der Gruppe mit Skizzenaufforderung tendenziell eine bessere Leistung

[56] Bei den Aufgaben Maibaum, Wettschwimmen, Feuerwehr, Kreisverkehr, Carport, Sonnensegel, Feuerschale und Hauswand war keine Homoskedastizität gegeben, weshalb in diesen Fällen die Ergebnisse des Welch-Tests berichtet wurden.

zeigten als die der Gruppe mit Skizzenverbot, wobei diese Differenz nur auf dem 8 %-Niveau signifikant und die Effektstärke gering war (Cohens $d = 0.23$).

8.6.3.1 Satz des Pythagoras

Beim ***Bilden des Realmodells*** lagen die Mittelwerte der Gruppe mit Skizzenaufforderung bei den Aufgaben „Technik-Masten“ (Cohens $d = 0.41$, $p = .004$) und „Feuerwehr“ (Cohens $d = 0.33$, $p = .021$) signifikant über denen der Gruppe mit Skizzenverbot (Tabelle 32). Auch bei der Aufgabe „Langer Löffel“ übertraf die Gruppe mit Skizzenaufforderung die Gruppe ohne Skizzenaufforderung – allerdings war der Mittelwertunterschied hier nur auf dem 8 %-Niveau signifikant (Cohens $d = 0.24$). In allen drei Fällen handelte es sich um kleine Effekte.

Der Vorteil der Gruppe mit Skizzenaufforderung bei der Aufgabe „Feuerwehr“ kehrte sich beim ***Bilden des allgemeinen mathematischen Modells*** um – zu einem tendenziellen Vorteil der Gruppe mit Skizzenverbot. Allerdings war der Unterschied zwischen den Mittelwerten nur auf dem 10 %-Niveau signifikant und gering (Cohens $d = 0.24$).

Beim ***Bilden des spezifischen mathematischen Modells*** kehrte sich das beschriebene Verhältnis bei der Aufgabe „Feuerwehr“ erneut um. Der Mittelwert der Gruppe mit Skizzenaufforderung lag über dem der Gruppe mit Skizzenverbot – allerdings war auch diese Differenz nur auf dem 9 %-Niveau signifikant und gering (Cohens $d = 0.25$). Bei der Aufgabe „Wettschwimmen“ schnitt dagegen die Gruppe mit Skizzenverbot beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells statistisch signifikant besser ab als die Gruppe mit Skizzenaufforderung (Cohens $d = 0.29$, $p = .044$).

Dieser Vorteil der Gruppe mit Skizzenverbot bei der Aufgabe „Wettschwimmen“ zeigte sich auch im letzten Schritt – dem ***Bestimmen des mathematischen Resultats***. Der Mittelwert lag bei dieser Aufgabe in der Gruppe mit Skizzenverbot statistisch signifikant höher als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung (Cohens $d = 0.26$, $p = .029$). Bei der Aufgabe „Feuerwehr“ deutete sich ein Leistungsvorteil der Gruppe mit Skizzenaufforderung beim Bestimmen des mathematischen Resultats an, allerdings war die Mittelwertdifferenz nur auf dem 6 %-Niveau signifikant (Cohens $d = 0.20$).

Die Aufforderung zum Zeichnen einer Skizze bewirkte einen Leistungsvorteil beim Bilden des Realmodells zu den Aufgaben „Technik-Masten“, „Feuerwehr“ (und „Langer Löffel“ auf dem 10 %-Signifikanzniveau). Dabei handelte es sich um mittelschwere bzw. eine besonders schwierige Modellierungsaufgabe (vgl. Kapitel 8.2.1). Die Analysen zur Bewältigung der Modellierungsphasen (vgl. Kapitel 8.2.2.1) zeigten, dass den Lernenden das Bilden des Realmodells durch Auswahl der Basisgrößen bei der Aufgabe „Technik-Masten“ gut gelang, wohingegen die erfolgreiche Bewältigung dieser Phase bei der Aufgabe „Feuerwehr“ von allen Aufgaben zum *Satz des Pythagoras* am wenigsten gut gelang.

Tabelle 32: Mittelwerte und Standardabweichungen der Leistung in den Modellierungsphasen für die einzelnen Aufgaben zum Thema *Satz des Pythagoras* sowie t-Tests zum Vergleich der Mittelwerte

		(1) Skizzen-verbot (n = 87)	(2) Skizzen-aufforderung (n = 166)	t-Test		
	Aufgabe	*M (SD)*	*M (SD)*	*t (df)*	*p*	*d*
Bilden des Realmodells	Rutsche	0.92 (0.27)	0.92 (0.28)	0.11 (251)	.916	–
	Bauschutt	0.91 (0.29)	0.92 (0.28)	-0.20 (251)	.839	–
	Technik-Masten**	**0.76 (0.43)**	**0.91 (0.29)**	**-2.95 (127.32)**	**.004**	**0.41**
	Maibaum	0.59 (0.49)	0.65 (0.48)	-0.96 (249)	.339	–
	Langer Löffel†	0.66 (0.48)	0.77 (0.42)	-1.76 (153.99)	.081	0.24
	Wettschwimmen	0.58 (0.50)	0.56 (0.50)	0.24 (234)	.811	–
	Feuerwehr*	**0.29 (0.46)**	**0.45 (0.50)**	**-2.33 (162.70)**	**.021**	**0.33**
	Umgeknickter Baum	0.84 (0.37)	0.85 (0.36)	-0.19 (177)	.851	–
Bilden des allgemeinen mathematischen Modells	Rutsche	0.79 (0.41)	0.76 (0.43)	0.61 (251)	.542	–
	Bauschutt	0.80 (0.40)	0.76 (0.43)	0.82 (251)	.412	–
	Technik-Masten	0.54 (0.50)	0.49 (0.50)	0.79 (251)	.432	–
	Maibaum	0.67 (0.47)	0.59 (0.49)	1.26 (179.22)	.208	–
	Langer Löffel	0.54 (0.50)	0.52 (0.50)	0.39 (246)	.700	–
	Wettschwimmen	0.54 (0.50)	0.44 (0.50)	1.44 (234)	.153	–
	Feuerwehr†	*0.63 (0.49)*	*0.51 (0.50)*	*1.68 (155.52)*	*.096*	*0.24*
	Umgeknickter Baum	0.74 (0.44)	0.68 (0.47)	0.91 (177)	.363	–
Bilden des spezifischen mathematischen Modells	Rutsche	0.62 (0.49)	0.60 (0.49)	0.28 (251)	**.778**	–
	Bauschutt	0.78 (0.42)	0.74 (0.44)	0.71 (251)	.477	–
	Technik-Masten	0.46 (0.50)	0.42 (0.49)	0.67 (251)	.503	–
	Maibaum	0.36 (0.48)	0.28 (0.45)	1.20 (162.97)	.231	–
	Langer Löffel	0.46 (0.50)	0.44 (0.59)	0.35 (246)	.729	–
	Wettschwimmen*	***0.35 (0.48)***	***0.22 (0.42)***	***2.03 (149.50)***	***.044***	***0.29***
	Feuerwehr†	0.11 (0.32)	0.20 (0.40)	-1.69 (178.82)	.093	0.25
	Umgeknickter Baum	0.69 (0.47)	0.63 (0.48)	0.72 (177)	.473	–
Bestimmen des mathematischen Resultats	Rutsche	0.59 (0.50)	0.52 (0.50)	0.94 (251)	.348	–
	Bauschutt	0.68 (0.47)	0.63 (0.48)	0.72 (251)	.472	–
	Technik-Masten	0.45 (0.50)	0.37 (0.49)	1.15 (251)	.250	–
	Maibaum	0.30 (0.46)	0.27 (0.44)	0.60 (249)	.552	–
	Langer Löffel	0.44 (0.50)	0.40 (0.49)	0.46 (246)	.646	–
	Wettschwimmen*	***0.29 (0.46)***	***0.18 (0.38)***	***1.92 (145.10)***	***.029***	***0.26***
	Feuerwehr†	0.10 (0.30)	0.17 (0.38)	-1.56 (179.53)	.060	0.20
	Umgeknickter Baum	0.53 (0.50)	0.54 (0.50)	-0.17 (177)	.869	–

† $p < .10$, * $p < .05$, ** $p < .01$

Die erfolgreichen Bewältigungen zur Aufgabe „Langer Löffel“ lagen im mittleren Bereich. Auffällig ist, dass den Teilnehmenden das Bilden des allgemeinen mathematischen Modells bei allen drei Aufgaben am schwersten fiel (abgesehen von der Aufgabe „Wettschwimmen“, bei der das erfolgreiche Bilden des allgemeinen mathematischen Modells noch geringer ausfiel).Beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells und des mathematischen Resultats wirkte die Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot nachteilig auf die Leistung bei der Aufgabe „Wettschwimmen“. Probandinnen und Probanden bewältigten die genannten Modellierungsphasen bei dieser Aufgabe fast am seltensten, lediglich bei der Aufgabe „Feuerwehr“ gab es noch weniger erfolgreiche Bewältigungen in diesen Schritten. Bei der Aufgabe „Feuerwehr“ wirkte die Aufforderung gegenüber dem Verbot bei den genannten Schritten hingegen tendenziell vorteilhaft, allerdings lag das Ergebnis etwas über der Signifikanzgrenze.

8.6.3.2 Flächeninhalte

Beim ***Bilden des Realmodells*** zu Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* lagen keine statistisch signifikanten Mittelwertunterschiede vor (Tabelle 33). Beim ***Bilden des allgemeinen mathematischen Modells*** war der Mittelwert der Gruppe mit Skizzenverbot bei der Aufgabe „Feuerschale“ statistisch signifikant höher als der Mittelwert der Gruppe mit Skizzenaufforderung (Cohens d = 0.33, p = .025).

Gleiches zeigte sich beim ***Bilden des spezifischen mathematischen Modells***, wobei hier neben der Aufgabe „Feuerschale“ (Cohens d = 0.31, p = .035) auch bei der Aufgabe „Hauswand“ ein statistisch signifikanter Vorteil der Gruppe mit Skizzenverbot zu verzeichnen war (Cohens d = 0.35, p = .042). Auch bei der Aufgabe „Sonnensegel“ schnitt die Gruppe mit Skizzenverbot beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells tendenziell besser ab als die Gruppe mit Skizzenaufforderung, wobei der Wert knapp über der Signifikanzgrenze lag (Cohens d = 0.26, p = .050). Bei der Aufgabe „Carport“ lag der Mittelwert der Gruppe mit Skizzenaufforderung beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells über dem der Gruppe mit Skizzenverbot, allerdings war die Differenz ebenfalls knapp statistisch nicht signifikant und gering (Cohens d = 0.23).

Das gleiche Ergebnis zeigte sich beim ***Bestimmen des mathematischen Resultats*** für die Aufgabe „Carport“: Der Mittelwert war mit Skizzenaufforderung höher als mit Skizzenverbot (Cohens d = 0.23), lag jedoch etwas über der Signifikanzgrenze. Bei der Aufgabe „Hauswand“ war dagegen der Mittelwert der Gruppe mit Skizzenverbot beim Bestimmen des mathematischen Resultats statistisch signifikant höher als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung (Cohens d = 0.37, p = .037). Auch bei den Aufgaben „Kreisverkehr“ (Cohens d = 0.21, p = .083), „Sonnensegel“ (Cohens d = 0.26, p = .076) und „Feuerschale“ (Cohens d = 0.29, p = .052) lag der Mittelwert der Gruppe mit Skizzenverbot jeweils höher, allerdings lagen die Signifikanzwerte hier erneut etwas über der Grenze von p = .05.

Tabelle 33: Mittelwerte und Standardabweichungen der Leistung in den Modellierungsphasen für die einzelnen Aufgaben zum Thema *Flächeninhalte* sowie t-Tests zum Vergleich der Mittelwerte

		(1) Skizzen-verbot (*n* = 87)	(2) Skizzen-aufforderung (*n* = 166)	t-Test		
	Aufgabe	*M (SD)*	*M (SD)*	*t (df)*	*p*	*d*
Bilden des Realmodells	Dachfenster	0.97 (0.18)	0.98 (0.13)	-0.81 (251)	.417	–
	Kreisverkehr	0.98 (0.40)	0.80 (0.32)	-1.64 (144.97)	.104	–
	Rasensprenger	0.80 (0.46)	0.89 (0.46)	0.23 (251)	.820	–
	Carport	0.89 (0.40)	0.71 (0.37)	-0.78 (251)	.437	–
	Ferienjob	0.71 (0.42)	0.70 (0.45)	1.00 (176.86)	.319	–
	Sonnensegel	0.70 (0.45)	0.80 (0.48)	1.26 (164.81)	.211	–
	Feuerschale	0.80 (0.48)	0.84 (0.49)	0.36 (208)	.716	–
	Hauswand	0.84 (0.48)	0.77 (0.50)	1.56 (127.85)	.121	–
Bilden des allgemeinen mathematischen Modells	Dachfenster	0.89 (0.32)	0.85 (0.36)	0.78 (251)	.437	–
	Kreisverkehr	0.76 (0.43)	0.71 (0.46)	0.81 (251)	.420	–
	Rasensprenger	0.64 (0.48)	0.62 (0.49)	0.36 (251)	.359	–
	Carport	0.90 (0.31)	0.89 (0.32)	0.26 (251)	.396	–
	Ferienjob	0.81 (0.40)	0.72 (0.45)	1.57 (185.69)	.118	–
	Sonnensegel	0.64 (0.48)	0.53 (0.50)	1.57 (160.04)	.119	–
	Feuerschale*	***0.51 (0.50)***	***0.35 (0.48)***	***2.27 (152.07)***	***.025***	***0.33***
	Hauswand	0.58 (0.50)	0.48 (0.50)	1.18 (137)	.241	–
Bilden des spezifischen mathematischen Modells	Dachfenster	0.86 (0.35)	0.83 (0.38)	0.75 (251)	**.453**	–
	Kreisverkehr	0.33 (0.47)	0.23 (0.43)	1.62 (159.06)	.106	–
	Rasensprenger	0.59 (0.50)	0.54 (0.50)	0.76 (251)	.449	–
	Carport†	0.32 (0.47)	0.43 (0.50)	-1.67 (183.28)	.097	0.23
	Ferienjob	0.49 (0.50)	0.46 (0.50)	0.557 (241)	.578	–
	Sonnensegel†	*0.62 (0.49)*	*0.49 (0.50)*	*1.97 (159.20)*	*.050*	*0.26*
	Feuerschale*	***0.48 (0.50)***	***0.33 (0.47)***	***2.13 (150.79)***	***.035***	***0.31***
	Hauswand*	***0.46 (0.50)***	***0.29 (0.46)***	***2.05 (117.82)***	***.042***	***0.35***
Bestimmen des mathematischen Resultats	Dachfenster	0.84 (0.37)	0.82 (0.39)	0.39 (251)	.694	–
	Kreisverkehr†	*0.29 (0.46)*	*0.20 (0.41)*	*1.42 (157.93)*	*.083*	*0.21*
	Rasensprenger	0.54 (0.50)	0.49 (0.50)	0.70 (251)	.486	–
	Carport†	0.32 (0.47)	0.43 (0.50)	-1.67 (183.28)	.097	0.23
	Ferienjob	0.47 (0.50)	0.38 (0.49)	1.32 (161.76)	.189	–
	Sonnensegel†	*0.60 (0.49)*	*0.47 (0.50)*	*1.79 (157.39)*	*.076*	*0.26*
	Feuerschale†	*0.43 (0.50)*	*0.29 (0.46)*	*1.96 (147.89)*	*.052*	*0.29*
	Hauswand*	***0.41 (0.50)***	***0.24 (0.43)***	***2.11 (114.09)***	***.037***	***0.37***

† $p < .10$, * $p < .05$

Demnach hatte die Skizzenaufforderung im Themenbereich *Flächeninhalte* nur bei der Aufgabe „Carport“ beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells sowie beim Bestimmen der mathematischen Lösung tendenziell einen leistungsförderlichen Effekt – allerdings lässt das Signifikanzniveau keine sicheren Schlussfolgerungen zu. Dabei handelte es sich um eine Aufgabe mit mittlerer Lösungsrate (vgl. Kapitel 8.2.1). Die Analyse der Bewältigung der einzelnen Modellierungsphasen zeigte, dass das Bilden des spezifischen mathematischen Modells sowie die Berechnung des mathematischen Resultats bei dieser Aufgabe ebenfalls im mittleren Bereich lag (vgl. Kapitel 8.2.2). Auffällig ist allerdings, dass bei dieser Aufgabe besonders häufig ein typisch falsches spezifisches Modell aufgestellt wurde (bei dem der 1m-Rand um den Carport jeweils nur für eine der zwei gegenüberliegenden Seiten im Rechteck berücksichtigt wurde) bzw. die entsprechende Lösung dazu berechnet wurde.

Bei den Aufgaben „Feuerschale“, „Hauswand“ (und tendenziell auch bei der Aufgabe „Sonnensegel“ und „Kreisverkehr“) hatte die Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot einen nachteiligen Effekt, der sich vor allem beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells sowie beim Bestimmen des mathematischen Resultats zeigte. Drei der Aufgaben waren besonders schwierig (mit geringer Lösungsrate), die Aufgabe „Sonnensegel“ dagegen eher leicht (vgl. Kapitel 8.2.1). Eine Betrachtung der einzelnen Modellierungsphasen zeigte, dass den Lernenden die genannten Modellierungsschritte (das Bilden des spezifischen mathematischen Modells und das Bestimmen des Resultats) bei den Aufgaben „Feuerschale“ und „Hauswand“ mit am schwersten fiel – nur bei der Aufgabe „Kreisverkehr“, bei der sich der Effekt ebenfalls andeutete, fielen die erfolgreichen Bewältigungen noch geringer aus (vgl. Kapitel 8.2.2).

Zusammenfassung und Verknüpfung mit aufgabenspezifischen Merkmalen

Im Themenbereich *Satz des Pythagoras* deuten die Ergebnisse der aufgabenweisen Mittelwertvergleiche darauf hin, dass die Skizzenaufforderung dabei unterstützend wirken kann, das Realmodell zu einer gegebenen Modellierungssituation aufzustellen. Dies scheint vor allem auf Aufgaben zuzutreffen, die ein für die Lernenden anspruchsvolles mathematisches Modell beinhalten. Beim Thema *Flächeninhalte* konnte dies nicht gezeigt werden. Bei jeweils einer einzelnen Aufgabe aus beiden Themenbereichen (*Satz des Pythagoras*: Aufgabe „Feuerwehr“, *Flächeninhalte*: Aufgabe „Carport“) war die Skizzenaufforderung tendenziell auch in den darauffolgenden Phasen – beim Bilden des allgemeinen bzw. spezifischen mathematischen Modells und beim Bestimmen des mathematischen Resultats – wirksam. Dabei handelte es sich in beiden Fällen um Aufgaben, bei denen häufig ein typisch falsches mathematisches Modell gebildet wurde. Allerdings lässt die mangelnde statistische Signifikanz keine sicheren Schlussfolgerungen über die Effekte zu.

Vor allem bei der Aufgabe „Wettschwimmen“ aus dem Themenbereich *Satz des Pythagoras* und den Aufgaben „Feuerschale“ und „Hauswand“ zum Thema *Flächeninhalte* war in einigen Phasen ein Vorteil der Gruppe mit Skizzenverbot gegenüber der Gruppe mit Skizzenaufforderung zu verzeichnen – insbesondere beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells und beim Bestimmen des mathematischen Resultats. Demnach scheint die Skizzenaufforderung hier keine leistungsförderliche, sondern vielmehr eine nachteilige Wirkung gehabt zu haben. Es handelt sich um Aufgaben, bei denen den Lernenden die Bewältigung der genannten Modellierungsphasen mit am schwersten fiel.

8.6.4 Effekte in Abhängigkeit der Hintergrundvariablen

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der zweifaktoriellen Varianzanalysen ohne Messwiederholung vorgestellt, die dazu dienen, die Hypothesen (4.1.) bis (4.5.) zum Einfluss der Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot auf die Modellierungsleistung in bestimmten Gruppen der Hintergrundvariablen zu prüfen. Zuvor erfolgt ein deskriptiver Vergleich der Mittelwerte. Durch die Unterteilung der Probandinnen und Probanden in Gruppen anhand der Hintergrundvariablen ergaben sich unterschiedliche Gruppengrößen. Diese können – ebenso wie die Werte der Standardabweichungen – in den Tabellen in Anhang J eingesehen werden.

8.6.4.1 Allgemeine Mathematikleistung

Es gab kaum Teilnehmende, die der Gruppe mit der geringsten allgemeinen Mathematikleistung angehörten (1 von 6 Pkt.). Ansonsten wiesen die mittleren Leistungsgruppen (insbesondere 3 und 4 Pkt.) die größten Gruppengrößen auf und die Gruppen mit den extremeren Leistungswerten (2 bzw. 5 und 6 Pkt.) hatten geringere Größen.

Beim *Satz des Pythagoras* wiesen Lernende mit geringeren Leistungswerten (Leistungsgruppen 2 und 3) mit Skizzenaufforderung durchschnittlich höhere Mittelwerte auf als mit Skizzenverbot (Abbildung 36). In den Gruppen mit höherer allgemeiner Mathematikleistung (4 und 5) lagen die Mittelwerte der Modellierungsleistung dagegen in der Gruppe mit Skizzenverbot über denen der Gruppe mit Skizzenaufforderung. Allerdings lag der Mittelwert der Gruppe mit der höchsten Mathematikleistung (6) in der Gruppe mit Skizzenaufforderung über dem der Gruppe mit Skizzenverbot. Die Standardabweichungen waren bei den mittleren Mathematikleistungsgruppen am höchsten und nahmen – analog zu den Gruppengrößen – zu den Extremwerten hin ab (Tabelle 40, Anhang J).

Die Interaktion zwischen der Experimentalbedingung und der allgemeinen Mathematikleistung auf die Modellierungsleistung war nicht signifikant, $F(4, 225) = 1.92$, $p = .109$, $\eta_p^2 = .03$. Während die Experimentalbedingung keinen signifikanten Haupteffekt auf die Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* hatte, $F(1, 225) = 0.27$, $p = .603$, $\eta_p^2 = .00$, unterschied sich die Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* signifikant je nach allgemeinem mathematischem Leistungsniveau, $F(17, 225) = 25.17$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .36$.[57]

[57] Da die Haupteffekte bereits aus vorherigen Analysen bekannt bzw. abzuleiten sind, werden diese nicht näher erläutert. Dies gilt ebenso für die nachfolgenden Varianzanalysen in den Kapiteln 8.6.4.2 – 8.6.4.6. In Kapitel 8.1.2 wurden bereits die Zusammenhänge zwischen den Hintergrundvariablen und der Modellierungsleistung

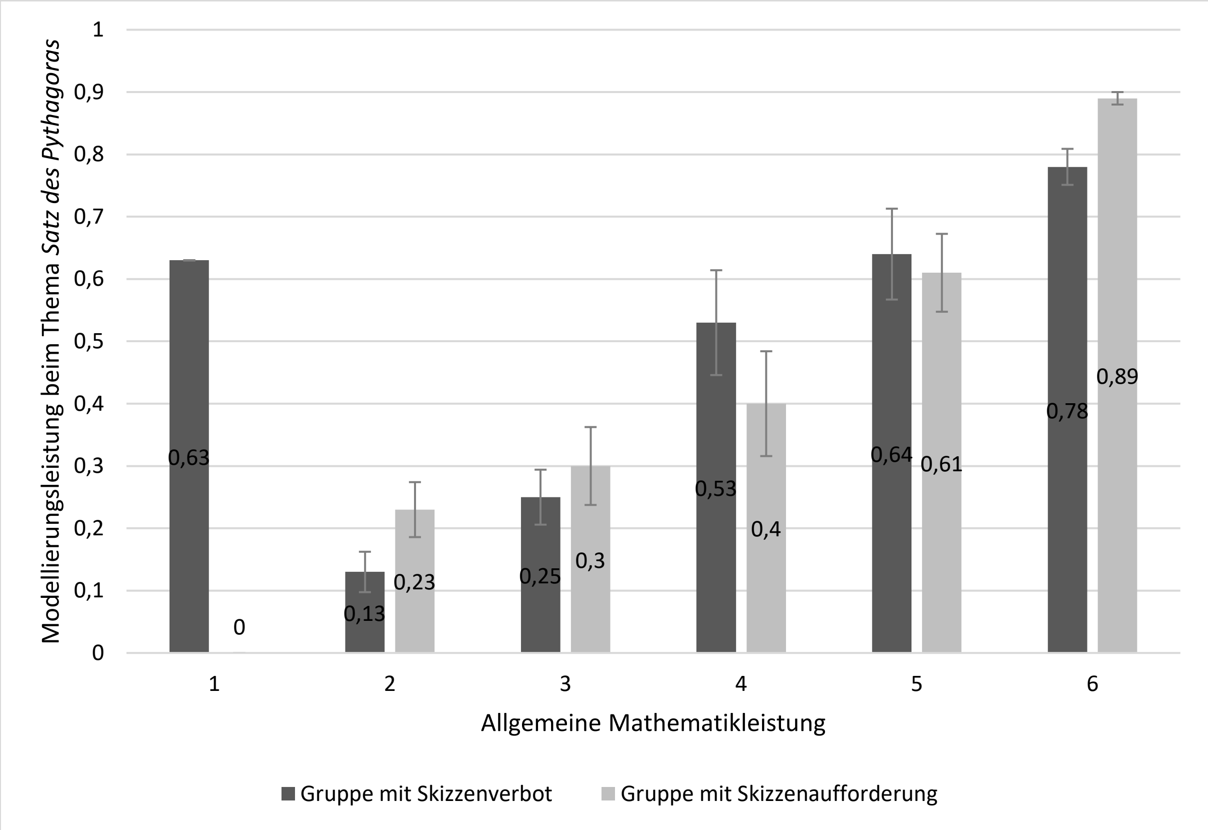


Abbildung 36: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras* für einzelne Gruppen der allgemeinen Mathematikleistung (*Anmerkung*: *M* für allgemeine Mathematikleistung = 1 nicht repräsentativ, da hier *n* = 1)

Bei der Modellierungsleistung zum Thema *Flächeninhalte* waren die Mittelwerte bei besonders geringer Mathematikleistung (2) sowie höchster Mathematikleistung (6) in der Gruppe mit Skizzenaufforderung höher als in der Gruppe mit Skizzenverbot (Abbildung 37). Die Standardabweichungen waren bei diesen Gruppen eher gering. In den Gruppen mittlerer Mathematikleistung (3, 4 und 5) lagen die Mittelwerte der Modellierungsleistung in der Gruppe mit Skizzenverbot über denen der Gruppe mit Skizzenaufforderung. Bei diesen Gruppen war die Standardabweichung vergleichsweise hoch.

Es lag keine statistisch signifikante Interaktion zwischen der Experimentalbedingung und der allgemeinen Mathematikleistung vor, $F(4, 225) = 1.51$, $p = .200$, $\eta_p^2 = .03$. Die Experimentalbedingung hatte keinen signifikanten Haupteffekt auf die Modellierungsleistung beim Thema *Flächeninhalte*, $F(1, 225) = 0.01$, $p = .937$, $\eta_p^2 = .00$. Dagegen war der Haupteffekt der allgemeinen Mathematikleistung auf die Modellierungsleistung statistisch signifikant, $F(5, 225) = 25.70$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .36$.

beschrieben und in Kapitel 8.6.1 wurde die Modellierungsleistung zwischen den Experimentalbedingungen verglichen.

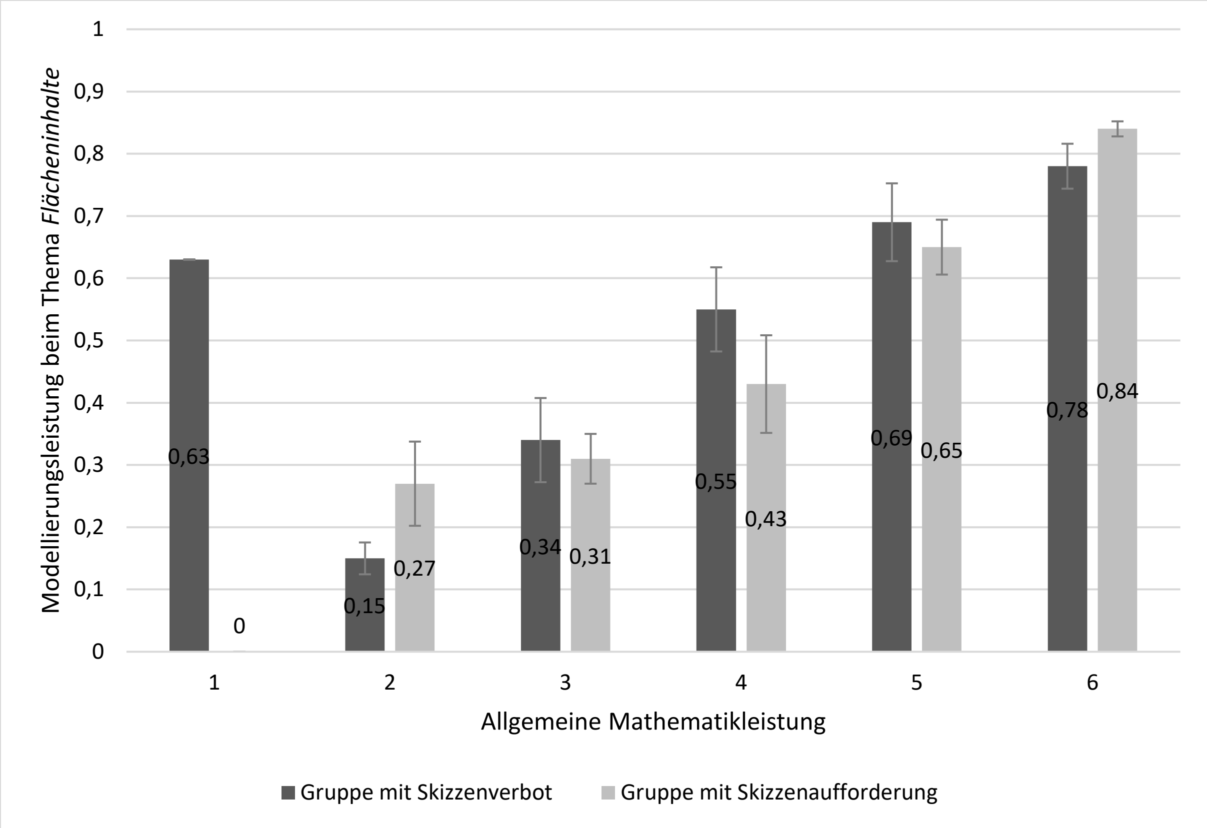


Abbildung 37: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Flächeninhalte* für einzelne Gruppen der allgemeinen Mathematikleistung (*Anmerkung*: *M* für allgemeine Mathematikleistung = 1 nicht repräsentativ, da hier *n* = 1)

(4.3.) In Abhängigkeit der allgemeinen Mathematikleistung gibt es keinen Einfluss der Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs

8.6.4.2 Geometriebezogene Leistung

Die Gruppengrößen durch die Unterteilung anhand der geometriebezogenen Leistung waren innerhalb der Experimentalbedingungen ähnlich, wobei die geringste (0) und die höchste Gruppe (8) nur wenige Teilnehmende umfassten (Tabelle 42, Anhang J).

Anhand der grafischen Darstellung der Mittelwerte in Abbildung 38 ist der Trend zu erkennen, dass die Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras* bei geringer geometriebezogener Leistung (0, 1, 2 und 3) in der Gruppe mit Skizzenaufforderung höher war als in der Gruppe mit Skizzenverbot. Bei höheren Werten der geometriebezogenen Leistung (4, 5, 6, 7 und 8) waren die Mittelwerte der Modellierungsleistung in der Gruppe mit Skizzenaufforderung geringer als die der Gruppe mit Skizzenverbot. Die Standardabweichung war bei den mittleren Werten tendenziell größer als bei den Extremwerten.

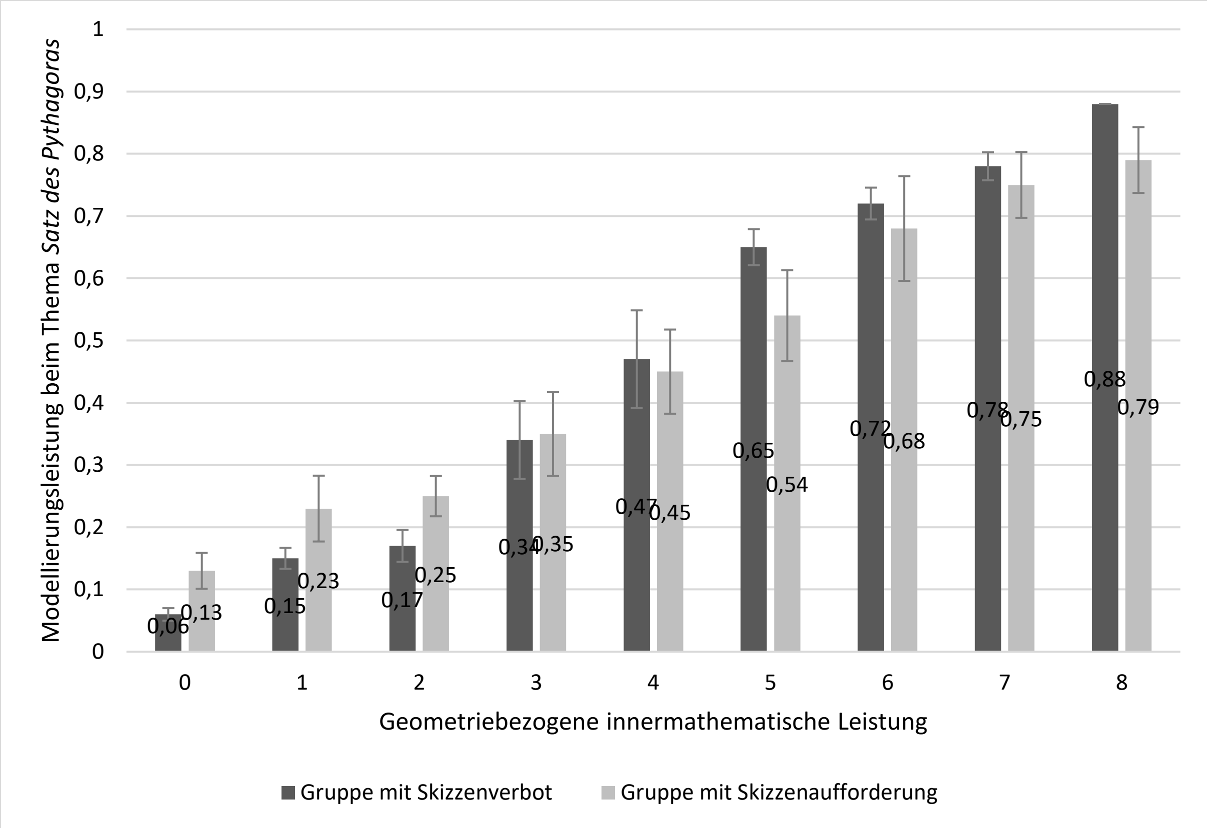


Abbildung 38: Mittelwerte und Varianz der Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras*

Die zweifaktorielle Varianzanalyse ergab, dass dennoch keine statistisch signifikante Interaktion zwischen Experimentalbedingung und geometriebezogener Leistung vorlag, $F(8, 235) = 0.63$, $p = .754$, $\eta_p^2 = .02$. Die Tendenz, die sich bei der Analyse der Mittelwerte andeutete, konnte also durch die inferenzstatistischen Analysen nicht validiert werden. Die Experimentalbedingung hatte keinen Haupteffekt auf die Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras*, $F(1, 235) = 0.04$, $p = .847$, $\eta_p^2 = .00$, während es aber einen Haupteffekt der geometriebezogenen Leistung auf die Modellierungsleistung gab, $F(8, 235) = 29.62$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .50$.

Beim Thema *Flächeninhalte* ist anhand der Mittelwerte (Abbildung 39) wie auch beim *Satz des Pythagoras* der Trend erkennbar, dass in den unteren Leistungsgruppen der geometriebezogenen Leistung Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe mit Skizzenaufforderung besser beim Modellieren abschnitten als Lernende aus der Gruppe mit Skizzenverbot (allerdings nur in den Gruppen 0 und 1). Bei mittleren und höheren Ausprägungen der geometriebezogenen Leistung (2 – 8) lagen die Werte der Modellierungsleistung in der Gruppe mit Skizzenaufforderung höher als in der Gruppe mit Skizzenverbot. Erneut lagen die höchsten Standardabweichungen bei den mittleren Leistungsgruppen vor.

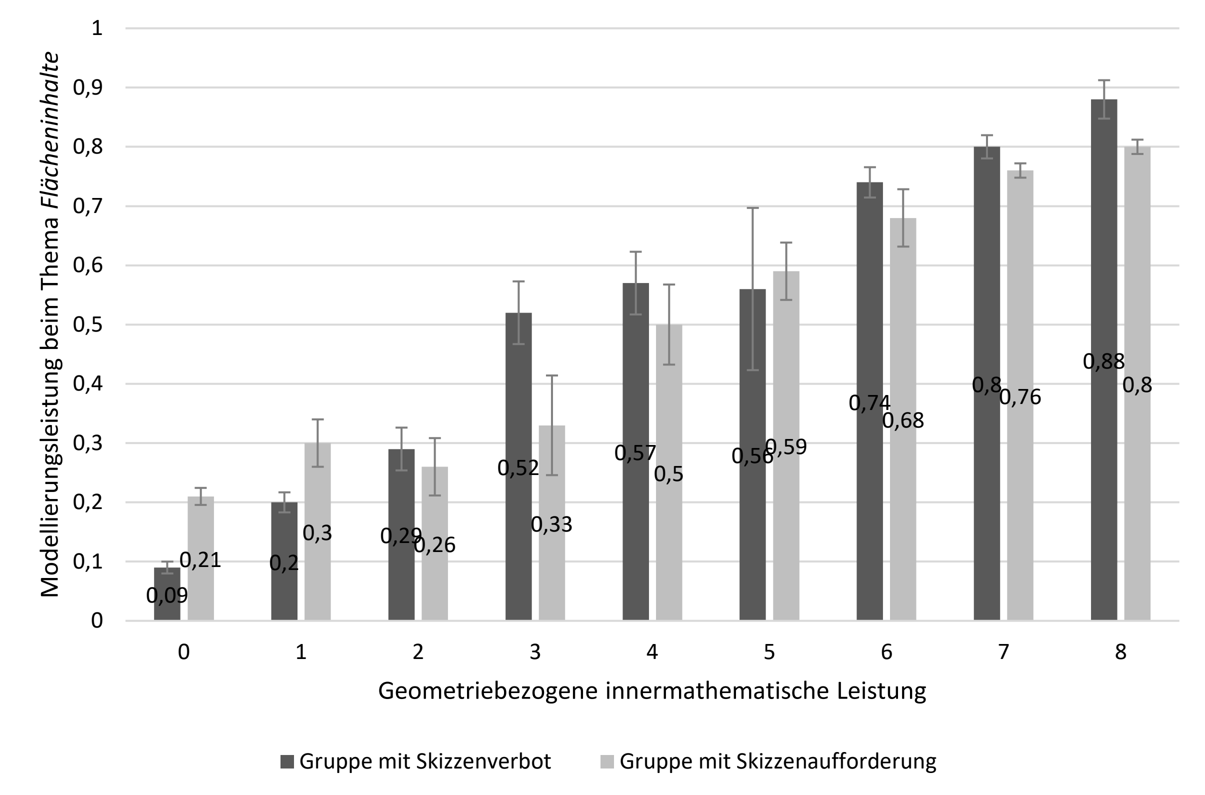


Abbildung 39: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Flächeninhalte* für einzelne Gruppen der geometriebezogenen Leistung

Auch beim Thema *Flächeninhalte* ergab die zweifaktorielle Varianzanalyse jedoch keine statistisch signifikante Interaktion zwischen der Experimentalbedingung und der geometriebezogenen Leistung, $F(8, 235) = 1.10$, $p = .363$, $\eta_p^2 = .04$. Die Experimentalbedingung hatte keinen Haupteffekt auf die Modellierungsleistung, $F(1, 235) = 0.38$, $p = .537$, $\eta_p^2 = .00$. Hingehen war der Haupteffekt der geometriebezogenen Leistung signifikant, $F(8, 235) = 25.22$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .46$.

8.6.4.3 Geometriebezogene Leistung – 2 Gruppen

Da die Tendenzen, die sich anhand der deskriptiven Mittelwertanalysen im vorherigen Kapitel ergaben, durch die Varianzanalysen nicht bestätigt werden konnten (wenn die Gruppen für alle neun Leitungsscore-Stufen einzeln gebildet wurden), wurde eine weitere Leistungsunterteilung in zwei Gruppen vorgenommen: in (1.) leistungsschwache Lernende (Score 0 – 2) sowie (2.) Lernende des mittleren und hohen Leistungsniveaus (Score 3 – 8). Mit dieser Einteilung wurden erneut zweifaktorielle Varianzanalysen durchgeführt.

Die Analyse zum Thema *Satz des Pythagoras* ergab einen statistisch signifikanten Interaktionseffekt der geometriebezogenen Leistung und der Experimentalgruppe auf die Modellierungsleistung, $F(1, 249) = 5.37$, $p = .021$, $\eta_p^2 = .02$. Dabei handelte es sich nach Cohen um einen kleinen Effekt.

Die paarweisen Vergleiche der post-hoc-Tests (Tabelle 44, Anhang J) ergaben, dass in der Gruppe der leistungsschwachen Lernenden kein signifikanter Unterschied der

Modellierungsleistung je nach Experimentalbedingung vorlag, $M_{\text{Diff}} = -0.08$, $p = .196$. In der Gruppe des mittleren bis hohen Leistungsniveaus war die Modellierungsleistung dagegen in der Gruppe mit Skizzenverbot signifikant höher als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung, $M_{\text{Diff}} = 0.09$, $p = .031$. Demnach zeichnet sich die Tendenz ab, dass leistungsstärkere Lernende eine höhere Modellierungsleistung aufweisen, wenn sie aufgefordert werden, Aufgaben *ohne* Skizze zu lösen, während es bei Leistungsschwächeren keinen Unterschied macht, ob sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden oder nicht.

Beim Thema *Flächeninhalte* gab es ebenfalls einen statistisch signifikanten Interaktionseffekt der geometriebezogenen Leistung und der Experimentalbedingung, $F(1, 249) = 4.99$, $p = .026$, $\eta_p^2 = .02$. Die paarweisen Vergleiche zeigten (Tabelle 45, Anhang J), dass in der Gruppe mit geringer geometriebezogener Leistung ein moderater, signifikanter Unterschied zwischen den Experimentalbedingungen vorlag, $t(84) = -1.19$, $p = .042$, $d = .61$. In der Gruppe mit geringer geometriebezogener Leistung war die Modellierungsleistung demnach signifikant höher, wenn die Lernenden zum Skizzenzeichnen aufgefordert wurden, als wenn sie aufgefordert wurden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen. In der Gruppe der mittleren bis hohen geometriebezogenen Leistung bestand ein geringer, signifikanter Unterschied der Modellierungsleistung zwischen den Experimentalbedingungen, $t(165) = 2.34$, $p = .021$, $d = 0.39$. Die Lernenden in der Gruppe des mittleren bis hohen geometriebezogenen Leistungsniveaus wiesen in der Bedingung mit Skizzenverbot eine geringfügig höhere Modellierungsleistung auf als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung.

Sowohl beim Thema *Satz des Pythagoras* als auch beim Thema *Flächeninhalte* deuten die Ergebnisse darauf hin, dass Lernende des mittleren und hohen Leistungsniveaus eine höhere Modellierungsleistung erzielen, wenn sie *keine* Skizze bei der Bearbeitung von Aufgaben zeichnen. Bei den leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern zeigt sich die Tendenz, dass die Lernenden davon profitieren, wenn sie eine Skizze zu Modellierungsaufgaben erstellen bzw. zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden. Während sich diese Tendenz beim Thema *Satz des Pythagoras* nur deskriptiv durch Analyse der Mittelwerte andeutete, konnte diese beim Thema *Flächeninhalte* statistisch nachgewiesen werden.

*(4.4.) Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs mit **geringer geometriebezogener Leistung** können geometrische Modellierungsaufgaben zum Thema* Flächeninhalte *erfolgreicher lösen, wenn sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden, als wenn sie dazu aufgefordert werden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen. Beim Thema* Satz des Pythagoras *deutet sich dies lediglich als Tendenz an.*

*Schülerinnen und Schüler mit **mittlerer bis hoher geometriebezogener Leistung** können geometrische Modellierungsaufgaben erfolgreicher lösen, wenn sie dazu aufgefordert werden, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, als wenn sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden.*

8.6.4.4 Skizzenpräferenz

Nur wenige Teilnehmende gaben eine geringe Skizzenpräferenz an (Gruppen 1 und 2) (Tabelle 46, Anhang J). Besonders viele Teilnehmende wiesen eine eher hoher Skizzenpräferenz auf (Gruppen 4 und 5), während in der Gruppe mit höchster Skizzenpräferenz (6) und der Gruppe mit eher geringerer Skizzenpräferenz (3) wiederum etwas weniger Probandinnen und Probanden vorhanden waren. Die Standardabweichung ist in allen Gruppen mit etwa 0.3 ähnlich.

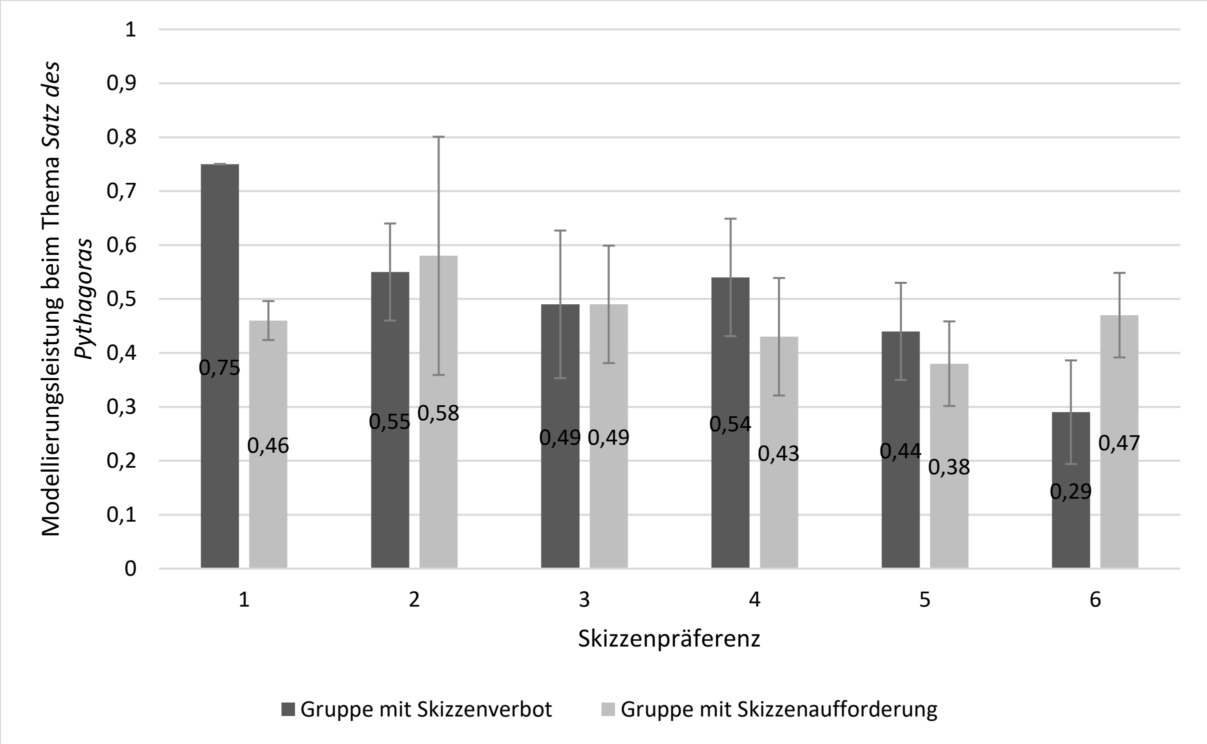


Abbildung 40: Mittelwerte und Varianz der Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras* für einzelne Gruppen der Skizzenpräferenz

Der Vergleich der mittleren Modellierungsleistung in den Experimentalgruppen unterteilt nach der Skizzenpräferenz (Abbildung 40) zeigte, dass in einer Gruppe mit sehr geringer Skizzenpräferenz (2) und in der Gruppe mit der höchsten Skizzenpräferenz (6) die Schülerinnen und Schüler der Gruppe mit Skizzenaufforderung beim Modellieren zum Thema *Satz des Pythagoras* durchschnittlich besser abschnitten als die Teilnehmenden der Gruppe mit Skizzenverbot. In Gruppe 3 waren die Mittelwerte in beiden Gruppen gleich hoch. Und in den Gruppen mit eher höherer Skizzenpräferenz (4 und 5) lagen die Mittelwerte in der Gruppe mit Skizzenverbot im Mittel höher als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung.

Die inferenzstatistischen Analysen zeigten, dass kein Interaktionseffekt zwischen der Skizzenpräferenz und der Experimentalbedingung vorlag, $F(5, 241) = 0.96$, $p = .441$, $\eta_p^2 = .02$. Demzufolge gab es keinen Effekt der Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot auf die Modellierungsleistung in Abhängigkeit von der Skizzenpräferenz. Außerdem gab es weder einen Haupteffekt der Experimentalbedingung, $F(1, 241) = 0.31$, $p = .582$, $\eta_p^2 = .00$, noch einen Haupteffekt der Skizzenpräferenz, $F(5, 241) = 1.32$, $p = .256$, $\eta_p^2 = .03$, auf die Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras*.

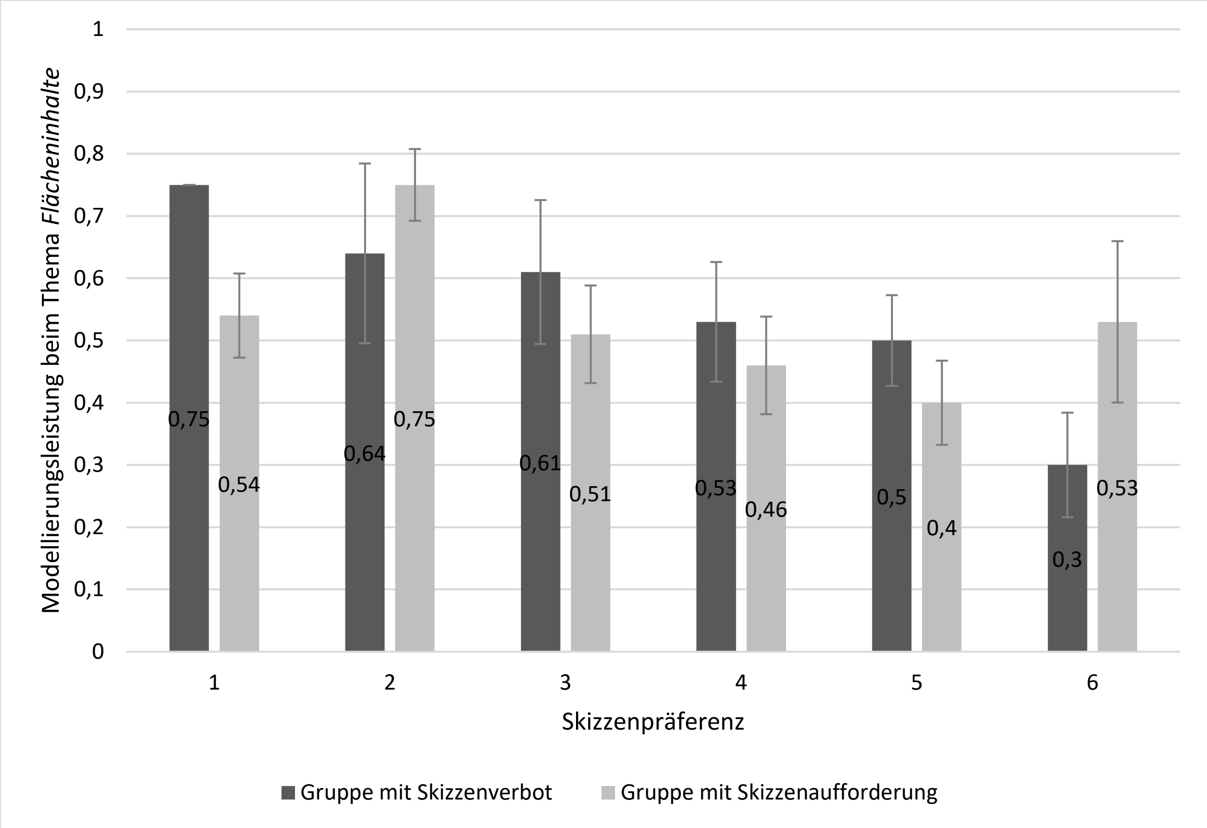


Abbildung 41: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Flächeninhalte* für einzelne Gruppen der Skizzenpräferenz

Beim Thema *Flächeninhalte* ergab sich beim deskriptiven Vergleich der Mittelwerte zwischen den Experimentalbedingungen unterteilt nach der Skizzenpräferenz ein ähnliches Bild wie beim Thema *Satz des Pythagoras* (Abbildung 41): In der Gruppe mit relativ niedriger Skizzenpräferenz (2) und der Gruppe mit höchster Skizzenpräferenz (6) lag der Mittelwert mit Skizzenaufforderung über dem mit Skizzenverbot. In den Gruppen mit mittlerer Skizzenpräferenz war die Tendenz umgekehrt: Teilnehmende der Gruppe mit Skizzenverbot schnitten im Mittel besser ab als Teilnehmende der Gruppe mit Skizzenaufforderung.

Es gab keinen Interaktionseffekt zwischen der Skizzenpräferenz und dem Treatment, $F(5, 241) = 1.69$, $p = .138$, $\eta_p^2 = .03$, und demnach keinen Effekt der Experimentalbedingung in Abhängigkeit der Skizzenpräferenz auf die Modellierungsleistung beim Thema *Flächeninhalte*. Während die Experimentalbedingung keinen Haupteffekt auf die Modellierungsleistung hatte, $F(1, 241) = 0.10$, $p = .750$, $\eta_p^2 = .00$, hatte die Skizzenpräferenz einen – wenn auch geringen – Haupteffekt, $F(5, 241) = 2.67$, $p = .023$, $\eta_p^2 = .05$.

(4.5.) In Abhängigkeit der Skizzenpräferenz gibt es keinen Einfluss der Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs.

8.6.4.5 Geschlecht

Beim Vergleich der Mittelwerte und Standardabweichungen zwischen den Experimentalbedingungen unterteilt nach dem Geschlecht war keine Tendenz zu erkennen: Sowohl bei den Mädchen als auch bei den Jungen war die Modellierungsleistung in der Gruppe mit Skizzenverbot etwas höher (M_{Diff} = 0.03 bzw. 0.02 Punkte) als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung (Abbildung 42). Die Standardabweichungen waren in allen Teilgruppen ähnlich mit Werten um 0.31.

Die zweifaktorielle Varianzanalyse ergab, dass die Interaktion zwischen Treatment und Geschlecht nicht signifikant war, $F(1, 240) = 0.01$, $p = .923$, $\eta_p^2 = .00$. Demnach gab es keinen geschlechterabhängigen Einfluss der Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot auf die Modellierungsleistung. Die Testbedingung hatte keinen Haupteffekt auf die Modellierungsleistung, $F(1, 240) = 0.43$, $p = .511$, $\eta_p^2 = .00$, wohingegen das Geschlecht insofern einen statistisch signifikanten Effekt auf die Modellierungsleistung hatte, dass die Jungen durchschnittlich besser abschnitten als die Mädchen, $F(5, 240) = 7.69$, $p = .006$, $\eta_p^2 = .03$.

Beim Thema *Flächeninhalte* ist bei den Jungen der Mittelwert der Modellierungsleistung in der Gruppe mit Skizzenverbot um 0.12 höher als in der Gruppe mit Skizzenaufforderung, während die Mittelwerte bei den Mädchen in beiden Gruppen gleich waren (Abbildung 43).

Bei der zweifaktoriellen Varianzanalyse lag keine Interaktion zwischen dem Geschlecht und der Testbedingung vor, $F(1, 240) = 2.37$, $p = .125$, $\eta_p^2 = .01$, die darauf hingedeutet hätte, dass es einen geschlechterbedingten Einfluss des Treatments gab. Es gab weder einen Haupteffekt der Testbedingung, $F(1, 240) = 2.06$, $p = .152$, $\eta_p^2 = .01$, noch einen Haupteffekt des Geschlechts, $F(1, 240) = 0.97$, $p = .325$, $\eta_p^2 = .00$.

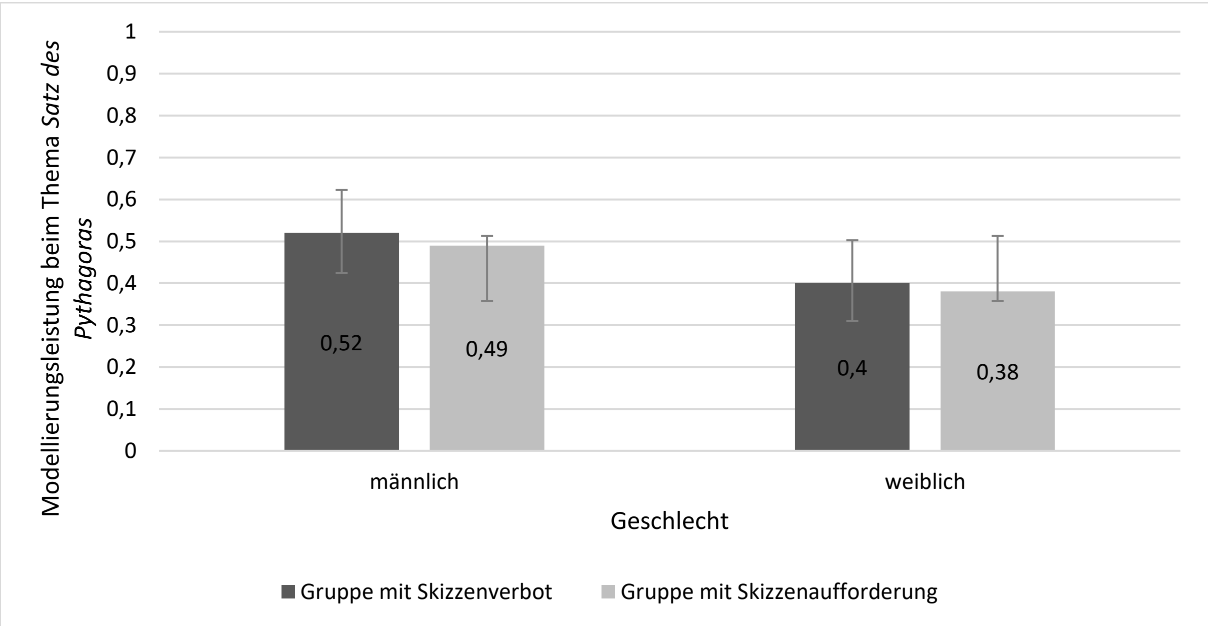


Abbildung 42: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras* für Geschlechter-Gruppen

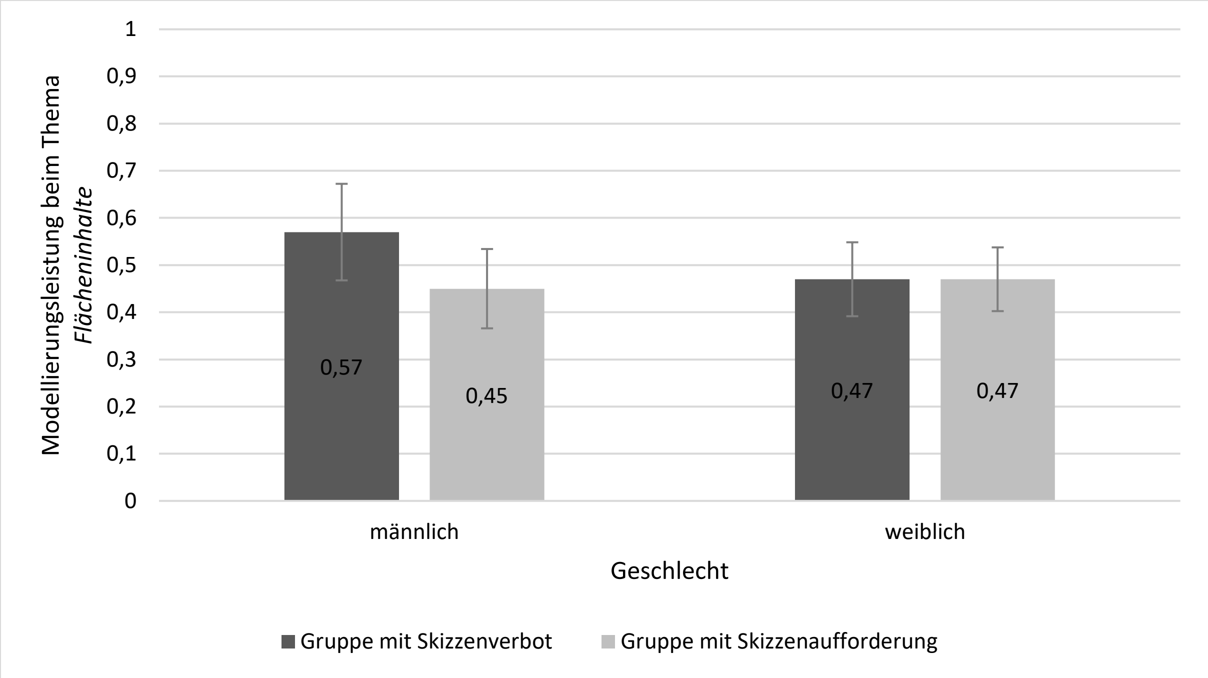


Abbildung 43: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Flächeninhalte* für Geschlechter-Gruppen

(4.6.) In Abhängigkeit des Geschlechts gibt es keinen Einfluss der Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs

8.6.4.6 Jahrgang

Um den Einfluss der Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot in Abhängigkeit des Jahrgangs untersuchen zu können, wurde die Stichprobe auf Lernende des Realschulniveaus eingeschränkt. Da in Jahrgang zehn Schülerinnen und Schüler des gymnasialen und des Realschulniveaus an der Studie teilnahmen, während in Jahrgang neun nur Lernende des Realschulniveaus beteiligt waren, wäre sonst eine Verzerrung durch das Leistungsniveau aufgetreten.

Die Gruppen waren innerhalb der Experimentalbedingungen zwischen den Jahrgängen verglichen ähnlich groß (Tabelle 50; Anhang J). Durch das Untersuchungsdesign bedingt waren in den Gruppen mit Skizzenaufforderung jeweils ungefähr doppelt so viele Teilnehmende wie in den Gruppen mit Skizzenverbot. Die Standardabweichungen waren über alle Gruppen mit ca. 0.30 ähnlich.

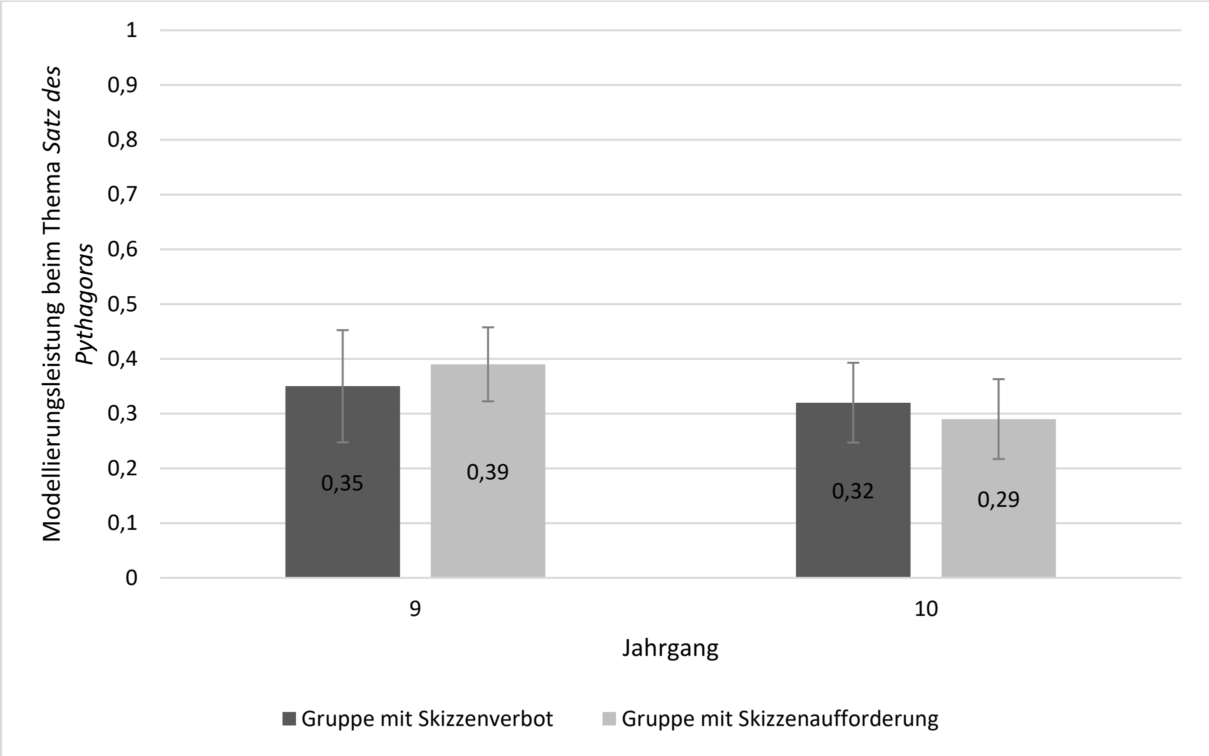


Abbildung 44: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Satz des Pythagoras* unterteilt nach Jahrgängen 9 und 10

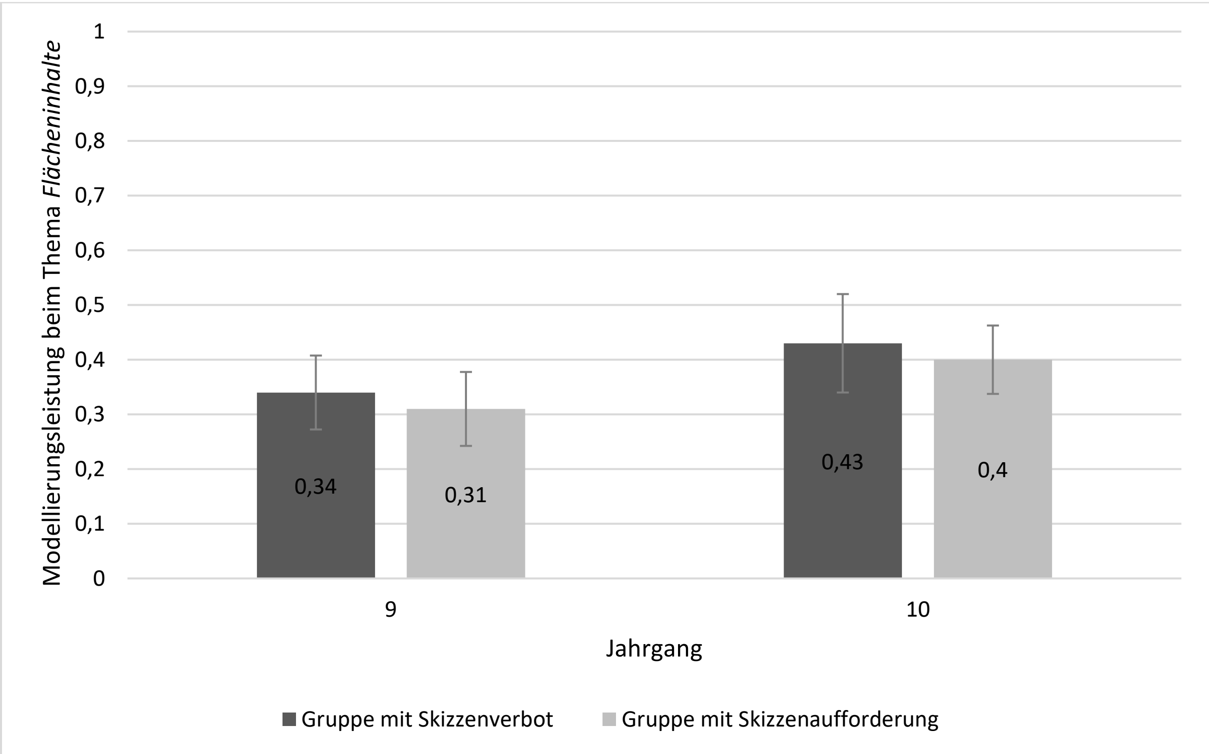


Abbildung 45: Mittelwerte und Varianzen der Modellierungsleistung beim Thema *Flächeninhalte* unterteilt nach Jahrgängen 9 und 10

In Jahrgang neun schnitten Lernende der Gruppe mit Skizzenaufforderung bei den Modellierungsaufgaben zum Thema *Satz des Pythagoras* im Mittel besser ab als die der Gruppe mit Skizzenverbot (Abbildung 44). In Jahrgang zehn kehrte sich diese Tendenz um. Die zweifaktorielle Varianzanalyse ergab, dass keine signifikante Interaktion zwischen Experimentalbedingung und Jahrgang vorlag, $F(1, 125) = 0.57$, $p = .451$, $\eta_p^2 = .01$. Demnach gab es keinen jahrgangsabhängigen Einfluss des Treatments auf die Modellierungsleistung zum Thema *Satz des Pythagoras.* Weder die Testbedingung, $F(1, 125) = 0.03$, $p = .869$, $\eta_p^2 = .00$, noch der Jahrgang, $F(1, 125) = 1.77$, $p = .186$, $\eta_p^2 = .01$, hatten einen signifikanten Haupteffekt auf die Modellierungsleistung.

Beim Thema *Flächeninhalte* lagen die Mittelwerte der Modellierungsleistung in beiden Jahrgängen in der Gruppe mit Skizzenverbot im Mittel etwas über denen der Gruppe mit Skizzenaufforderung ($M_{Diff} = 0.03$) (Abbildung 45). Die inferenzstatistische Analyse zeigte, dass keine signifikante Interaktion zwischen den Faktoren vorlag, $F(1, 125) = 0.00$, $p = .987$, $\eta_p^2 = .00$. Demzufolge ist auch bei diesem mathematischen Thema nicht von einem jahrgangsbedingten Einfluss der Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot auf die Modellierungsleistung auszugehen. Es gab zudem keinen signifikanten Haupteffekt der Testbedingung, $F(1, 125) = 0.29$, $p = .591$, $\eta_p^2 = .00$, sowie keinen Haupteffekt des Jahrgangs, $F(1, 125) = 3.39$, $p = .068$, $\eta_p^2 = .03$.

(4.7.) In Abhängigkeit des Jahrgangs gibt es keinen Einfluss der Aufforderung zum Skizzenzeichnen gegenüber der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf die erfolgreiche Lösung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs

9 Diskussion

In der vorliegenden Studie wurde die Anwendung des Skizzenzeichnens als Lösungsstrategie beim geometrischen Modellieren durch Lernende des neunten und zehnten Jahrgangs, der Zusammenhang des Skizzenzeichnens mit der Modellierungsleistung, die Wirkung der Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot sowie der Einfluss sekundärer Bedingungsfaktoren untersucht. Die Ergebnisse wurden jeweils zwischen den geometrischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* verglichen, um die Generalisierbarkeit der Erkenntnisse zu prüfen. Die Analyse der Skizzennutzung bestätigte einerseits bisherige Befunde und lieferte andererseits neue Erkenntnisse darüber, wie sich die Umsetzung zwischen verschiedenen geometrischen Themen unterscheiden kann. Neue, quantitativ fundierte Einblicke lieferten die Zusammenhangsanalysen zwischen dem Skizzenzeichnen und der Modellierungsleistung, insbesondere zu den Fragen, inwieweit der Abstraktionsgrad der Skizzen beim geometrischen Modellieren eine Rolle spielt und in welchen Phasen des Modellierens das Skizzenzeichnen besonders wirksam sein kann. Darüber hinaus konnten bisherige Erkenntnisse zum Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Modellierungsleistung bestätigt werden. Überraschend war der ausbleibende Effekt der Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot, für den verschiedene Erklärungsansätze diskutiert werden. Bei den sekundären Merkmalen erwies sich vor allem die geometriebezogene Leistung als relevanter Faktor. Die statistischen Vergleiche zwischen den geometrischen Themen Sat*z des Pythagoras* und *Flächeninhalte* wiesen viele Gemeinsamkeiten auf, die als Anhaltspunkte für Generalisierungen dienen können, aber es zeigten sich auch einige Differenzen, die in nachfolgenden Forschungen, wissenschaftlichen Theorien sowie in der unterrichtlichen Praxis zu berücksichtigen sind. Diese Ergebnisse (Kapitel 9.1) und die sich daraus ergebenden Implikationen (Kapitel 9.3) werden in den folgenden Kapiteln diskutiert, wobei auch die Grenzen und Einschränkungen der Studie kritisch reflektiert werden (Kapitel 9.2).

9.1 Diskussion der empirischen Befunde

Im folgenden Kapitel werden die empirischen Ergebnisse der quantitativen Analysen vor dem Hintergrund des bestehenden Forschungsstandes beleuchtet und eingebettet. Dabei folgt der Aufbau des Kapitels der Reihenfolge der vier übergeordneten Forschungsfragen (vgl. Kapitel 5). Die Diskussion des Zusammenhangs zwischen dem Skizzenzeichnens und der Bewältigung der einzelnen Modellierungsphasen erweist sich außerdem als so umfangreich, dass hierfür ein zusätzlicher Abschnitt (9.1.3) eingeschoben wird.

9.1.1 Häufigkeit, Qualität und Abstraktionsgrad der Skizzen

Die erste zentrale Forschungsfrage der vorliegenden Arbeit bestand darin, *mit welcher Häufigkeit, Qualität und welchem Abstraktionsgrad Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Jahrgangs Skizzen zu geometrischen Modellierungsaufgaben zeichnen, wenn sie dazu aufgefordert werden.* Die Ergebnisse zeigten, dass die Lernenden besonders häufig (zu etwa 87 %

der erreichten Bearbeitungen) Skizzen erstellten (vgl. Kapitel 8.3.1). In vorherigen Studien war die Skizzenhäufigkeit dagegen meist deutlich geringer als in der vorliegenden Studie und es wurde vielmehr von einem Mangel an Skizzennutzung bzw. Umsetzung der Skizzenaufforderung berichtet (De Bock et al., 2003; Uesaka & Manalo, 2011a). Während das Skizzenzeichen in anderen Studien häufig freigestellt war, wurden die Lernenden in der vorliegenden Untersuchung gezielt zum Skizzenzeichnen aufgefordert. Demnach liefert die vorliegende Studie quantitative Belege für die Annahme aus vorherigen Studien (z. B. Rellensmann et al., 2022), dass die Aufforderung zum Skizzenzeichnen beim mathematischen Modellieren zu geometrischen Themen einen großen Beitrag dazu leisten kann, dem in der Praxis häufig auftretenden Mangel an Skizzennutzung entgegenzusteuern.

Eine weitere Besonderheit der vorliegenden Studie ist der geometrische Bezug der Aufgaben, der die hohe Häufigkeit gezeichneter Skizzen erklären könnte. R. Hall, Kibler, Wenger und Truxaw (1989, S. 258) hatten in ihrer Studie festgestellt, dass Lernende bei der Bearbeitung von Aufgaben, die räumliche Entfernungen betreffen, deutlich häufiger Diagramme verwenden als bei nicht-räumlichen Problemstellungen. Auch wenn die vorliegende Studie keinen Vergleich zu nicht-räumlichen Modellierungssituationen ermöglicht, legt die hohe Häufigkeit des Skizzenzeichnens nahe, dass der räumliche Bezug der Aufgaben die Verwendung von Diagrammen bzw. Skizzen tatsächlich erleichtern könnte.

Die Teilnehmenden nutzten die Strategie des Skizzenzeichnens vor allem dann, wenn die gegebenen Modellierungssituationen verhältnismäßig viele lösungsrelevante Zahlenwerte enthielten und die Bildung einer komplexen mathematischen Formel erforderten. Bei sehr einfachen Realsituationen mit nur wenigen Objekten, aber auch bei besonders abstrakten Situationsbeschreibungen wurden dagegen weniger Skizzen erstellt. Vorherige Studien hatten gezeigt, dass die Strategie des Skizzenzeichnens bei komplexen und verständnisintensiven Aufgaben wirksamer ist als bei einfachen Wiedererkennungsaufgaben (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 501; Mayer & Gallini, 1990, S. 725; Schmidgall et al., 2019, S. 139; Van Meter, 2001, S. 129). Vor diesem Hintergrund deutet das Ergebnis darauf hin, dass die Lernenden – möglicherweise intuitiv, da es nicht gezielt eingeübt wurde – einschätzen können, bei welchen Aufgaben das Zeichnen einer Skizze weniger hilfreich ist und dementsprechend bei diesen Aufgaben weniger Skizzen erstellen, während sie gleichzeitig verstärkt Skizzen zeichnen, wenn es sich um mathematisch anspruchsvolle Aufgaben mit vielen zu verarbeitenden Zahlenwerten handelt. Gleichzeitig werden aber offenbar weniger Skizzen erstellt, wenn die Aufgabenstellung zu abstrakt ist und die Übersetzung in ein visuelles Format besonders schwierig ist.

Die von den Teilnehmenden in der vorliegenden Studie gezeichneten Skizzen waren von mittlerer bis hoher Qualität (vgl. Kapitel 8.3.2). In früheren Studien hat sich gezeigt, dass die Lernenden Schwierigkeiten haben, gute Skizzen zu mathematischen Aufgaben zu erstellen (z. B. Diezmann, 2002; Van Meter & Garner, 2005). Auch wenn die durchschnittlichen Werte der Skizzenqualität in der vorliegenden Studie Potenzial für Verbesserung bieten, liegen sie mit dem Mittelwert von 1.4 (von max. 2 Pkt.) zumindest deutlich über der Hälfte. Demnach scheint die Skizzenaufforderung im Rahmen des geometrischen Modellierens dazu geeignet zu sein, das Zeichnen von Skizzen etwas über mittlerer Qualität zu initiieren. Gleichzeitig verdeutlicht die verbleibende Differenz zur maximalen Skizzenqualität, dass auch im Bereich der Geometrie noch Verbesserungspotenzial besteht, das z. B. durch ein Zeichentraining ausgeschöpft werden könnte (Ayabe, Manalo, & Hanaki, 2020; Hembree, 1992; Uesaka & Manalo, 2006; Willis & Fuson, 1988).

Beim Zeichnen der Skizzen gelingt den Schülerinnen und Schülern am häufigsten die korrekte Darstellung der Objekte in der Skizze, an zweiter Stelle steht die korrekte Beschriftung mit lösungsrelevanten Zahlenwerten und am wenigsten gut gelingt ihnen die korrekte Darstellung der relevanten Relationen in der Skizze (vgl. Kapitel 8.3.2.2). Bei der Konzeption eines Trainings zum Skizzenzeichnen sowie in der Praxis des Mathematikunterrichts ist daher zu berücksichtigen, dass die Darstellung der verschiedenen Kriterien den Lernenden beim Skizzenzeichnen unterschiedlich starke Schwierigkeiten bereitet. Während die Darstellung der Objekte häufig eigenständig gelingt, brauchen die Lernenden mehr Unterstützung bei der Beschriftung mit relevanten Zahlenwerten – vor allem beim Thema *Satz des Pythagoras* – sowie bei der Darstellung der Relationen bei beiden geometrischen Themen.

Vollkommen neue Erkenntnisse liefert die vorliegende Studie hinsichtlich der Themenspezifität der Skizzenqualität: Die Skizzenqualität war beim Thema *Satz des Pythagoras* deutlich höher als beim Thema *Flächeninhalte*, was vor allem auf Vorteile bei der Darstellung der lösungsrelevanten Objekte und der lösungsrelevanten Relationen zurückzuführen ist. Ein Erklärungsansatz besteht darin, dass das Thema *Satz des Pythagoras* ein besonders prototypisches Thema für den Einsatz dieser Strategie darstellt (vgl. Kapitel 3.5.2). Daher sind die Lernenden möglicherweise besonders geübt im eigenständigen Erstellen von Skizzen zu *Satz des Pythagoras*-Aufgaben. Die korrekte Zuordnung von lösungsrelevanten Zahlenwerten gelingt dagegen in beiden Themenbereichen ähnlich gut. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass das Erstellen einer guten Skizze keine universal umsetzbare Strategie darstellt, die zu einem Thema erlernt und intuitiv auf weitere Themen übertragen werden kann, vielmehr muss die Strategie des Skizzenzeichnens im Zusammenhang mit verschiedenen (geometrischen) Themen eingeübt und angewendet werden.

Die Schülerinnen und Schüler zeichneten in der vorliegenden Studie sehr häufig schematische Skizzen, während nur selten situative Skizzen erstellt wurden (Mittelwert des Abstraktionsgrades $M = 0.90$ von max. 1 Punkt) (vgl. Kapitel 8.3.3). Hingegen wurden in vorherigen Studien häufiger Situationsskizzen oder zumindest ähnlich häufig Situationsskizzen und schematische Skizzen erstellt (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Pantziara et al., 2009; z. B. Van Garderen & Montague, 2003). Bei der Thematisierung des *Satzes des Pythagoras* wird in der schulischen Praxis das Erstellen von schematischen Planfiguren eingeübt (Herling, Kuhlmann, Scheele, & Wilke, 2016, S. 93). Möglicherweise führt das dazu, dass die Lernenden zu diesem Thema häufig schematische Skizzen anfertigen. Die Studie von Rellensmann et al. (2022), die ausschließlich Modellierungsaufgaben zum *Satz des Pythagoras* enthielt, ergab jedoch, dass situative Skizzen etwas häufiger als schematische Skizzen angefertigt wurden. Möglicherweise ist die Diskrepanz des vorliegenden Forschungsergebnisses auf Unterschiede beim Scoring zurückzuführen. Während in der vorliegenden Studie die Scores 0 (Mehrheit bzw. Hälfte der Objekte situativ dargestellt) und 1 (Mehrheit der Objekte schematisch dargestellt) vergeben wurden, gab es in der Studie von Rellensmann et al. (2022) einen abgestuften Score, bei dem die Anzahl der situativ dargestellten Objekte durch die Gesamtanzahl geteilt wurde. Möglicherweise hat in der vorliegenden Studie aber auch die große Anzahl von Aufgaben bewirkt, dass die Lernenden die Situation schneller vereinfacht darstellen konnten und deshalb direkt schematische Skizzen erstellten.

Der Abstraktionsgrad der Skizzen zum Thema *Flächeninhalte* war – wenn auch nur geringfügig – signifikant höher als der Abstraktionsgrad der Skizzen zum Thema *Satz des Pythagoras*. Demnach fiel es den Lernenden etwas leichter, schematische Skizzen zum Thema *Flächeninhalte* als zum Thema *Satz des Pythagoras* zu erstellen. Dies könnte dadurch bedingt sein, dass im Gegensatz zum Thema *Satz des Pythagoras* weniger unterschiedliche Objekte miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen, um das mathematische Modell zu bilden. Vielmehr bilden die Objekte im Wesentlichen bereits selbst das mathematische Modell in Form von geometrischen Figuren, sodass diese schneller vereinfacht und schematisch dargestellt werden können.

9.1.2 Skizzenzeichnen und der Lösungserfolg beim Modellieren

Die zweite große Forschungsfrage, die der Studie zugrunde lag, lautete: *Inwiefern besteht ein Zusammenhang zwischen der Skizzenhäufigkeit, der Skizzenqualität und dem Abstraktionsgrad der Skizzen mit dem Lösungserfolg bzw. der erfolgreichen Bewältigung der Teilprozesse beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben?* Aufgrund des Umfangs der Ergebnisse zu dieser Forschungsfrage wird der erste Teil der Frage zum Zusammenhang mit dem allgemeinen Lösungserfolg in diesem Kapitel behandelt, während der zweite Teil zum Zusammenhang mit der Bewältigung der Teilprozesse im nachfolgenden Kapitel diskutiert wird.

Die Ergebnisse der Analysen zeigten, dass bei beiden geometrischen Themen ein besonders hoher Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und der allgemeinen Modellierungsleistung besteht. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit den Ergebnissen zahlreicher Studien (Bräuer et al., 2021; Rellensmann et al., 2022; Schnotz & Bannert, 2003; Schwamborn et al., 2010; Stern et al., 2003; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter, 2001), die gezeigt haben, dass das Anfertigen qualitativ hochwertiger Skizzen mit einem zunehmenden Lösungserfolg einhergeht. Die vorliegende Studie zeigt erneut, dass die Qualität einer Skizze die erfolgreiche Bewältigung einer Modellierungsaufgabe maßgeblich vorhersagt. Interessant ist, dass die Vorhersagekraft der Skizzenqualität sogar die der geometriebezogenen Leistung übertraf (vgl. Kapitel 8.4.1). Während die geometriebezogenen Leistungen unumstritten als Grundlage zur Bewältigung geometrischer Modellierungsprozesse dienen, scheint das Anfertigen hochwertiger Skizzen als Strategie großes Potenzial zu bieten, die erfolgreiche Bewältigung zu unterstützen. Auch wenn aus den Ergebnissen keine sicheren Schlussfolgerungen über die Wirkrichtung gezogen werden können, liefern sie Hinweise auf den hohen Stellenwert des

Skizzenzeichnens beim mathematischen Modellieren und unterstützen damit die Annahme des *prognostischen Zeicheneffekts* (Schmidgall et al., 2019, S. 139; Schwamborn et al., 2010, S. 872). Die hohe Vorhersagekraft der Skizzenqualität spricht dafür, dass das Zeichnen einer hochwertigen Skizze eine positive Wirkung auf die Bewältigung geometrischer Modellierungsaufgaben haben könnte. Vor diesem Hintergrund scheint einhergehend mit dem Ergebnis der Metastudie von Hembree (1992, S. 263) ein Training zum Erstellen hochwertiger Skizzen besonders vielversprechend, um durch eine Optimierung der Skizzenqualität eine Verbesserung der Modellierungsleistung zu erreichen.

Dagegen scheint es keinen Zusammenhang zwischen der Häufigkeit gezeichneter Skizzen – nach der Aufforderung zum Skizzenzeichnen – und der erfolgreichen Bewältigung geometrischer Modellierungsaufgaben zu geben. Demnach bringt das bloße Erstellen einer Skizze keinen Vorteil für Lernende, um geometrische Modellierungsaufgaben erfolgreicher bearbeiten zu können, wenn die Lernenden zum Skizzenzeichnen aufgefordert werden. Dieses Ergebnis geht einher mit der empirisch basierten Annahme, dass das Generieren an sich keinen positiven Effekt auf die Bewältigung von Problemstellungen hat, sondern vielmehr Kapazitäten für die externe Konstruktion gebunden werden, die dann nicht für die interne Konstruktion des mentalen Modells zur Verfügung stehen (Schmidgall, 2017, S. 57; Schwamborn et al., 2010). Aufgrund des fehlenden Zusammenhangs zwischen der Skizzenhäufigkeit und der Modellierungsleistung liefert auch die vorliegende Studie Anhaltspunkte dafür, dass ein *generativer Zeicheneffekt* beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben unwahrscheinlich ist. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es sich um die Skizzenhäufigkeit *nach der Aufforderung* zum Skizzenzeichnen handelt. Daher sind keine Rückschlüsse darüber möglich, inwieweit ein Zusammenhang zwischen dem spontanen Zeichnen von Skizzen und der Modellierungsleistung besteht. Zudem war die Skizzenhäufigkeit in der vorliegenden Studie besonders hoch, sodass Deckeneffekte die Analyse erschwert haben könnten.

Beim Thema *Satz des Pythagoras* deutete sich ein geringfügiger positiver Zusammenhang zwischen dem Abstraktionsgrad selbst erstellter Skizzen und der Modellierungsleistung an, während beim Thema *Flächeninhalte* kein Zusammenhang auftrat (vgl. Kapitel 8.4.1). Beim Themenbereich *Satz des Pythagoras* scheint demnach ein zunehmender Abstraktionsgrad der Skizzen tendenziell mit der erfolgreicheren Bewältigung geometrischer Modellierungsaufgaben einherzugehen. Dieses Ergebnis bestätigt die Erkenntnis aus vorherigen Studien, dass schematische Skizzen für das Lösen mathematischer Problemstellungen hilfreicher sind als situative Skizzen und verdeutlicht damit erneut die hohe Relevanz von Abstraktion und Schematisierung in der Mathematik (R. Cox, 1999; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Schnotz, 2014; Schnotz & Bannert, 2003; Van Garderen & Montague, 2003). Gleichzeitig zeigt die Studie aber die Grenzen des Zusammenhangs auf und konkretisiert die bisherigen Erkenntnisse zum Abstraktionsgrad, da der Zusammenhang in der vorliegenden Studie nur beim Thema *Satz des Pythagoras* und nicht beim Thema *Flächeninhalte* auftritt. Möglicherweise hat der Abstraktionsgrad je nach mathematischem Thema eine unterschiedliche Relevanz beim erfolgreichen Bewältigen von Modellierungsprozessen. Allerdings fällt auf, dass gerade zum Thema

Flächeninhalte in der durchgeführten Untersuchung besonders viele abstrakte Skizzen erstellt wurden. Deshalb könnte der mangelnde Zusammenhang auch Deckeneffekten geschuldet sein.

9.1.3 Skizzenzeichnen und die Bewältigung der Modellierungsteilprozesse

Betrachtet man die Leistung in den einzelnen Modellierungsteilprozessen, so ergab die vorliegende Studie, dass in allen Teilprozessen die Skizzenqualität einen hohen Zusammenhang mit der jeweiligen Leistung aufweist, außer beim Bestimmen des mathematischen Resultats (vgl. Kapitel 8.4.2). Weder das bloße Zeichnen einer Skizze noch die Skizzenqualität oder der Abstraktionsgrad der Skizzen scheinen im Zusammenhang damit zu stehen, dass das mathematische Resultat zu einer Modellierungsaufgabe erfolgreich berechnet wird. Vor dem Hintergrund der kognitionspsychologischen Analysen und der bisherigen empirischen Erkenntnisse zu möglichen Wirkungsweisen des Skizzenzeichnens bei Lösungsprozessen ist dieses Ergebnis plausibel: Während einige Autorinnen und Autoren der Skizze eine Funktion als Berechnungswerkzeug oder zum Aufzeichnen von Verfahrensschritten zuschreiben (Koedinger & Terao, 2002, S. 542; Stylianou, 2011, S. 265; Van Essen & Hamaker, 1990, S. 302 f.), konnten kognitive Unterstützungsprozesse dieser Art beim innermathematischen Arbeiten bisher nicht empirisch nachgewiesen werden (Rellensmann, 2019, S. 254). Die vorliegende Studie liefert zusätzliche Belege für diese bisher wenig gesicherte Annahme und deutet aufgrund des ausbleibenden Zusammenhangs darauf hin, dass das Zeichnen einer Skizze bei der Anwendung mathematischer Algorithmen und Berechnungen keine unterstützende Wirkung bietet.

Bei den übrigen Modellierungsteilprozessen war der Zusammenhang der Skizzenqualität mit der jeweiligen Leistung kontinuierlich abfallend (vgl. Kapitel 8.4.2). Demnach scheint die Qualität einer Skizze insbesondere bei den ersten Schritten des Modellierungsprozesses besonders stark mit der erfolgreichen Bewältigung einherzugehen. Beim Bilden des Realmodells ist der Zusammenhang besonders ausgeprägt und zudem deutlich höher als bei Betrachtung der allgemeinen Modellierungsleistung (vgl. Kapitel 8.4.2.1). Wie bereits theoriebasiert angenommen wurde, scheint die Strategie des Skizzenzeichnens beim Verstehen und Strukturieren einer realen Situation eine besonders förderlich zu sein, indem z. B. die Identifikation relevanter Objekte und Relationen unterstützt, diese geordnet, Vorwissen aktiviert oder die Aufmerksamkeit auf die Semantik gerichtet wird (z. B. R. Cox, 1999, S. 348, 359; Leenaars et al., 2013, S. 84 f.; Reuter, 2016, S. 49; Schmidgall, 2017, S. 139).

Besonders interessant ist, dass der Abstraktionsgrad der Skizzen die Leistung beim Bilden des Realmodells signifikant *negativ* voraussagte. Demnach gilt entgegen der aufgestellten Hypothese (2.2.): Je situativer (d. h. je weniger schematisch) eine Skizze gezeichnet wird, desto erfolgreicher wird ein Realmodell zur jeweiligen Modellierungsaufgabe gebildet. Dies gilt für beide geometrischen Themenbereiche gleichermaßen. Während einige wissenschaftliche Untersuchungen zu der Annahme führten, dass situative Skizzen nachteilige Effekte auf die Bewältigung von Lösungsprozessen haben (z. B. Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Van Garderen

& Montague, 2003), kam die Studie von Rellensmann et al. (2022) zu dem Ergebnis, dass situative Skizzen zwar in einem positiven, aber in keinem direkten Zusammenhang mit der allgemeinen Modellierungsleistung stehen. Die vorliegende Studie liefert neue Erkenntnisse dazu und trägt dazu bei, diesen Zusammenhang zu konkretisieren: Während das Zeichnen situativer Skizzen zwar nicht mit der Modellierungsleistung im Allgemeinen im Zusammenhang steht, scheint es aber beim Bilden des Realmodells hilfreich zu sein – und das über verschiedene geometrische Themenbereiche hinweg (vgl. Kapitel 8.4.2.1). Nach bisherigen theoretischen und empirischen Erkenntnissen wird während des Verstehensprozesses eine individuelle mentale Repräsentation der Situation gebildet, wichtige Informationen werden selektiert und mit dem Vorwissen verknüpft (vgl. Kapitel 4.4). Beim Strukturierungsprozess wird das Situationsmodell im Hinblick auf die Anwendung mathematischer Verfahren weiter vereinfacht und idealisiert. Besonders beim Verstehensprozess erscheint es plausibel, dass das Zeichnen einer *situativen* Skizze besser zum Verstehen einer realen Situation beitragen kann als das Zeichnen schematischer Skizzen, indem durch die situationsnahe Darstellung die Aktivierung des kontextbezogenen Vorwissens stärker gefördert wird, die Semantik in den Vordergrund tritt und der Problemraum anhand der Skizze erkundet werden kann (vgl. Kapitel 4.8.1). In Bezug auf den Strukturierungsprozess ist der Zusammenhang zwischen situativen Skizzen und erfolgreicher Bewältigung weniger leicht zu erklären. Allerdings lässt die vorliegende Studie keine Differenzierung zwischen dem Verstehens- und dem Strukturierungsprozess zu, sodass keine eindeutige Aussage darüber getroffen werden kann, ob der Zusammenhang für beide Prozesse gleichermaßen gilt. Dennoch wäre denkbar, dass zum Beispiel die Beschriftung mit relevanten Zahlenwerten zum jeweiligen Objekt besser gelingt, wenn das Objekt anschaulich dargestellt ist, da die Identifikation des Objektes erleichtert wird. Vielleicht könnte auch die Selektion der lösungsrelevanten Informationen besser gelingen, wenn der Bezug zur realen Situation in der Skizze zu erkennen ist, indem die realen Zusammenhänge stärker berücksichtigt werden können. Die genaue Wirkungsweise situativer Skizzen beim Verstehens- und Strukturierungsprozess bleibt zu erforschen.

Beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells zeigte sich ebenfalls ein hoher Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und der Leistung, wobei bei beiden geometrischen Themen eine deutliche Zunahme der Varianzaufklärung durch diesen Prädiktor zu beobachten war (vgl. Kapitel 8.4.2.2). Dies deutet darauf hin, dass das Zeichnen einer hochwertigen Skizze beim Bilden mathematischer Strukturen, beim Konkretisieren und Explizitmachen sowie beim Ziehen von Schlussfolgerungen bezüglich des mathematischen Modells hilfreich sein kann (z. B. Ainsworth & Th Loizou, 2003, S. 685; R. Cox, 1999, S. 353; Larkin & Simon, 1987, S. 71) – also bei den kognitiven Prozessen, die beim Bilden eines allgemeinen mathematischen Modells ablaufen. Wie theoriebasiert angenommen wurde, kann die Skizze dabei als Explorationsinstrument zur Erkundung mathematischer Strukturen, zur Einführung mathematischer Notationen und Rechenverfahren sowie zur kognitiven Entlastung dienen (Nunokawa, 2006, S. 33; Stylianou, 2011, S. 277; Van Essen & Hamaker, 1990, S. 302).

Hinsichtlich des Abstraktionsgrades ergab die Studie, dass beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells ein *positiver* Zusammenhang zwischen dem Abstraktionsgrad und der Modellierungsleistung vorlag. Im Gegensatz zum Verstehens- und Strukturierungsprozess geht also beim Bilden des mathematischen Modells das Zeichnen schematischer Skizzen mit der erfolgreichen Bearbeitung einher, während situative Skizzen weniger hilfereich sind. Hier kehrt sich das Verhältnis demnach um, was darauf hindeutet, dass je nach Modellierungsphase unterschiedliche Arten von Skizzen hilfreich sein können: Während für den Verstehensprozess das Zeichnen situativer Skizzen nützlicher ist, ist das Zeichnen schematischer Skizzen für das Bilden des mathematischen Modells wirksamer. Dies ist insofern schlüssig, als beim Verstehen und Strukturieren der reale Kontext stärker einbezogen werden muss, während beim Mathematisieren das Erkennen der mathematischen Strukturen im Vordergrund steht, das stärker durch Vereinfachung und Idealisierung mittels einer schematischen Skizze unterstützt wird.

Beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells ist der Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Leistung deutlich geringer. Zwischen dem Abstraktionsgrad der gezeichneten Skizzen und der Modellierungsleistung liegt bei diesem Teilprozess und auch beim darauffolgenden, dem mathematischen Arbeiten, gar kein Zusammenhang vor. Das Erstellen qualitativ hochwertiger Skizzen scheint demnach vor allem mit der erfolgreichen Bewältigung der – zumindest nach der im Modellierungskreislauf prototypisch angenommenen Reihenfolge – ersten Schritte des Modellierungsprozesses einherzugehen. Erste Hinweise auf die Wirkung des Skizzenzeichnens in einzelnen Modellierungsteilprozessen lieferte bisher vor allem die qualitative Untersuchung von Rellensmann (2019), die exemplarisch anhand von Einzelfällen durchgeführt wurde. Die vorliegende Studie liefert hierzu quantitativ fundierte Ergebnisse und zeigt, dass das Erstellen hochwertiger Skizzen vor allem mit dem Bilden des Realmodells, dem Bilden des allgemeinen mathematischen Modells und in geringerem Maße mit dem Bilden des spezifischen mathematischen Modells einhergeht, während für das mathematische Arbeiten kein Zusammenhang besteht. Diese Erkenntnisse erweitern zum einen die bestehende Theorie und den Forschungsstand zur Wirkungsweise von Skizzenqualität und Abstraktionsgrad der Skizzen. Zum anderen sind sie für die Praxis des Lehrens und Lernens von Mathematik nutzbar, indem gezieltere Instruktionen zum Zeichnen von Skizzen gegeben werden können, wenn Lernende in bestimmten Phasen des Modellierens Schwierigkeiten haben.

9.1.4 Explizite Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze

Wie häufig gelingt Schülerinnen und Schülern des 9. und 10. Jahrgangs die explizite Darstellung des mathematischen Modells beim Zeichnen einer Skizze und inwiefern besteht ein Zusammenhang zwischen der Darstellung des mathematischen Modells und dem Lösungserfolg beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben? Dies war die dritte Forschungsfrage, die für die Studie richtungsweisend war. Die Analyse der expliziten Darstellung des mathematischen Modells ergab, dass die Umsetzung dieses Kriteriums bei beiden geometrischen Themen teilweise, d. h. zu etwas mehr als 50 Prozent, gelungen ist (vgl. Kapitel 8.5). Eine vorherige Studie hat gezeigt, dass es den Lernenden deutlich schwerer fällt, das mathematische Modell in der Skizze beim Thema *Lineare Funktionen* explizit darzustellen als beim Thema *Satz des Pythagoras* (Bräuer et al., 2021, S. 515). Dementsprechend gelingt die explizite Darstellung des mathematischen Modells in verschiedenen mathematischen Teilgebieten wie Geometrie und Analysis unterschiedlich gut. Unklar war bisher, inwieweit auch *innerhalb* eines mathematischen Teilgebiets Unterschiede auftreten. Die vorliegende Studie liefert hierzu erste Erkenntnisse, indem anhand der Beispielthemen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* exemplarisch gezeigt werden konnte, dass innerhalb des Teilgebietes der Geometrie keine themenspezifischen Unterschiede bei der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze auftreten.

Bei beiden Themen variiert die explizite Darstellung des mathematischen Modells jedoch stark zwischen den einzelnen Aufgaben (vgl. Kapitel 8.5). Die Schwierigkeit bei der Darstellung des mathematischen Modells hängt also vermutlich weniger mit dem geometrischen Thema als vielmehr mit der Komplexität des mathematischen Modells in der Aufgabenstellung zusammen. Die Studie von Manalo & Uesaka (2011) hatte ergeben, dass insbesondere der kognitive Aufwand für den Transfer einer Problemsituation in eine bildliche Darstellung ausschlaggebend für die spontane Verwendung der Darstellung ist, während der Längenbezug der Aufgaben ein weniger entscheidendes Kriterium darstellt. Die vorliegende Studie liefert Hinweise darauf, dass sich dieser Befund möglicherweise auch auf die Qualität der Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze übertragen lässt, für die ebenfalls die Schwierigkeit beim Transfer der Situation in das mathematische Modell ausschlaggebend zu sein scheint, während das jeweilige geometrische Thema eine weniger wichtige Rolle spielt.

Die einfaktoriellen Varianzanalysen zur Überprüfung des Zusammenhangs zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und dem Modellieren zeigten hingegen deutlich, dass die Darstellung des mathematischen Modells mit höheren Lösungsraten bei den Aufgaben zum *Satz des Pythagoras* einherging, während die Lösungsraten bei den qualitativ hochwertigen Skizzen *ohne* mathematisches Modell ähnlich niedrig waren wie bei unvollständigen Skizzen (vgl. Kapitel 8.5.2). Die explizite Darstellung des mathematischen Modells scheint also bei diesem geometrischen Thema eine hohe Relevanz zu haben, nicht jedoch beim Thema *Flächeninhalte*. Hier wurde bei qualitativ hochwertigen Skizzen in der Regel auch das mathematische Modell explizit dargestellt, sodass kein Zusammenhang über die Darstellung der Objekte und Relationen hinaus erkennbar war.

Der Zusammenhang zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells in der Skizze und der Modellierungsleistung wurde bereits in der Studie von Bräuer et al. (2021) für das Thema *Satz des Pythagoras* und auch für das Thema *Lineare Funktionen* nachgewiesen und konnte in der vorliegenden Studie für beide Themen grundsätzlich validiert werden (vgl. Kapitel 8.5.1). Gleichzeitig zeigt die Untersuchung aber auch Einschränkungen auf, da nur für das Thema *Satz des Pythagoras* ein Zusammenhang zwischen der expliziten Darstellung des mathematischen Modells und der Modellierungsleistung über die vollständige Darstellung von Objekten und Relationen hinaus nachgewiesen werden konnte. Beim Thema

Flächeninhalte blieb dieser Zusammenhang aus. Demnach scheint nicht der geometrische Aufgabenbezug ausschlaggebend dafür zu sein, dass die Darstellung des mathematischen Modells mit der erfolgreichen Lösung einer Modellierungsaufgabe einhergeht, sondern der Zusammenhang ist durch themenspezifische Unterschiede bedingt. Beim Thema *Flächeninhalte* ist das mathematische Modell (die geometrische Figur) den Objekten und Relationen stärker inhärent, sodass seine explizite Darstellung in der Skizze nicht unbedingt darauf hindeutet, dass sich die Lernenden auch des mathematischen Modells bewusst (geworden) sind. Beim *Satz des Pythagoras* hingegen deutet eine explizite Darstellung des rechtwinkligen Dreiecks eher darauf hin, dass die Lernenden die Objekte bewusst vereinfacht und zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammengefügt haben. Dies könnte eine mögliche Erklärung für die Unterschiede bezüglich des Zusammenhangs sein.

Da die einzige Aufgabe, bei der sich ein ähnlicher Zusammenhang wie beim Thema *Satz des Pythagoras* andeutete, die komplexeste der Flächeninhalts-Aufgaben ist und sich die Aufgabenkomplexität bereits in anderen Studien als wichtiges Kriterium herausgestellt hat (z. B. Csíkos et al., 2012; Uesaka & Manalo, 2011a; Van Meter et al., 2006), bleibt in Folgestudien zu überprüfen, ob sich ein Zusammenhang der expliziten Darstellung des mathematischen Modells über die Darstellung der Objekte und Relationen hinaus möglicherweise nur bei besonders komplexen Modellierungsaufgaben zum Thema *Flächeninhalt* zeigt. Für das Thema *Satz des Pythagoras* konnte in der vorliegenden Studie bereits nachgewiesen werden, dass die explizite Darstellung des mathematischen Modells vor allem bei komplexen Aufgaben, die mehrschrittige Bearbeitungsprozesse erfordern, einen besonders starken Zusammenhang mit der erfolgreichen Lösung aufweist, während bei Aufgaben mit einfachem mathematischen Modell kein Zusammenhang über die Darstellung der Objekte und Relationen hinaus besteht (vgl. Kapitel 8.5.2). Ähnliches wurde bereits in zahlreichen Studien festgestellt (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 501; Mayer & Gallini, 1990, S. 725; Schmidgall et al., 2019, S. 139; Van Meter, 2001, S. 129) – allerdings für das Skizzenzeichnen im Allgemeinen.

Die vorliegende Studie verdeutlicht, dass eine erfolgreiche Lösung komplexer Modellierungsaufgaben zum Thema *Satz des Pythagoras* vor allem dann wahrscheinlich ist, wenn nicht nur die lösungsrelevanten Objekte, Relationen und Zahlenwerte in der Skizze korrekt dargestellt werden, sondern wenn auch das mathematische Modell in der Skizze explizit dargestellt wird. Dies deutet auf eine besondere Relevanz der expliziten Darstellung des mathematischen Modells insbesondere bei komplexen mathematischen Modellierungsaufgaben hin. Allerdings ist auch bei der Darstellung des mathematischen Modells zu bedenken, dass die Richtung des Wirkungszusammenhangs umgekehrt sein kann: Möglicherweise haben die Lernenden das mathematische Modell bereits im Kopf und externalisieren es in Form der Skizze, ohne die Skizze als Hilfsmittel zu benötigen. Rellensmann (2019, S. 265 f.) hat im Rahmen einer qualitativen Analyse Hinweise darauf gefunden, dass vor allem das zieloffene Entdecken mathematischer Strukturen beim Zeichnen wirksam ist, während das Zeichnen einer Skizze als fertiges mathematisches Objekt keine Unterstützung bietet. Eine quantitative Überprüfung der Nutzungsweise steht also noch aus.

9.1.5 Einfluss der Skizzenaufforderung beim Modellieren

Die vierte und letzte zentrale Forschungsfrage lautete: *Welchen Einfluss hat die Aufforderung zum Skizzenzeichnen im Vergleich zu der Aufforderung, eine Aufgabe ohne Skizze zu lösen, auf den Lösungserfolg bzw. die erfolgreiche Bewältigung der Teilprozesse beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben?* Es zeigte sich, dass die Aufforderung zum Skizzenzeichnen im Vergleich zum Skizzenverbot keinen Einfluss auf die generelle Bewältigung geometrischer Modellierungsaufgaben durch Schülerinnen und Schüler der neunten und zehnten Jahrgangsstufe hatte – unabhängig vom jeweiligen geometrischen Thema (vgl. Kapitel 8.6.1). Auch bei der Betrachtung der einzelnen Items gab es nur eine Aufgabe zum Thema *Flächeninhalte*, bei der die Lernenden tendenziell von der Skizzenaufforderung profitierten, was aber nur deskriptiv festgestellt und nicht statistisch abgesichert werden konnte. Hingegen gab es eine Aufgabe zum Thema *Satz des Pythagoras* und zwei zum Thema *Flächeninhalte*, bei denen die Skizzenaufforderung gegenüber dem Skizzenverbot zu einem statistisch signifikanten Leistungsnachteil führte (vgl. Kapitel 8.6.3).

Vor dem Hintergrund der kognitionspsychologischen *Theorien des multimedialen Lernens* und der *Theorien zur Zeichenkonstruktion* ist das Ergebnis schwer zu erklären, da gemäß den Theorien zu erwarten gewesen wäre, dass das Zeichnen von Skizzen die Bearbeitung geometrischer Modellierungsaufgaben kognitiv unterstützt (z. B. durch Aktivierung von Vorwissen, Entlastung, Aufmerksamkeitsbündelung) (vgl. Kapitel 4.8) und somit zu besseren Modellierungsergebnissen führt. Zwar liefern die Theorien auch Ansätze, warum das Skizzenzeichnen möglicherweise nicht wirksam ist (z. B. Split-Attention-Effekt, Redundanzeffekt; siehe Ayres & Sweller, 2005; Sweller, 2005b) jedoch überwiegen in allen Theorien die unterstützenden Funktionen. Auf der anderen Seite gibt es eine ganze Reihe von Studien, in denen sich die Anwendung von Strategien als nicht hilfreich oder sogar als hinderlich erwiesen hat (Bräuer et al., 2021; De Bock et al., 2003; Schoenfeld, 1992; Van Essen & Hamaker, 1990). Hierfür gibt es verschiedene mögliche Erklärungen.

Aus kognitionspsychologischer Sicht besteht ein Erklärungsansatz darin, dass der kognitive Aufwand für das Zeichnen einer Skizze den Nutzen der Strategie übersteigt. Der Vorteil mentaler Bilder liegt darin, dass die Lernenden diese konstruieren und manipulieren können ohne kognitive Anstrengungen in die Externalisierung in Form der Skizze investieren zu müssen (Leopold & Leutner, 2015, S. 339). Der Strategieeinsatz könnte zu einer Belastung anstelle einer Entlastung des Arbeitsgedächtnisses geführt haben, indem der Prozess der Externalisierung und die mechanische Umsetzung des Zeichnens zusätzliche Anforderungen darstellten, für deren Bewältigung kognitive Ressourcen beansprucht wurden (Schmeck, 2010, S. 86). Ausgehend von der *Kognitiven Theorie multimedialen Lernens* (Mayer, 2005) und des *Integrierten Modells des Text- und Bildverstehens* (Schnotz & Bannert, 2003) wurde angenommen, dass das Erstellen einer Skizze die Lernenden bei der Bildung eines mentalen Modells unterstützt, insbesondere da das mentale Modell laut Schnotz und Bannert (2003, S. 146 f.) depiktionaler Natur ist und starke strukturelle Analogien zu visuellen Bildern aufweist. Allerdings geht die Erstellung einer externalen Repräsentation in Form der Skizze über die

Bildung des mentalen Modells hinaus, indem z. B. die darzustellenden Elemente selektiert und strukturiert werden müssen, adäquate Darstellungsweisen für diese gefunden und diese angemessen mechanisch umgesetzt werden müssen (Schwamborn et al., 2010, S. 873). Auch die notwendigen Überprüfungen der Skizze anhand der propositionalen Repräsentation oder der Textbasis können zusätzliche, kognitiv belastende Prozesse darstellen.

Aufgrund der kognitionspsychologischen Theorien wurde weiterhin angenommen, dass das Skizzenzeichnen hilfreich ist, um die Informationsauswahl und -strukturierung für das mentale Modell zu unterstützen (R. Cox, 1999, S. 348) oder Einsichten in lösungsrelevante Zusammenhänge zu erlangen (R. Cox, 1999, S. 353; Van Essen & Hamaker, 1990, S. 302). Möglicherweise laufen diese Prozesse aber weniger parallel zum Skizzenzeichnen ab als angenommen, weil das Erstellen einer Skizze eine andere Art der Informationsauswahl und -strukturierung erfordern könnte als die Bildung des mentalen Modells. Während der Konstruktion der Skizze könnten sich zudem überflüssige Zusammenhänge und Informationen manifestieren, die nicht für die Aufgabenlösung hilfreich sind, sondern eine zusätzliche Informationslast darstellen oder zu falschen Schlussfolgerungen führen (De Bock et al., 2003; Krawitz & Schukajlow, 2020).

Mit Blick auf die Strategieforschung ist denkbar, dass die mangelnde Effektivität der Skizzenzeichenstrategie auf den mangelnden Einsatz metakognitiver Strategien zurückzuführen ist, die für die Wirksamkeit des Skizzenzeichnens notwendig sein könnten (De Bock et al., 2003, S. 459; Schoenfeld, 1992, S. 345 f.). Dagegen sprechen jedoch die zahlreichen Hinweise darauf, dass das Skizzenzeichnen selbst metakognitive Prozesse initiiert, indem das Gezeichnete zur Reflexion anregt und zur Überprüfung interner mentaler Modelle genutzt werden kann (Leopold & Leutner, 2015, S. 339; Van Meter, 2001, S. 137; Van Meter & Garner, 2005, S. 311). Gerade das Skizzenzeichnen als Strategie bietet laut Fiorella & Zhang (2018, S. 1130 f.) durch die Integration verbaler Informationen und bildlicher Darstellung besondere metakognitive Vorteile. Dennoch kann nicht ausgeschlossen werden, dass die mangelnde Nutzung metakognitiver Strategien einen leistungshemmenden Faktor darstellte.

Die Diskrepanz zwischen den kognitionspsychologischen Theorien, die das Skizzenzeichnen vielversprechend erscheinen lassen, und den wenig vielversprechenden empirischen Befunden kann auch darin begründet sein, dass die Theorien kontextuelle Faktoren nicht ausreichend berücksichtigen. So könnten sowohl aufgabenbezogene Faktoren (z. B. Realitätsbezug der Aufgabe (De Bock et al., 2003), Schwierigkeit (Van Meter & Garner, 2005, S. 308 ff.)) als auch personenbezogene Faktoren (z. B. Strategiewissen (Rellensmann et al., 2017), räumliche Fähigkeiten (R. D. L. Booth & Thomas, 1999, S. 186)) oder skizzenbezogene Faktoren, die in der Studie nicht erhoben oder nicht ausreichend variiert wurden, ausschlaggebend für den ausbleibenden Nutzen des Skizzenzeichnens sein.

Das Skizzenzeichnen könnte auch deshalb nicht zu einer erfolgreicheren Bewältigung der Lösungsprozesse beigetragen haben, weil die Modellierungsprobleme zu wenig komplex waren, sodass die Wirksamkeit der Strategie nicht zum Tragen kam. Möglicherweise waren die

Lernenden in der Lage, die propositionale Textbasis direkt in visuelle Vorstellungsbilder zu übersetzen, ohne dass sie für diese Transformation die Unterstützung durch die Strategie des Skizzenzeichnens benötigten (siehe auch Hellenbrand, 2018, S. 140 f.). In diesem Fall hätte das Skizzenzeichnen nur oberflächlich der Aufgabenerfüllung gedient, anstatt zu einem tieferen Verständnis beizutragen. Im Hinblick auf die Aufgabenkonzeption ist zudem denkbar, dass die hohe Anzahl an Aufgaben zu den gleichen Themen den Nutzen des Skizzenzeichnens durch einen Übungseffekt gemindert haben könnte.

Tatsächlich ergab die aufgabenweise Analyse, dass die Wirksamkeit der Skizzenaufforderung beim Bilden des Realmodells vor allem bei Aufgaben mittlerer bis hoher Komplexität zum Thema *Satz des Pythagoras* auftritt, bei denen das mathematische Modell nicht nur aus zwei gegebenen Größen und einer zu berechnenden dritten Größe besteht, die zusammen ein rechtwinkliges Dreieck bilden, sondern eine weitere Größe enthält, die zusätzlich berücksichtig werden muss (vgl. Kapitel 8.6.3.1). Beim Thema *Flächeninhalte* hingegen führte die Skizzenaufforderung bei den anspruchsvollsten Aufgaben zu einem Nachteil beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells sowie beim Bestimmen der mathematischen Lösung (vgl. Kapitel 8.6.3.2). Aus vorherigen Studien ist bekannt, dass das Skizzenzeichnen als Strategie vor allem bei komplexeren Aufgaben hilfreich ist (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 501; Mayer & Gallini, 1990, S. 725; Schmidgall et al., 2019, S. 139; Van Meter, 2001, S. 129), dass es aber auch Ausnahmen gibt, bei denen die Strategie bei komplexen Aufgaben keinen Nutzen erbrachte (V. C. Hall et al., 1997). Die vorliegende Studie gibt differenziertere Hinweise darauf, worin sich die Effekte bzw. das Ausbleiben von Effekten jeweils begründen könnten: Während das Skizzenzeichnen beim Bilden des Realmodells zu komplexen Problemstellungen hilfreich sein kann, gibt es Problemstellungen mit mathematischen Besonderheiten und innermathematischen Schwierigkeiten bei den Rechenoperationen (Anhang A), bei denen das Skizzenzeichnen keine Vorteile bringt, sondern vor allem beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells und beim Bestimmen des mathematischen Resultats sogar hinderlich ist. Diese Differenzen treten in der vorliegenden Studie zwischen den verschiedenen Themen auf, wobei vermutlich weniger die Themen selbst als vielmehr die unterschiedlichen Komplexitätsbedingungen ausschlaggebend sind: Während beim Thema *Satz des Pythagoras* die Schwierigkeit im Zusammensetzen der verschiedenen Objekte zum mathematischen Modell lag, bestand die Schwierigkeit bei den Aufgaben zum Thema Flächeninhalte in den innermathematischen Operationen.

Möglich wäre auch, dass die instruktionale Unterstützung nicht ausreichend war, um eine effektive Nutzung des Skizzenzeichnens zu ermöglichen. Verschiedene Studien haben gezeigt, dass Lernende bessere Leistungen erzielen, wenn sie beim Skizzenzeichnen Unterstützung erhalten, z. B. durch vorgegebene Zeichenobjekte oder Zeichenanweisungen (z. B. Cromley et al., 2020, S. 225; Van Meter et al., 2006). Auch Zusammenarbeit, Evaluation oder duale Strategien können hilfreich sein, um eine positive Wirkung des Skizzenzeichnens zu erzielen (Cromley et al., 2020, S. 225). Andere Studien zeigen hingegen, dass eine solche Unterstützung den Nutzen des Zeichnens nicht erhöht und sogar die wahrgenommene Schwierigkeit steigern kann (z. B. Schmidgall, 2017, S. 106). Demnach bleibt zu untersuchen, ob, inwiefern und welche instruktionale Unterstützung beim Skizzenzeichnen zu geometrischen Modellierungsaufgaben sinnvoll ist.

Ein weiterer Erklärungsansatz bezüglich der Wirkungsfaktoren könnte in der zu geringen Skizzenqualität liegen. Zahlreiche Studien haben einen starken Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und dem Lösungserfolg nachgewiesen, sodass das Zeichnen einer Skizze vermutlich nur dann zum Erfolg führt, wenn es sich um eine qualitativ hochwertige Skizze handelt, in der die wesentlichen lösungsrelevanten Informationen dargestellt sind. Auch wenn die Skizzenqualität bei beiden Themen auf mittlerem bis hohem Niveau lag (vgl. Kapitel 8.3.2), bietet sie Verbesserungspotenzial – zumal es sich um geometrische Themen handelt, bei denen das Zeichnen von Skizzen besonders intuitiv erfolgt. Die optimierbare Qualität der Skizzen könnte somit ein Grund für die mangelnde Wirksamkeit der Skizzenaufforderung sein. Trainingsstudien (z. B. Ayabe et al., 2020; Sturm, 2018; Terwel et al., 2009; Van Essen & Hamaker, 1990) sowie die Metaanalyse von Hembree (1992, S. 263) verdeutlichen, dass es für eine effektive Anwendung der Strategie entscheidend ist, dass die Lernenden darin geübt sind und über ein umfassendes Strategiewissen verfügen (siehe auch Rellensmann et al., 2017).

Im Gegensatz zu anderen Studien, in denen oftmals die geringe Skizzenhäufigkeit als mögliche Ursache für den ausbleibenden Effekt der Skizzenaufforderung genannt wurde (De Bock et al., 2003; Rellensmann et al., 2022; Uesaka & Manalo, 2011a), war die Häufigkeit der gezeichneten Skizzen in der vorliegenden Studie besonders hoch (vgl. Kapitel 9.1). Die mangelnde Umsetzung der Skizzenaufforderung scheint daher als mögliche Ursache für den ausbleibenden Effekt der Skizzenaufforderung nicht relevant zu sein.

Allerdings kann nicht überprüft werden, ob die Lernenden das Skizzenzeichnen tatsächlich aktiv bei der Bearbeitung der Modellierungsaufgaben eingesetzt haben, oder ob sie die Skizze nur anfänglich zur Organisation der Informationen genutzt und dann verworfen haben, wie es R. D. L. Booth und Thomas (1999, S. 179) beschreiben. Diese Erklärung wäre insofern plausibel, als dass die Aufforderung zum Zeichnen einer Skizze im Vergleich zum Zeichenverbot eine positive Wirkung beim erfolgreichen Bilden des Realmodells hatte, während bei den darauffolgenden Modellierungsteilschritten keine Effekte auftraten (vgl. Kapitel 8.6.2). Dies war allerdings nur beim Thema *Satz des Pythagoras* der Fall, was darauf schließen lässt, dass die Strategie des Skizzenzeichnens je nach mathematischem Thema unterschiedlich wirksam ist. In einer früheren Studie konnte bereits gezeigt werden, dass der Zusammenhang zwischen dem Einsatz der Strategie des Skizzenzeichnens und der Modellierungsleistung zwischen verschiedenen mathematischen Teilgebieten (Geometrie und Analysis) stark variiert (Bräuer et al., 2021). Die vorliegende Studie zeigt ergänzend, dass neben vielen Parallelen in der Wirkung der Skizzenaufforderung beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben auch *innerhalb* eines mathematischen Teilgebiets – hier der Geometrie – Unterschiede zwischen verschiedenen Themen auftreten können.

Bei der Untersuchung des Einflusses der Skizzenaufforderung in Abhängigkeit von den verschiedenen Hintergrundvariablen zeigten sich keine spezifischen Effekte für die Gruppen der allgemeinen Mathematikleistung, des Geschlechts, der Skizzenpräferenz oder des Jahrgangs (vgl. Kapitel 8.6.4). Anknüpfend an bestehende Studien zum Einsatz von Skizzen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben, in denen das Geschlecht als Bedingungsfaktor berücksichtigt wurde (Csíkos et al., 2012; Dewolf et al., 2013), bestätigt die vorliegende Studie, dass es keine geschlechterspezifische Wirkung der Skizzenaufforderung auf die Modellierungsleistung gibt. Ähnlich ist das Ergebnis in Bezug auf die Skizzenpräferenz. Vorherige Studien ergaben, dass die Präferenz für das Zeichnen von Skizzen sowie damit verbundene Emotionen für die Wirksamkeit der Strategieanwendung entscheidend sein können (z. B. Schukajlow, Blomberg, & Leopold, 2019). Die vorliegende Studie legt jedoch nahe, dass die Skizzenaufforderung unabhängig von der Skizzenpräferenz auf die Modellierungsleistung wirkt. Dabei ist jedoch die Diversität der Konstrukte (z. B. Skizzenpräferenz, strategiebezogene Emotionen) bzw. der Operationalisierungen der Konstrukte zu berücksichtigen. Die ausbleibenden Unterschiede in der Wirkung der Skizzenaufforderung hinsichtlich des Jahrgangs sind insofern wenig überraschend, als zwei direkt aufeinanderfolgende Jahrgänge untersucht wurden. In bisherigen Studien, in denen Altersunterschiede in der Wirkung des Skizzenzeichnens bzw. der Aufforderung zum Skizzenzeichnen nachgewiesen wurden, wurden häufig Jahrgänge untersucht, die mehrere Jahre auseinander lagen (J. L. Booth & Koedinger, 2012; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter et al., 2006). Die vorliegende Studie zeigt daher, dass keine Unterschiede zwischen nahe beieinander liegenden Altersstufen auftreten.

Bei der Analyse der Wirkung der Skizzenaufforderung in Abhängigkeit von der geometriebezogenen Leistung zeigte sich hingegen ein leistungsspezifischer Effekt: Lernende mit niedriger geometriebezogener Leistung konnten die Modellierungsaufgaben tendenziell erfolgreicher lösen, wenn sie zum Skizzenzeichnen aufgefordert wurden, als wenn sie eine Aufgabe ohne Skizze lösen mussten (vgl. Kapitel 8.6.4.3). Dieser Befund war allerdings nur für das Thema *Flächeninhalte* signifikant, während er für das Thema *Satz des Pythagoras* nur deskriptiv nachgewiesen werden konnte. Bei den Lernenden mit mittleren bis hohen geometriebezogenen Leistungen war der Effekt umgekehrt: Hier profitierten die Lernenden von der Aufforderung, die Aufgabe *ohne* Skizze zu lösen. Die Ergebnisse stehen im Einklang mit der Annahme aus früheren Untersuchungen, dass der Einsatz von Strategien für Lernende mit niedrigem Leistungsniveau effektiv ist (Krawec, 2014; Mayer & Gallini, 1990, S. 718; Schnotz, 2005, S. 62; Veloo, 1996, S. 585). Für leistungsschwache Lernende kann das Zeichnen von Skizzen das Herstellen von referenziellen Verknüpfungen erleichtern, indem die visuelle Darstellung in Form der Skizze parallel zur Textbasis zur Verfügung steht, um dies zur Bildung des mentalen Modells zu nutzen und um daraus Schlussfolgerungen ziehen zu können (z. B. R. Cox, 1999; Saß et al., 2017, S. 95). Hingegen kommt es bei den Lernenden mit mittlerer und hoher geometriebezogener Leistung vermutlich vermehrt zu Split-Attention- oder Redundanzeffekten, indem das Zeichnen eine zusätzliche, überflüssige Belastung des Arbeitsgedächtnisses darstellt, die offenbar keinen Mehrwert für die erfolgreiche Bearbeitung der Modellierungsaufgaben bietet (Ayres & Sweller, 2005; Sturm, 2018, S. 41; Sweller, 2005b).

9.2 Kritische Reflexion der Studie

Neben der inhaltlichen Diskussion der Forschungsergebnisse gibt es verschiedene kritische Aspekte bezüglich des Untersuchungsdesigns, der Stichprobe und der Analysemethoden, die im folgenden Abschnitt reflektiert werden.

Hinsichtlich des Untersuchungsdesigns wurde für die Studie eine relativ hohe Anzahl an Modellierungsaufgaben entwickelt, um eine hohe Reliabilität und Validität zu erreichen. Damit die Aufgabenmenge für die Lernenden trotzdem zu bewältigen blieb, wurden die Modellierungsaufgaben nicht zu umfangreich und komplex gestaltet. Aufgrund der mangelnden Wirksamkeit der Skizzenaufforderung stellt sich jedoch die Frage, ob die Modellierungsaufgaben nicht komplexer und realitätsnaher hätten konzipiert werden müssen, damit die Strategie des Skizzenzeichnens ihre Wirksamkeit vollständig entfalten kann. Möglicherweise war der erforderliche kognitive Aufwand zu gering (Saß et al., 2017, S. 93) und es traten nur wenige kognitive Hürden auf (vgl. Kapitel 4.6), sodass das Potenzial der Strategie zur Überwindung kognitiver Herausforderungen nicht ausgeschöpft werden konnte. Darüber hinaus könnte die hohe Anzahl an Aufgaben dazu beigetragen haben, dass die Lernenden die Aufgaben eher oberflächlich bearbeiteten und ein gewisser Übungseffekt eintrat, sodass die Wirkung der Strategie nicht voll zum Tragen kommen konnte. Alternativ zu der Vorgehensweise, dass alle Teilnehmenden alle Aufgaben bearbeiten, könnte ein rotierendes Untersuchungsdesign gewählt werden, bei dem die Items aufgeteilt werden und die Lernenden jeweils nur einen Teil der Items bearbeiten. Dadurch hätten die Teilnehmenden mehr Zeit für die Bearbeitung und die Aufgaben könnten komplexer gestaltet werden.

Die Implementation der Aufforderung zum Skizzenzeichnen könnte ebenfalls dazu beigetragen haben, dass die Strategie nicht vollumfassend wirksam war. Die Vorgehensweise, die Teilnehmenden *erst* zum Skizzenzeichnen und *dann* zum Lösen der Aufgabe aufzufordern, wurde aus anderen Studien zu diesem Thema übernommen, da sich gezeigt hatte, dass die Lernenden trotz der schrittweisen Aufgabenstellung die Skizze während des gesamten Modellierungsprozesses nutzen (Rellensmann, 2019, S. 256). Möglicherweise führt die schrittweise Implementation jedoch dazu, dass das Zeichnen der Skizze nicht als integraler Bestandteil des Lösungsprozesses wahrgenommen wird (De Bock et al., 2003, S. 458) und deshalb nicht das volle Potenzial ausgeschöpft wird. Die Dual-Coding-Theorie besagt unter anderem, dass eine sukzessive Präsentation von Informationen die referenzielle Verknüpfung zwischen diesen erschwert (Mayer & Sims, 1994, S. 396). In ähnlicher Weise könnte auch das Erstellen der Skizze im ersten Schritt und das Lösen der Modellierungsaufgabe im zweiten Schritt die Herstellung referenzieller Verknüpfungen zwischen beiden erschweren. So hat auch Nunokawa (2006, S. 52) festgestellt, dass eine erste Skizze vor der eigentlichen Aufgabenbearbeitung noch keine wesentlichen Vorteile für den Lösungsprozess bietet, sondern erst die Verwendung der Skizze während des gesamten Lösungsprozesses wirksam ist. Möglicherweise wurde das Zeichnen der Skizze in der vorliegenden Studie aufgrund der Art der Implementation eher als Teil der Aufgabenbearbeitung betrachtet und weniger als Hilfsmittel für den gesamten Lösungsprozess, sodass der natürliche und adaptive Einsatz selbst erstellter Skizzen in dieser Studie nicht untersucht werden konnte.

Dafür, dass die Lernenden die Skizze in der vorliegenden Studie nicht als integralen Bestandteil des gesamten Lösungsprozesses genutzt haben, spricht, dass in der Studie nur in der prototypischen ersten Phase des Bildens des Realmodells ein positiver Effekt der Skizzenaufforderung nachgewiesen werden konnte (vgl. Kapitel 8.6.2). In Folgestudien wäre es interessant, Wirkungsunterschiede bei einer stärker integrativen Einbindung der Skizzenaufforderung zu untersuchen. Eine integrativere Skizzenaufforderung könnte beispielsweise lauten „Zeichne eine Skizze und beantworte die Fragestellung mit Hilfe der Skizze." oder „Beantworte die in der Aufgabe gestellte Frage, indem du eine Skizze zur Aufgabe zeichnest und die notwendigen Berechnungen mit Hilfe der Skizze durchführst."

Die zeitliche Begrenzung ist ein weiteres Merkmal des Erhebungsdesigns, das kritisch reflektiert werden muss. Anhand der stark abnehmenden Bearbeitungszahlen mit ansteigender Testheftposition zeigte sich, dass die Teilnehmenden unter Zeitdruck standen, der zu Überforderung und daraus resultierenden Störeffekten bei der Itembearbeitung geführt haben könnte. Aus diesem Grund ist es wahrscheinlich, dass Reihenfolgeeffekte die Ergebnisse beeinflusst haben, auch wenn versucht wurde, diese weitgehend zu eliminieren, indem die fehlenden Bearbeitungen am Ende der einzelnen Testhefte aus den Analysen ausgeschlossen wurden. Sowohl ein großzügigerer Zeitrahmen als auch die bereits erwähnte reduzierte Anzahl von Items je Testperson mit rotierendem Design könnten hier in zukünftigen Studien Abhilfe schaffen.

Bei der Gestaltung der Materialien sollte außerdem die Auswahl der Abbildungen überdacht werden. Bei der Auswertung der Testhefte fiel auf, dass die Teilnehmenden teilweise in die Abbildungen im Testheft oder in die Abbildungen in der Formelsammlung hineinzeichneten oder diese beschrifteten. Dies deutet darauf hin, dass die Abbildungen eine Hilfe dargestellt haben könnten. Alternativ könnten die Abbildungen vollständig weggelassen werden oder sie sollten zukünftig so gestaltet werden, dass sie höchstens als Illustrationen dienen, um auszuschließen, dass sie als visuelle Unterstützung anstelle einer Skizze fungieren – zumindest dann, wenn die Wirkung der Skizze mit dem völligen Fehlen visueller Hilfsmittel verglichen werden soll. Ungeklärt bleibt zudem, inwiefern die Teilnehmenden die Darstellungen – auch ohne Hineinzeichnen oder Beschriften – genutzt haben, um mentale Bilder zur Aufgabenstellung zu entwickeln (Leopold & Leutner, 2015, S. 338 f.). Hier könnten z. B. Eye-Tracking-Studien oder gezielte Befragungen Abhilfe schaffen.

Bei der vorliegenden Untersuchung wurde die Wirkung selbst erstellter Skizzen auf die Bearbeitung geometrischer Modellierungsaufgaben untersucht, die aus Gründen der Zeitökonomie und Praktikabilität eher kurz und nur leicht überbestimmt waren. Diese Wahl wurde getroffen, um die Umsetzbarkeit für die große Anzahl der Teilnehmenden bei gleichzeitig hoher Itemzahl gewährleisten zu können und damit valide und reliable Ergebnisse zu generieren (vgl. Kapitel 6.3.1). Inwieweit die Ergebnisse für andere mathematische Aufgabenformate verallgemeinerbar sind, bleibt in der weiteren Forschung zu prüfen. Denkbar ist, dass das Skizzenzeichnen bei Aufgaben mit geringerem Realitätsbezug weniger zum Tragen kommt, da hier weniger kognitive Hürden auftreten, die den Einsatz der Strategie erforderlich machen könnten (vgl. Kapitel 4.6). Bei komplexeren Modellierungsaufgaben könnte das Skizzenzeichnen aus diesem Grund noch effektiver sein als bei den vorliegenden Aufgaben.

Auch wenn ein Schwerpunkt der Studie darin liegt, die Übertragbarkeit von Erkenntnissen zum Skizzenzeichnen beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben zwischen verschiedenen geometrischen Themen zu untersuchen, konnte dies in der vorliegenden Studie nur exemplarisch an zwei Themen durchgeführt werden. Inwieweit sich Parallelen und Unterschiede in der Wirkung des Skizzenzeichnens zu Themen aus anderen mathematischen Teilgebieten zeigen, bleibt zu untersuchen. Die Studie von Bräuer et al. (2021) liefert hierzu erste Ergebnisse. Dennoch besteht ein erheblicher Forschungsbedarf zur Erforschung der Strategiewirkung für weitere mathematische Themen und Teilgebiete.

Bisherige Studien haben erwiesen, dass beim spontanen Zeichnen von Skizzen aus eigenem Antrieb andere Effekte auftreten können (Manalo & Uesaka, 2016; Uesaka & Manalo, 2011a), weshalb aus den vorliegenden Ergebnissen nicht auf Bearbeitungsprozesse geschlossen werden kann, bei denen Skizzen spontan und ohne vorherige Aufforderung erstellt werden. Zudem erlaubt das experimentelle Studiendesign keine Rückschlüsse auf die konkreten Denkprozesse der Teilnehmenden, die z. B. Aufschluss darüber geben könnten, warum die Skizzenaufforderung nicht die erwarteten Effekte hatte oder warum die Skizzenaufforderung tendenziell eher bei Leistungsschwächeren als bei Leistungsstärkeren wirksam ist. Weitere qualitative Forschung ist notwendig, um diese Denkprozesse aufzudecken.

Die Wahl der Stichprobe fiel auf die Altersgruppe des neunten und zehnten Jahrgangs (vgl. Kapitel 6.3.3.1). Es stellt sich daher die Frage, inwiefern die Ergebnisse auf andere Altersgruppen übertragbar sind. Verschiedene Studien haben bereits gezeigt, dass es Unterschiede in der Wirkung des Skizzenzeichnens je nach Altersgruppe geben kann und vor allem jüngere Lernende tendenziell weniger vom Einsatz der Strategie profitieren (J. L. Booth & Koedinger, 2012; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter et al., 2006). Daher bleibt zu überprüfen, inwieweit die vorliegenden Ergebnisse auf andere Altersgruppen übertragbar sind. Weiterhin liegen keine Informationen darüber vor, inwiefern die Lehrkräfte der ausgewählten Lerngruppen das Zeichnen von Skizzen im Unterricht eingeführt und mit den Schülerinnen und Schülern geübt haben. Auch dies könnte die Ergebnisse beeinflusst haben und sollte in nachfolgenden Untersuchungen berücksichtigt werden.

Eine weitere besondere Einschränkung, die sich vor allem auf die Analyse und Interpretation der Ergebnisse auswirkt, liegt in der restriktiven Annahme über den Ablauf der Modellierungsphasen, die als Grundlage für die Auswertung der Ergebnisse diente. So erfolgte die Kodierung ausschließlich auf Basis der schriftlichen Aufgabenbearbeitungen, ohne dass daraus mit

Sicherheit abgeleitet werden kann, in welcher Phase des Modellierens welche Aufzeichnungen verschriftlicht wurden. Darüber hinaus wurde in den Regressionsanalysen jeweils der vorangegangene Modellierungsschritt auspartialisiert, um den Effekt der Variablen auf einen Modellierungsschritt ohne den Einfluss der vorherigen Schritte messen zu können (vgl. Kapitel 8.4.2). In der Praxis hat sich gezeigt, dass reale Modellierungsprozesse nicht immer in der in den Modellen postulierten Reihenfolge ablaufen, sondern dass Lernende in ihren Prozessen häufig zwischen verschiedenen Phasen springen oder zu vorherigen Phasen zurückkehren (Matos & Carreira, 1997). Gleichwohl wird theoriebasiert und auch empirisch begründet angenommen, dass reale Modellierungsprozesse diesem Ablauf häufig insofern folgen, dass ein bestimmter Modellierungsschritt nicht bewältigt werden kann, ohne dass der vorherige Schritt zumindest teilweise bewältigt wurde (vgl. Kapitel 4.4). Dass die realen Modellierungsprozesse im Rahmen der Studie tatsächlich weitgehend dem prototypischen Modell folgten, wurde auch deshalb angenommen, weil es sich nicht um hochkomplexe Modellierungsprobleme handelte, die zahlreiche mehrfache Durchläufe einzelner Teilschritte erfordert hätten. Dennoch ist dies eine wesentliche Einschränkung der Studie, die bei der Ableitung von Schlussfolgerungen berücksichtigt werden muss.

Eine weitere grundlegende Limitation der Studie ist die kausale Interpretation der Ergebnisse. Neben den bereits beschriebenen theoretischen Annahmen zum Ablauf des Modellierungsprozesses wurde versucht, durch das Studiendesign bestmögliche Bedingungen zu schaffen, um den Effekt des Skizzenzeichnens auf die Bewältigung des Modellierungsprozesses messbar zu machen. Zu diesem Zweck wurde die Aufgabenstellung schrittweise gestellt (erst Skizzenaufforderung, dann Aufgabenbearbeitung). Auf dieser Grundlage wurden die Ergebnisse zur Skizzenaufforderung als Effekte interpretiert. Vorsichtiger wurde bei der Interpretation der Regressionsergebnisse vorgegangen: Hier wurden die Ergebnisse so gedeutet, dass beispielsweise eine hohe Skizzenqualität mit einer höheren geometrischen Modellierungsleistung einhergeht. Aufgrund der beschriebenen Annahmen wird dieser Zusammenhang in einigen Studien auch als Effekt gedeutet. Der Zusammenhang kann aber auch rekursiven Charakter haben: So wie das Zeichnen qualitativ hochwertiger Skizzen zu einer Verbesserung der Modellierungsleistung führen kann, kann eine höhere Modellierungsleistung dazu führen, dass bessere Skizzen erstellt werden. Demnach sind beide Wirkrichtungen plausibel (Rellensmann et al., 2017, S. 72; Uesaka & Manalo, 2006, S. 191 f.), wenngleich die Erkenntnisse aus der Modellierungs- und Strategieforschung (vgl. Kapitel 4.4) sowie die schrittweise Aufgabenstellung dafür sprechen, dass das Zeichnen der Skizze einen Effekt auf die Modellierungsleistung hat.

Um den tatsächlichen Effekt der Skizzenzeichenstrategie beim Modellieren zu approximieren, wurde ein neuartiges, bisher nicht verwendetes Untersuchungsdesign entwickelt, bei dem einer Experimentalgruppe die Anwendung der Skizzenstrategie untersagt wurde. Auf diese Weise wurde eine Annäherung an die tatsächlichen Effekte des Skizzenzeichnens erzielt, anstatt die Skizzenaufforderung mit dem spontanen (Nicht-)Skizzenzeichnen zu vergleichen. Die Schwierigkeit des letzteren Untersuchungsdesigns liegt darin, dass die Lernenden ggf. in der

Gruppe ohne Aufforderung ebenfalls Skizzen erstellen, was einen Vergleich erschwert, der auf den reinen Effekt der Strategie selbst abzielt. Zwar können Teilnehmende, die Skizzen gezeichnet haben, mit solchen verglichen werden, die keine Skizzen zeichneten. Allerdings ist wahrscheinlich, dass eher diejenigen spontan zeichnen, die bereits über gute Modellierungsfähigkeiten oder eine hohe Skizzenkompetenz verfügen, was zu einer Verzerrung der Effekte führt. Aus diesem Grund wurde für die vorliegende Studie das neuartige Design gewählt, um präzisere Ergebnisse zu den genuinen Effekten der Strategie zu erhalten. Gleichzeitig ist dieses Vorgehen jedoch besonders weit von realen Lernsituationen entfernt, in denen Lernende nicht vom Skizzenzeichnen abgehalten werden, wenn sie die Strategie intuitiv anwenden.

9.3 Diskussion der Implikationen

Aus den empirischen Befunden der Studie ergeben sich vielfältige Implikationen in erster Linie für die mathematikdidaktische Forschung zum Einsatz von Lernstrategien und zum mathematischen Modellieren. Gleichzeitig trägt die Studie dazu bei, kognitionspsychologische Theorien weiterzuentwickeln und ermöglicht den Ausbau der wissenschaftlichen Grundlage für den Einsatz von Skizzen beim Modellieren im schulischen Mathematikunterricht. Diese Implikationen und Beiträge werden in den folgenden Abschnitten erläutert, gleichzeitig werden aber auch deren Grenzen aufgezeigt.

9.3.1 Implikationen für die Forschung

Ein wichtiger Beitrag der Studie liegt in der Validierung des Befundes, dass die Aufforderung zum Skizzenzeichnen ein wirksames Mittel darstellt, um dem in der bisherigen Forschung häufig beschriebenem Mangel an Skizzennutzung entgegenzuwirken (Rellensmann et al., 2022, S. 414). Die Skizzenaufforderung führte dazu, dass besonders viele Schülerinnen und Schüler des neunten und zehnten Jahrgangs Skizzen zu den Modellierungsaufgaben erstellten. Zwar kann kein Vergleich zur spontanen Skizzennutzung gezogen werden, die Ergebnisse vorhergehender Studien deuten jedoch darauf hin, dass die Häufigkeit der Skizzennutzung bei spontaner Umsetzung deutlich geringer ausfällt (z. B. De Bock et al., 2003; Uesaka & Manalo, 2011a).

Gleichzeitig verdeutlicht die vorliegende Studie, dass die bloße Aufforderung zum Skizzenzeichnen keinen direkten Effekt auf die erfolgreiche Bewältigung geometrischer Modellierungsaufgaben hat. Dies kann zum einen darin begründet sein, dass die Skizzenqualität verbesserungswürdig ist. Zum anderen kann die Ursache darin liegen, dass der Nutzen der Skizze den Aufwand ihrer Konstruktion nicht immer kompensiert oder übersteigt. Möglicherweise können die Lernenden einige Modellierungsaufgaben auch ohne Skizze gut lösen (Van Essen & Hamaker, 1990), sodass die Skizzenaufforderung zu einer ineffektiven Zusatzaufgabe wird.

Nichtsdestotrotz unterstreicht die empirische Untersuchung die hohe Relevanz von Strategien beim Bearbeiten geometrischer Modellierungsaufgaben, die bereits aus der

Problemlöseforschung bekannt ist: Es konnte ein intensiver Zusammenhang zwischen der Qualität des Skizzenzeichnens und der Modellierungsleistung nachgewiesen werden, der in den meisten analysierten Modellierungsschritten unter Auspartialisierung des jeweils vorherigen Modellierungsschrittes die Vorhersagekraft der geometriebezogenen Leistung sogar überstieg (beim Bilden des Realmodells, beim Bilden des allgemeinen und beim Bilden des spezifischen Modells). Dies bestätigt eindrücklich, dass beim Modellieren, wie bereits für das Problemlösen postuliert (Krawec, 2014, S. 112), nicht die mathematischen Fähigkeiten allein die Modellierungsleistung bestimmen, sondern der Modellierungsprozess auch im engen Zusammenhang mit der Anwendung von Strategien steht.

Erste quantitative Ergebnisse erbringt die vorliegende Studie dazu, dass das Zeichnen einer qualitativ hochwertigen Skizze vor allem mit den Modellierungsteilprozessen des *Verstehens* und *Strukturierens* sowie des *Mathematisierens* zusammenhängt, während das *mathematische Arbeiten* keinen Zusammenhang mit dem Zeichnen hochwertiger Skizzen aufweist. In der bisherigen Forschung hat sich bereits gezeigt, dass das Skizzenzeichnen für diesen Teilprozess weniger bedeutsam ist, während es insbesondere mit dem erfolgreichen Verstehen, Strukturieren und Mathematisieren einhergeht (z. B. Rellensmann, 2019, S. 252). Jedoch fehlten bisher die quantitativen Belege dazu, die durch die vorliegende Studie erbracht werden. Inwieweit sich das Zeichnen qualitativ hochwertiger Skizzen auf die Modellierungsteilprozesse des *Interpretierens* und *Validierens* auswirkt, bleibt zu erforschen, da diese Teilprozesse in der vorliegenden Studie nicht untersucht wurden.

Die Wirksamkeit der verschiedenen Skizzenarten, d. h. schematischer und situativer Skizzen, wird in der bisherigen empirischen Forschung sehr kontrovers diskutiert. Mehrere Studien deuten darauf hin, dass ausschließlich schematische Skizzen einen Nutzen für die erfolgreiche Bewältigung mathematischer Aufgaben haben, während situative Skizzen keinen oder sogar einen negativen Effekt haben (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Van Garderen & Montague, 2003). Allerdings gibt es Hinweise darauf, dass situative Skizzen auch nützlich sein können (Rellensmann, 2019, S. 268). Die vorliegende Untersuchung liefert nun differenzierte Erkenntnisse darüber, inwiefern sich die Wirksamkeit zwischen den verschiedenen Skizzenarten unterscheiden könnte: Je schematischer die Skizzen gezeichnet werden, desto höher ist die allgemeine Modellierungsleistung. Dieser Befund erklärt, warum das Zeichnen situativer Skizzen in bisherigen Studien häufig als nicht wirksam beschrieben wurde. Eine differenzierte Analyse hinsichtlich der einzelnen Modellierungsphasen zeigt jedoch, dass das Zeichnen eher situativer Skizzen mit der erfolgreichen Bewältigung des Verstehens und Strukturierens beim geometrischen Modellieren zusammenhängt, während eher schematische Skizzen mit dem Prozess des Mathematisierens einhergehen. Demnach können je nach Modellierungsschritt unterschiedliche Arten von Skizzen hilfreich sein.

Auch zur Wirkung des Skizzenzeichnens in Abhängigkeit vom jeweiligen Leistungsniveau der Lernenden lagen bisher ebenfalls kontroverse Ergebnisse vor (z. B. J. L. Booth & Koedinger, 2012; Mayer & Gallini, 1990, S. 718). In der vorliegenden Studie zeigte sich, dass die Aufforderung zum Skizzenzeichnen bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern tendenziell zu einer Verbesserung beim Bewältigen geometrischer Modellierungsaufgaben führte, während sich die Skizzenaufforderung bei Lernenden des mittleren und hohen Leistungsniveaus nachteilig auswirkte. Die Befunde sprechen dafür, dass Lernende in der neunten und zehnten Jahrgangsstufe bereits über die notwendigen geometrischen, modellierungs- oder strategiebezogenen Vorkenntnisse als Grundlage für die erfolgreiche Bewältigung von Modellierungsaufgaben verfügen, sodass die Skizzenaufforderung nicht zu einer Überforderung der leistungsschwachen Lernenden führte (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 501). Vielmehr liefert die vorliegende Studie Evidenz für die Annahme aus anderen Studien, dass das Skizzenzeichnen bei leistungsschwachen Lernenden mit der erfolgreichen Aufgabenbewältigung einhergeht (Krawec, 2014; Mayer & Gallini, 1990; Veloo, 1996), während sich bei Leistungsstärkeren kein Effekt zeigt. Es scheint, dass die Strategie des Skizzenzeichnens für Leistungsschwächere das Potenzial bietet, kognitive Prozesse zu unterstützen, während Lernstärkere die Aufgaben möglicherweise auch ohne das Zeichnen einer Skizze hätten lösen können. Daher war das Skizzenzeichnen für die leistungsstarken Teilnehmenden vermutlich eine überflüssige Zusatzaufgabe, die kognitive Kapazitäten beanspruchte, ohne dass ein kognitiver Zugewinn erzielt wurde.

Weiterhin liefert die vorliegende Untersuchung neue Erkenntnisse über die Themenspezifität bei der Anwendung des Skizzenzeichnens als Strategie. Bisherige Studien zum Skizzenzeichnen beschränken sich häufig auf einzelne mathematische Themen und ziehen Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen, deren Übertragbarkeit auf andere Themen unklar bleibt. In der vorliegenden Untersuchung wurden zwei geometrische Themen ausgewählt, bei denen eine Übertragbarkeit wahrscheinlich ist. Tatsächlich gab es viele Ergebnisse, die sich zwischen den beiden geometrischen Themen kaum unterschieden. So gelingt es den Lernenden beim Thema *Satz des Pythagoras* und beim Thema *Flächeninhalte* offensichtlich ähnlich häufig, eine Skizze zu zeichnen; es gelingt ihnen ähnlich gut, die lösungsrelevanten Zahlenwerte in der Skizze einzutragen sowie ähnlich gut, das mathematische Modell in der Skizze korrekt darzustellen. Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass es sich um Skizzenkriterien handelt, die für verschiedene geometrische Themen generalisierbar sind. Aus einer vorherigen Studie ist bereits bekannt, dass die Fähigkeiten des Skizzenzeichnens hingegen nicht auf andere Teilgebiete der Mathematik (z. B. Analysis) übertragbar sind (Bräuer et al., 2021).

Unstrittig ist auch, dass der bereits in zahlreichen Studien nachgewiesene Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und der erfolgreichen Bewältigung geometrischer Modellierungsaufgaben (Bräuer et al., 2021; Rellensmann et al., 2022; Schnotz & Bannert, 2003; Schwamborn et al., 2010; Stern et al., 2003; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter, 2001) für verschiedene geometrische Themen generalisierbar ist. Neue Erkenntnisse erbringt die vorliegende Studie dazu, dass dies auch für den Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und den einzelnen Modellierungsphasen gilt. Auch wenn es hier teilweise Unterschiede in der Stärke des Zusammenhangs gibt, zeigt sich dennoch themenübergreifend die deutliche Tendenz, dass der Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und der erfolgreichen Bewältigung beim Bilden des Realmodells am stärksten ist und auch beim Bilden des allgemeinen mathematischen Modells stark ist, während beim Bilden des spezifischen Modells ein geringerer, aber immer noch deutlicher Zusammenhang vorliegt. Beim Bestimmen des mathematischen Resultats besteht hingegen kein Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und der erfolgreichen Bewältigung. Insgesamt zeigt sich über die Phasen des Modellierungsprozesses eine abnehmende Tendenz, die auf die Auspartialisierung und die idealisierte Annahme des Modellierungskreislaufes zurückzuführen sein kann. Gleichzeitig liefert diese Tendenz aber auch Hinweise darauf, dass die Wirksamkeit des Skizzenzeichnens unabhängig vom geometrischen Thema in den ersten Phasen des Modellierungskreislaufs größer ist, während es in den letzten Phasen weniger nützlich ist. Auch hinsichtlich des Abstraktionsgrades zeigt sich, dass der Zusammenhang zwischen situativeren Skizzen mit der Leistung beim Bilden des Realmodells sowohl beim Thema *Satz des Pythagoras* als auch beim Thema *Flächeninhalte* auftritt. Die Skizzenaufforderung hat unabhängig vom jeweiligen Thema grundsätzlich *keine* Wirkung auf die allgemeine Modellierungsleistung. Während mögliche Ursachen für die ausbleibenden Effekte bereits ausführlich diskutiert wurden (vgl. Kapitel 9.1.5), ist für folgende Forschungen hervorzuheben, dass die ausbleibende Wirkung offenbar kein Ergebnis ist, das durch themenspezifische Besonderheiten bedingt ist.

Zwischen den beiden geometrischen Themen *Satz des Pythagoras* und *Flächeninhalte* gab es jedoch auch Unterschiede hinsichtlich des Skizzenzeichnens, der Wirkung des Zeichnens und des Effekts der Skizzenaufforderung:

- Die Lernenden zeichneten bessere Skizzen zum Thema *Satz des Pythagoras* als zum Thema *Flächeninhalte*. Es gelang ihnen dabei besser, die lösungsrelevanten Objekte und Relationen in der Skizze darzustellen.
- Die Lernenden zeichneten häufiger schematische Skizzen zum Thema *Flächeninhalte* als zum Thema *Satz des Pythagoras*. Der Abstraktionsgrad der Skizzen stand hingegen nur beim Thema *Satz des Pythagoras* in einem positiven Zusammenhang mit dem Modellierungserfolg – hier vor allem mit dem Teilschritt des Mathematisierens.
- Die explizite Darstellung des mathematischen Modells zeigte nur beim Thema *Satz des Pythagoras* einen Zusammenhang mit der erfolgreichen Aufgabenlösung über die Darstellung der Objekte und Relationen hinaus.
- Die Skizzenaufforderung bewirkte im Vergleich zum Skizzenverbot nur beim Thema *Satz des Pythagoras* eine Leistungssteigerung beim Bilden des Realmodells.

Bei drei der vier Unterschiede deutet sich ein Vorteil beim Thema *Satz des Pythagoras* gegenüber dem Thema *Flächeninhalte* an. Es scheint, dass die Strategie des Skizzenzeichnens hinsichtlich der Skizzenqualität, der Relevanz des mathematischen Modells in der Skizze sowie der Wirkung beim Bilden des Realmodells beim Thema *Satz des Pythagoras* besondere Vorteile mit sich bringt. Damit bestätigen sich die Annahmen aus Kapitel 3.5.2, dass die Skizze bei diesem Thema besonders hilfreich ist, um z. B. das rechtwinklige Dreieck zu entdecken, Katheten und Hypotenuse zu identifizieren oder das richtige Lösungsverfahren zu bestimmen. Rellensmann (2019, S. 266) hatte anhand ihrer Studienergebnisse die Hypothese formuliert, dass das zieloffene Entdecken eine hilfreiche Nutzungsweise der Skizze darstellt, während die Skizze als fertiges mathematisches Objekt keinen Vorteil bietet. In Anlehnung daran sowie vor dem Hintergrund der themenspezifischen Analysen (vgl. Kapitel3.5.2 und 3.5.3) könnte das Skizzenzeichnen zum Thema *Satz des Pythagoras* also mehr Möglichkeiten dazu bieten, aktiv mathematische Objekte und Strukturen zu entdecken, während die Skizzen beim Thema *Flächeninhalte* möglicherweise häufiger als fertige mathematische Objekte dargestellt werden. Zudem zeigt der starke Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Modellierungsleistung das große Potenzial auf, dass ein Training in der Zeichenstrategie mit sich bringen kann (Hembree, 1992, S. 263).

9.3.2 Theoretische Implikationen

Die Ergebnisse zum Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und Modellierungsleistung stimmen mit der ***prognostischen Theorie*** des Skizzenzeichens überein, die beinhaltet, dass je höher die Qualität einer Zeichnung ist, desto besser eine Aufgabe bewältigt wird (Schmidgall et al., 2019; Schwamborn et al., 2010, S. 872). Die hohe Vorhersagekraft der Skizzenqualität spricht dafür, dass das Zeichnen einer hochwertigen Skizze eine positive Wirkung auf die Bewältigung geometrischer Modellierungsaufgaben haben könnte. Dies geht einher mit dem ***Kognitiven Modell der Zeichenkonstruktion*** (Van Meter & Firetto, 2013), bei dem das Zeichnen vor allem dann als hilfreich eingeschätzt wird, wenn das mentale Modell, das durch die Zeichenaktivität aufgebaut wird, mit dem Format der Leistungsbewertung in etwa übereinstimmt.

Neue Erkenntnisse liefert die empirische Untersuchung zur Spezifizierung des *Kognitiven Modells der Zeichenkonstruktion* im Hinblick auf das mathematische Modellieren und die Modellierungsphasen. Der stärkste Zusammenhang zwischen der Skizzenqualität und der Leistung zeigte sich beim *Bilden des Realmodells* und beim *Bilden des allgemeinen mathematischen Modells*. Diese Ergebnisse bedürfen zwar weiterer Evidenzen. Dennoch deutet sich an, dass man die prognostische Zeichentheorie im Hinblick auf das geometrische Modellieren insofern spezifizieren kann, dass sich der prognostische Zeicheneffekt vor allem bei den prototypisch ersten Modellierungsteilprozessen des *Verstehens*, *Strukturierens* und *Mathematisierens* zeigt.

Außerdem liefert die vorliegende Studie Belege für die Hypothese, dass der prognostische Zeicheneffekt vor allem bei Tests zum Wissen höherer Ordnung auftritt als bei weniger anspruchsvollen Tests zum Behalten und Reproduzieren von Informationen (Schmidgall et al., 2019, S. 151). Zumindest beim Thema *Satz des Pythagoras* ergab die aufgabenweise Analyse, dass der positive Effekt der Skizzenaufforderung auf das Bilden des Realmodells vor allem bei komplexeren Aufgaben auftrat, die ein umfassenderes mathematisches Modell zur Lösung erforderten als die übrigen Aufgaben.

Wenig empirische Evidenz liefert die vorliegende Studie hingegen für die ***generative Wirkung*** des Skizzenzeichnens. Zum einen konnte kein Einfluss der Skizzenhäufigkeit auf die

Modellierungsleistung nachgewiesen werden, was darauf hindeutet, dass das Zeichnen der Skizze keine grundsätzlich positive Wirkung bei der Bewältigung mathematischer Modellierungsaufgaben hat. Auch die Aufforderung zum Skizzenzeichnen im Vergleich zum Skizzenverbot hatte nur einen sehr begrenzten positiven Effekt, nämlich insbesondere bei der Bildung des Realmodells. Bei einzelnen Aufgaben hingegen hatte die Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot sogar einen nachteiligen Effekt auf die Leistung, insbesondere beim Bilden des spezifischen mathematischen Modells und beim Bestimmen des mathematischen Resultats. Damit liefert die Studie Hinweise darauf, dass der kognitive Aufwand für das Zeichnen einer Skizze den Nutzen für den Modellierungsprozess häufig nivelliert oder sogar übersteigt, indem sich die unerwünschte extrinsische kognitive Belastung erhöht, während der Nutzen hinsichtlich der lernbezogenen kognitiven Belastung gering ist (Sweller, 2005a; Sweller et al., 1998). Die Studie liefert damit vor allem Belege für die Theorie der begrenzten Arbeitsgedächtniskapazität (Sweller, 2005a) als eine der zentralen Annahmen der ***Kognitiven Theorie multimedialen Lernens*** (Mayer, 2005). Zwar wird gemäß der Theorie der dualen Kodierung angenommen, dass der Einbezug des ikonischen Kanals durch das Zeichnen der Skizze zusätzlich zum verbalen Kanal (der schriftlichen Aufgabenstellung) den Vorteil bietet, dass mehr Informationen in beiden Kanälen statt nur in einem verarbeitet werden können. Die Ergebnisse der vorliegenden Studie sprechen jedoch eher dafür, dass die Übersetzung der verbalen Informationen in die externe Skizze die begrenzte Arbeitsgedächtniskapazität stark beansprucht, sodass die Nutzung beider Kanäle letztlich keinen Leistungszuwachs bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben bringt.

Dazu können ***Split-Attention-*** und ***Redundanzeffekte*** (Ayres & Sweller, 2005; Sweller, 2005b) beitragen. Das Ausbleiben positiver Effekte der Skizzenaufforderung und die partiellen Leistungsminderungen deuten darauf hin, dass die Lernenden ihre Aufmerksamkeit aufteilen müssen (*split attention*), um die Textbasis zu verstehen und gleichzeitig in das bildliche Modell zu übersetzen (intern und extern), was zu einer Leistungsminderung führt. Darüber hinaus ist es nach den Ergebnissen der Studie wahrscheinlich, dass das Zeichnen der Skizze in einigen Fällen – z. B. bei einfachen Aufgaben oder bei leistungsstarken Lernenden – eine überflüssige Wiederholung (*Redundanz*) darstellte, da es für die Lösung der Aufgabe nicht erforderlich war und somit lediglich eine kognitive Belastung ohne Mehrwert erzeugte. Interessant wären Folgestudien, die den kognitiven Aufwand für das Zeichnen von Skizzen oder das Auftreten von Split-Attention- und Redundanzeffekten untersuchen.

Auf Grundlage des ***Integrierten Modells des Text- und Bildverstehens*** nach Schnotz und Bannert (2003) wurde angenommen, dass das Zeichnen einer Skizze einen besonderen Vorteil bietet, weil das mentale Modell in seiner Struktur analog zu visuellen Bildern aufgebaut wird. Da die Lernenden also ohnehin das mentale Modell mit visueller Struktur aufbauen müssen, wurde theoriegeleitet angenommen, dass der Zeichenprozess den Aufbau dieses mentalen Modells unterstützt, indem z. B. die Integration des verbalen und visuellen Modells gefördert wird oder Überprüfungen des mentalen Modells anhand der externen Skizze durchgeführt werden können (Van Meter & Firetto, 2013; Van Meter & Garner, 2005). Grundsätzlich erscheinen diese Annahmen schlüssig, die vorliegende Studie zeigt jedoch, dass diese Theorien nicht ausreichen, um Prozesse und Wirkungen beim Modellieren zu beschreiben, sondern dass inhaltliche und kontextuelle Bedingungen eine wichtige Rolle spielen.

Das fachwissenschaftliche Niveau der Lernenden sowie die Komplexität des Leistungstests könnten zwei relevante Bedingungsfaktoren sein, auf die die vorliegende Untersuchung sowie frühere Forschungsarbeiten hinweisen (J. L. Booth & Koedinger, 2012, S. 501; Mayer & Gallini, 1990, S. 725; Schmidgall et al., 2019, S. 139). Zum einen wirkt sich die Aufforderung zum Skizzenzeichnen im Vergleich dem Skizzenverbot, wenn überhaupt, bei komplexeren Aufgaben positiv auf die Bildung des Realmodells aus, während sich bei Aufgaben mit einfachen mathematischen Modellen keine Effekte zeigten (vgl. Kapitel 8.6.3.1). Zum anderen hat die Skizzenaufforderung tendenziell für leistungsschwächere Lernende eine förderliche Wirkung, während sie für Lernende des mittleren und hohen Leistungsniveaus nachteilig wirkte (vgl. Kapitel 8.6.4.3). Die Ergebnisse weisen auf wichtige Einschränkungen bestehender kognitionspsychologischen Theorien hin, die sich für bestimmte Leistungsgruppen und Schwierigkeitsgrade von Anforderungssituationen ergeben.

Die Tatsache, dass sich die Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot bei der Aufgabe „Wettschwimmen“ – einer Aufgabe, bei der die Problemsituation sehr abstrakt beschrieben wurde – negativ auf die Modellierungsleistung auswirkte, liefert Belege für die Annahme, dass ein hoher Abstraktionsgrad der Aufgabenstellung dazu führen kann, dass die propositionale Basis unvollständig bleibt. Diese fragmentarische Basis kann wiederum zur Folge haben, dass keine geeignete Skizze erstellt wird, die den Lösungsprozess unterstützen würde. Somit könnte die Eignung der Strategie nicht nur von der Leistungsgruppe und dem Schwierigkeitsgrad, sondern auch vom jeweiligen Textmaterial abhängen (Van Meter & Firetto, 2013, S. 261).

9.3.3 Didaktische Implikationen für die Unterrichtspraxis

In vielen Schulbüchern ist das Zeichnen einer Skizze bereits als Hilfsstrategie verankert (Diebel et al., 2013; Dormann et al., 2008; Herling et al., 2016, S. 93). Die vorliegende Studie deutet jedoch darauf hin, dass die bloße Aufforderung, eine Skizze zu zeichnen, keinen pauschalen Mehrwert bei der Bearbeitung geometrischer Modellierungsaufgaben erbringt. Zwar scheint die Skizzenaufforderung ein großes Potenzial zu bieten, dem mehrfach berichteten Mangel an Skizzennutzung in der Unterrichtspraxis entgegenzuwirken (De Bock et al., 2003). Allerdings bewirkt die Aufforderung bzw. die bloße Skizzennutzung nicht automatisch eine Verbesserung der Modellierungsleistung (vgl. Kapitel 8.6.1).

Vielmehr verdeutlichen die Ergebnisse, dass beim Lehren und Lernen der Skizzenzeichenstrategie verschiedene Bedingungsfaktoren berücksichtigt werden müssen. Auf die Notwendigkeit, diese Faktoren genauer zu untersuchen, wurde bereits in verschiedenen Studien hingewiesen (z. B. Pantziara et al., 2009, S. 56). Die Untersuchung bestätigt nachdrücklich den bereits vielfach festgestellten engen Zusammenhang zwischen Skizzenqualität und der erfolgreichen Bewältigung geometrischer Modellierungsprozesse (z. B. Schwamborn et al., 2010; Stern et al., 2003; Van Essen & Hamaker, 1990; Van Meter, 2001). Demnach sollten Mathematiklehrkräfte besonders darauf achten, dass die Lernenden qualitativ hochwertige Skizzen anfertigen, die sowohl die lösungsrelevanten Objekte und Relationen, die relevanten Zahlenwerte als auch das mathematische Modell in der Skizze korrekt darstellen. Die Ergebnisse zur Skizzenqualität zeigen, dass die Fähigkeit, qualitativ hochwertige Skizzen zu erstellen, auch im Bereich der geometrischen Themen verbesserungswürdig ist (vgl. Kapitel 8.3.2). Dies unterstreicht die Notwendigkeit, dass Schülerinnen und Schüler das Zeichnen qualitativ hochwertiger Skizzen explizit erlernen und trainieren müssen (Eichler, 2006, S. 45; Fagnant & Vlassis, 2013, S. 163 f.). Dabei erscheint es sinnvoll, das Skizzenzeichnen anhand verschiedener mathematischer Themen zu üben, da die Anwendung der Strategie je nach Thema unterschiedliche Herausforderungen mit sich bringt. So gelingt es den Lernenden bei verschiedenen geometrischen Themen unterschiedlich gut, lösungsrelevante Objekte und Relationen in der Skizze darzustellen sowie schematische oder situative Skizzen zu zeichnen (vgl. Kapitel 8.3).

Das geometriebezogene Leistungsniveau erwies sich in der vorliegenden Studie als ausschlaggebend für die Wirksamkeit der Aufforderung zum Skizzenzeichnen. Für lernschwächere Lernende scheint die Skizzenaufforderung tendenziell hilfreich für die Aufgabenlösung zu sein, während sie für Lernende auf mittlerem und höherem Leistungsniveau nachteilig sein kann (vgl. Kapitel 8.6.4.3). Da es sich um eine Testsituation handelte, in der eine große Anzahl von Aufgaben in einem begrenzten Zeitrahmen gelöst werden musste, können keine gesicherten Schlussfolgerungen darüber gezogen werden, dass die Skizzenaufforderung auch in realen Lernsituationen des Mathematikunterrichts für leistungsschwächere Lernende hilfreich und für leistungsstärkere Lernende nachteilig ist. Denkbar ist, dass sich die Lernenden in realen Lernsituationen mehr Zeit nehmen, um eine qualitativ hochwertige Skizze zu erstellen, die effektiver ist. Außerdem könnte die Strategie des Skizzenzeichnens eine andere Wirksamkeit entfalten, wenn komplexere, völlig unbekannte Modellierungsprobleme behandelt werden. Hingegen ist wahrscheinlich, dass die Lernenden bereits ähnliche Aufgaben zu diesen Themen im Schulunterricht bearbeitet haben.

Bei weiterführenden Untersuchungen zur Validierung in verschiedenen Lern- und Testsituationen könnte das Vorgehen bei der Implementation der Skizzenaufforderung modifiziert werden: Möglicherweise hätten die leitungsstärkeren Lernenden die Skizze bei einigen Aufgaben nicht benötigt, sodass sich ein sukzessives Vorgehen anbietet, bei dem die Lernenden zunächst die Möglichkeit haben, die Modellierungsaufgabe eigenständig zu lösen und erst bei Bedarf, z. B. bei auftretenden Schwierigkeiten, erfolgt die Aufforderung zum Skizzenzeichnen (siehe auch Pantziara et al., 2009, S. 56).

Die nachgewiesenen Zusammenhänge zwischen der Skizzenqualität vor allem mit der Leistung beim Bilden des Realmodells und auch mit der Leistung beim Bilden des mathematischen Modells (vgl. Kapitel 8.4.2) lassen darauf schließen, dass für die Lernenden das Zeichnen einer qualitativ hochwertigen Skizze vor allem in diesen Teilschritten des Modellierens hilfreich sein kann. Hingegen besteht kein Zusammenhang zwischen dem Zeichnen einer qualitativ hochwertigen Skizze und der Leistung beim mathematischen Arbeiten, weshalb ein Anraten der Strategie in diesem Modellierungsschritt vermutlich weniger hilfreich ist. Allerdings ist der Modellierungskreislauf ein prototypisches Modell, das zyklisch aufgebaut ist, sodass keine Rückschlüsse darüber möglich sind, zu welchem Zeitpunkt im Lösungsprozess die Strategie empfohlen werden kann – im Sinne von Beginn, Mitte oder Ende des Bearbeitungsprozesses. Vielmehr muss darauf geachtet werden, in welcher Phase des Modellierens sich die Lernenden befinden, da z. B. die Verstehens- und Strukturierungsprozesse nicht immer nur zu Beginn des Modellierungsprozesses stattfinden, sondern auch zwischendurch erneut auftreten können. Nichtsdestotrotz liefern die Ergebnisse Anhaltspunkte dafür, dass es für die Prozesse des Verstehens, Strukturierens und Mathematisierens gewinnbringend sein kann, die Lernenden zu ermutigen, selbständig qualitativ hochwertige Skizzen zu zeichnen, während eine entsprechende Ermutigung beim mathematischen Arbeiten nicht erfolgversprechend erscheint.

Hinsichtlich des Abstraktionsgrades der Skizzen zeigt sich, dass situative Skizzen für das Verstehen und Strukturieren hilfreicher sind, während für das Mathematisieren das Zeichnen einer schematischen Skizze effektiver ist (vgl. Kapitel 8.4.2). Daraus lässt sich für mathematische Lehr-Lern-Situationen ableiten, dass an die jeweilige Modellierungsphase angepasste Skizzenaufforderungen sinnvoll sind. Allerdings bleibt unklar, inwieweit es zielführend ist, Lernende beim geometrischen Modellieren aufzufordern, eine situative oder eine mathematische Skizze zu zeichnen, da sich in einer vorherigen Untersuchung gezeigt hat, dass entsprechende Aufforderungen nicht zwangsläufig dazu führen, dass Lernende Skizzen mit unterschiedlichem Abstraktionsgrad zeichnen (Rellensmann et al., 2022). Möglicherweise müssen sich die Lernenden erst ausreichend Wissen und Fertigkeiten über das Skizzenzeichen mit unterschiedlichen Abstraktionsgraden aneignen, um diese gezielt darstellen zu können.

10 Ausblick

Die vorliegende Studie leistet einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis der Art und Weise, wie Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen neun und zehn Skizzen zu geometrischen Modellierungsaufgaben anfertigen, sowie zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen dem Skizzenzeichnen und der Bewältigung des Modellierungsprozesses. Dabei wurden insbesondere neue Erkenntnisse zur Wirkung des Skizzenzeichnens auf die erfolgreiche Bewältigung einzelner Teilprozesse des Modellierens, zur Bedeutsamkeit der expliziten Darstellung des mathematischen Modells (insbesondere beim Thema *Satz des Pythagoras*), zur Relevanz des Leistungsniveaus der Lernenden sowie zur Übertragbarkeit der Erkenntnisse zwischen verschiedenen geometrischen Themen generiert.

Gleichzeitig hat die Studie weiterführende Fragen und Anknüpfungspunkte für zukünftige Forschungsperspektiven aufgeworfen. Im Folgenden werden Leitfragen für diese Forschungsperspektiven formuliert:

- Welche Wirkprozesse bedingen die ausbleibenden Effekte der Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot trotz des stark positiven Zusammenhangs zwischen der Skizzenqualität und der Modellierungsleistung? Welche Wirkprozesse bedingen insbesondere die negativen Effekte der Skizzenaufforderung im Vergleich zum Skizzenverbot bei leistungsstarken Lernenden?
- Wie kann die Aufforderung zum Skizzenzeichnen instruktional unterstützt werden, um eine positive Wirkung auf die Modellierungsleistung insgesamt zu erzielen? Ist ein Zeichentraining notwendig, um eine positive Wirkung zu erzielen? Welche Rolle spielen dabei metakognitive Kompetenzen?
- Inwieweit lassen sich die in der Studie nachgewiesenen Zusammenhänge (z. B. Skizzenqualität mit den einzelnen Teilprozessen des Modellierens, das Zeichnen situativer Skizzen mit der erfolgreichen Bildung des Realmodells usw.) für andere – auch nicht-geometrische – Themen nachweisen? Gibt es hier Unterschiede zu den Zusammenhängen im Bereich der Geometrie?
- Wie kommen Unterschiede in den Effekten der Skizzenaufforderung beim Modellieren in Abhängigkeit vom jeweiligen geometrischen Leistungsniveau zustande? Welche kognitiven Wirkprozesse finden statt, die diese Unterschiede bedingen?
- Lassen sich die aufgezeigten empirischen Befunde auch für unterschiedliche Settings und Aufgabentypen nachweisen? Welche Rolle spielt dabei die Aufgabenkomplexität? Wie verhält es sich in kooperativen Lernsettings?

Vor allem die Frage nach den Wirkprozessen bei der Wirkung der Skizzenaufforderung drängt sich angesichts der empirischen Ergebnisse der vorliegenden Studie auf, da diese – wenn auch teilweise erklärbar – besonders unerwartet erscheinen. Auch wenn oder gerade weil die Strategie des Skizzenzeichnens in der Unterrichtspraxis zunehmend Anwendung findet, ist und bleibt es ein weiter zu untersuchendes Forschungsdesiderat, welche Wirkprozesse und Bedingungsfaktoren zu den immer wieder ambivalenten empirischen Befunden hinsichtlich der Wirkung des Skizzenzeichnens führen. Obwohl die Forschungsdefizite seit langem bekannt sind, ist der Forschungsstand und die Anzahl aktueller Publikationen zu diesem Thema nach wie vor gering. Möglicherweise ist dies auf die Komplexität des Bedingungsgefüges und der kognitiven Prozesse bei der Anwendung von Strategien zurückzuführen. Zukünftige Untersuchungen sollten darauf ausgerichtet sein, zum einen weitere explikative Beiträge zum Bedingungs- und Prozessgefüge zu liefern und zum anderen quantitative Belege zur Validierung der bisherigen, vereinzelten Forschungsergebnisse zu erbringen. Besonders vielversprechend erscheinen dabei die Untersuchung der Wirkung des Skizzenzeichnens in den Teilprozessen des Modellierens, die Berücksichtigung leistungsspezifischer Voraussetzungen der Lernenden sowie die Fokussierung auf relevante Skizzenmerkmale (Qualität, explizite Darstellung des mathematischen Modells und Abstraktionsgrad). Im Hinblick auf die Implementierung der Strategie in der Praxis des Mathematikunterrichts ist für die weitere Forschung zudem von Interesse, inwiefern instruktionale Unterstützungen und bestimmte Lernsettings für die Lernenden hilfreich sein können. Die vorliegenden Forschungsergebnisse deuten darauf hin, dass individuelle und an den Lösungsprozess angepasste Maßnahmen zielführender sind als pauschale Ansätze.

Literatur

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *41*(5), 627–636. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0189-1

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2010). Representational flexibility in linear-function problems: A choice/no-choice study. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. de Jong, & J. Elen (Hrsg.), *Use of representations in reasoning and problem solving. Analysis and improvement* (S. 74–93). https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780203847824

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183–198. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Ainsworth, S., Prain, V., & Tytler, R. (2011). Drawing to learn in science. *Science*, *333*(6046), 1096–1097.

Ainsworth, S., & Th Loizou, A. (2003). The effects of self-explaining when learning with text or diagrams. *Cognitive Science*, *27*(4), 669–681.

Alshwaikh, J. (2011). *Geometrical diagrams as representation and communication: A functional analytic framework*. (Dissertation). University of London.

Amir, M. F. (2022). Learner-generated drawings by students with mathematical learning difficulties in finishing open number sentences. *Jurnal Elemen*, *8*(1), 216–230. https://doi.org/10.29408/jel.v8i1.4556

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Ayabe, H., Manalo, E., & Hanaki, N. (2020). Elucidating the effects of diagram use training for math word problem solving. In A.-V. Pietarinen, P. Chapman, L. B. Smet, V. Giardino, J. Corter, & S. Linker (Hrsg.), *Diagrammatic Representation and Inference. 11th International Conference, Diagrams 2020 Tallinn, Estonia, August 24–28, 2020 Proceedings* (S. 548–552). Tallinn, Estonia: Springer.

Ayres, P., & Sweller, J. (2005). The split-attention principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 135–146). New York: Cambridge University.

Barmby, P., Bolden, D., Raine, S., & Thompson, L. (2013). *Developing the use of visual representations in the primary classroom*. Abgerufen von https://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Developing the use of visual representations in the primary classroom 13Jun13.pdf [19.01.2018].

Bayrisches Staatsministerium für Bildung und Kultus. (2016). *LehrplanPLUS Realschule*. Abgerufen von https://www.lehrplanplus.bayern.de/schulart/realschule [03.04.2020].

Besser, M., Hagena, M., & Leiss, D. (2014). Lehrerlösungsprozesse beim mathematischen Modellieren: Wegen 20 Cent muss man doch nicht fahren - oder? In G. Kaiser & H.-W. Henn (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (S. 49–62).

Biehler, R., & Leiss, D. (2010). Empirical research on mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 5–8. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0004-0

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education : The 14th ICMI study*. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Blum, W., & Leiss, D. (2003). Diagnose- und Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten Unterricht am Beispiel Mathematik – Vorstellung des Projekts DISUM. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 129–132). Hildesheim: Franzbecker.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, *128*, 18–21.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Booth, J. L., & Koedinger, K. R. (2012). Are diagrams always helpful tools? Developmental and individual differences in the effect of presentation format on student problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, *82*(3), 492–511. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02041.x

Booth, R. D. L., & Thomas, M. O. J. (1999). Visualization in mathematics learning: Arithmetic problem-solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 169–190. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00027-9

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens. Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht* (1. Aufl.). https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9784-8

Borromeo Ferri, R., Greefrath, G., & Kaiser, G. (Hrsg.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer.

Bortz, J., & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation. Für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Bräuer, V., & Leiss, D. (2018). Erfolgreicher Modellieren mit Skizze ? – Effekte des Zeichnens von Skizzen bei Modellierungsaufgaben zum Satz des Pythagoras und zu linearen Funktionen. In F. D. der M. der U. Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 345–348). https://doi.org/http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-19266

Bräuer, V., Leiss, D., & Schukajlow, S. (2021). Skizzen zeichnen zu Modellierungsaufgaben – Eine Analyse themenspezifischer Differenzen einer Visualisierungsstrategie beim mathematischen Modellieren. *Journal fur Mathematik-Didaktik*, *42*(2), 491–523. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00182-7

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, *19*(1), 1–15. https://doi.org/10.1037/h0044160

Bruner, J. S. (1968). *Toward a theory of instruction*. New York: Norton.

Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., & Aiken, L. S. (2003). *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences* (3. Aufl.). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Abgerufen von https://www.thecorestandards.org/Math/ [03.04.2020].

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*(4), 343–363. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0959-4752(98)00051-6

Cromley, J. G., Du, Y., & Dane, A. P. (2020). Drawing-to-learn: Does meta-analysis show differences between technology-based drawing and paper-and-pencil drawing? *Journal of Science Education and Technology*, *29*(2), 216–229. https://doi.org/10.1007/s10956-019-09807-6

Csíkos, C., Szitányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 47–65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on student's performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, *13*(4), 441–463. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00040-3

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., & Verschaffel, L. (2013). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *Journal of Experimental Education*, *82*(1), 103–120. https://doi.org/10.1080/00220973.2012.745468

Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verschaffel, L. (2015). Do students attend to representational illustrations of non-standard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they? *Instructional Science*, *43*, 147–171. https://doi.org/10.1007/s11251-014-9332-7

Dewolf, T., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2017). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical word problems more realistically? *European Journal of Psychology of Education*, *32*, 335–351. https://doi.org/10.1007/s10212-016-0308-7

Diebel, R., Hardt, U., Lohscheider, E., Meyer, S., Müller, A., Pflüger, E., … Weiß, P. (Hrsg.). (2013). *MatheForum. Arbeitsbuch 9*. Braunschweig: Schroedel.

Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *7*(3), 4–8.

diSessa, A. A. (2004). Metarepresentation: Native competence and targets for instruction. *Cognition and Instruction*, *22*(3), 293–331. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2203_2

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *27*(3–4), 200–219. https://doi.org/10.1007/BF03339039

Dormann, H., Golenia, J., Illigens, P., Limke, U., Rehse, M., & Schulze ten Berge, M. (2008). *Mathematik Denken und Rechnen. Schülerband 9*. Braunschweig: Schroedel.

Dreher, A. (2013). Den Wechsel von Darstellungsformen fördern und fordern oder vermeiden? Über ein Dilemma im Mathematikunterricht. In J. Sprenger, A. Wagner, & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule.* (S. 215–226). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Hrsg.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* (S. 33–48). Assisi, Italien: PME.

Duval, R. (1999). Representation vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 3–26). Morelos, Mexico: PME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *46*(1), 159–170. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0565-8

Eichler, K.-P. (2006). Zur Entwicklung von Können im Zeichnen. *Grundschule*, *38*(5), 42–47.

Eid, M., Gollwitzer, M., & Schmitt, M. (2017). *Statistik und Forschungsmethoden: Lehrbuch* (5. Aufl.).

Eifler, S. (2014). Experiment. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 195–210). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Elia, I., & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 327–334). Bergen, Norway: PME.

Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 149–168. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9476-4

Field, A. (2018). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics* (5. Aufl.). Los Angeles: Sage.

Fiorella, L., & Zhang, Q. (2018). Drawing boundary conditions for learning by drawing. *Educational Psychology Review*, *30*(3), 1115–1137. https://doi.org/10.1007/s10648-018-9444-8

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Freie und Hansestadt Hamburg/Behörde für Schule und Berufsbildung. (2011). *Bildungsplan Stadteilschule: Jahrgangsstufe 5-11. Mathematik*. Abgerufen von https://www.hamburg.de/resource/blob/122968/91ab0af4949763ef650814c06a77d127/mathematik-sts-2022-data.pdf [10.12.2020].

Friedrich, H. F., & Mandl, H. (2006). Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfeldes. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 1–26). Göttingen: Hogrefe.

Fuson, K. C., & Willis, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *81*(4), 514–520. https://doi.org/10.1037//0022-0663.81.4.514

Galbraith, P. L., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137–165. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 397–430). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Goldin, Gerald, & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In G. Goldin, N. Shteingold, A. Cuoco, & F. Curcio (Hrsg.), *The roles of representations in school mathematics* (S. 1–23). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, *7*(4), 389–397. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00011-X

Grawemeyer, B., & Cox, R. (2004). The effect of knowledge-of-external-representations upon performance and representational choice in a database query task. In A. F. Blackwell, K. Marriott, & A. Shimojima (Hrsg.), *Diagrammatic representation and inference, Third International Conference, Diagrams 2004* (S. 351–354). Berlin, Heidelberg: Springer.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnes in der Sekundarstufe*. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2679-6

Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modelling. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. Salett Biembengut (Hrsg.), *Mathematical modelling in education research and practice* (S. 173–184). Switzerland: Springer.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., & Ferri, R. B. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe* (S. 11–38). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from german speaking countries*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1

Greer, B., & Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (S. 218–264). https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E., & Truxaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving. *Cognition and Instruction*, *6*(3), 223–283. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0603_2

Hall, V. C., Bailey, J., & Tillman, C. (1997). Can student-generated illustrations be worth ten thousand words? *Journal of Educational Psychology*, *89*(4), 677–681. https://doi.org/10.1037/0022-0663.89.4.677

Hammann, M., & Jördens, J. (2014). Offene Aufgaben codieren. In D. Krüger, I. Parchmann, & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 169–178). Berlin, Heidelberg: Springer.

Hasemann, K., & Stern, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben - Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *23*(3/4), 222–242. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF03338957

Hayen, J. (1982). Die Erschließung der Geometrie in der Hauptschule. In H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Geometrie: didaktische Materialien für die Hauptschule* (S. 31–56). Stuttgart: Klett.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, *91*(4), 684–689. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Heinrich, F., Bruder, R., & Bauer, C. (2015). Problemlösen lernen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 279–302). Berlin, Heidelberg: Springer.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *41*(5), 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hellenbrand, J. (2018). *Lernen durch sinnstiftendes Zeichnen*. (Dissertation). Universität Duisburg-Essen.

Hellenbrand, J., Mayer, R. E., Opfermann, M., Schmeck, A., & Leutner, D. (2019). How generative drawing affects the learning process: An eye-tracking analysis. *Applied Cognitive Psychology*, *33*(6), 1147–1164. https://doi.org/10.1002/acp.3559

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving : A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 242–273.

Herling, J., Kuhlmann, K.-H., Scheele, U., & Wilke, W. (2016). *Mathematik 9. Schülerband. Grundkurs*. Braunschweig: Schroedel.

Hertz, H. (1894). *Die Prinzipien der Mechanik. In neuem Zusammenhange dargestellt*. Leipzig: Metzger & Wittig.

Hitt, F. (2002a). Construction of mathematical concepts and cognitive frames. In F. Hitt (Hrsg.), *Representations and mathematics visualization* (S. 241–262). Mexiko: International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN.

Hitt, F. (2002b). Working group on representations and mathematics visualization PMENA XX (North Carolina, 1998). In F. Hitt (Hrsg.), *Representations and mathematics visualization* (S. 1–8). Mexiko: Cinvestav-IPN.

Holzäpfel, L., & Leiss, D. (2014). Modellieren in der Sekundarstufe. In *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufabu im Unterricht der Sek. I und II* (S. 159–178).

Jonassen, D. H. (2003). Designing research-based instruction for story problems. *Educational Psychology Review*, *15*(3), 267–296. https://doi.org/10.1023/A:1024648217919

Jorna, R., & Van Heusden, B. (2003). Why representation(s) will not go away: Crisis of concept or crisis of theory? *Semiotica*, *143*, 113–134. https://doi.org/10.1515/semi.2003.001

Kadunz, G. (2000). Visualisierung, Bild und Metapher. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(3–4), 280–302. https://doi.org/10.1007/bf03338922

Kadunz, G. (2015). *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik*. https://doi.org/10.1007/978-3-642-55177-2

Kadunz, G., & Sträßer, R. (2008). *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I* (2. Aufl.). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 2* (S. 66–84). Bad Salzdetfurth ü. Hildesheim: Franzbecker.

Kaput, J. J. (1987). Representational systems and mathematics. In C. Javier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 19–26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265–281. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80062-7

Kautschitsch, H. (2015). Zur Rolle von Zeichnungen beim Beweisen im Mathematikunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 143–162). Berlin, Heidelberg: Springer.

Klauer, K. J., & Leutner, D. (2012). *Lehren und Lernen. Einführung in die Instruktionspsychologie* (2. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Koedinger, K. R., & Terao, A. (2002). A cognitive task analysis of using pictures to support pre-algebraic reasoning. In W. D. Gray & C. D. Schunn (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (S. 542–547). Virginia, USA: Taylor & Francis.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M., & Mayer, R. E. (2002). Revising the visualizer-verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction*, *20*(1), 47–77. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2001_3

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Heidelberg, München: Elsevier Spektrum.

Krawec, J. L. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities*, *47*(2), 103–115. https://doi.org/10.1177/0022219412436976

Krawitz, J., & Schukajlow, S. (2020). When can making a drawing hinder problem solving ? Effect of the drawing strategy on linear overgeneralizations and problem solving. *Frontiers in Psychology*, *11*(506), 1–12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00506

Krippendorf, K. (2004). *Content analysis. An introduction to its methodology* (2. Aufl.). Los Angeles: Sage.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (4. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz Juventa.

Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Abgerufen von https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf [19.12.2017].

Kuntze, S. (2013a). Modellieren beim Nutzen von Darstellungen in statistischen Kontexten. Hierarchische Beschreibung und Bedingungsvariablen eines Aspekts mathematischer Kompetenz. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe* (S. 71–94). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Kuntze, S. (2013b). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In Jasmin Sprenger, A. Wagner, & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule.* (S. 17–33). Wiesbaden: Springer.

Kuntze, S. (2018). Flächeninhalt und Volumen. In H.-G. Weigand, A. Filler, & R. Hölzl (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3. Aufl., S. 149–178). Heidelberg: Springer Spektrum.

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Eine Untersuchung in rechner- unterstützten Lernumgebungen*. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01592-3

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, *11*(1), 65–100. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(87)80026-5

Leenaars, F. A. J., Van Joolingen, W. R., & Bollen, L. (2013). Using self-made drawings to support modelling in science education. *British Journal of Educational Technology*, *44*(1), 82–94. https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2011.01272.x

Leiss, D. (2007). *„Hilf mir es selbst zu tun“. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and mathematics - key factors influencing the comprehension process in reality-based tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 131–153. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The role of the situation model in mathematical modelling—task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 119–141. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0006-y

Leopold, C., & Leutner, D. (2015). Improving students’ science text comprehension through metacognitive self-regulation when applying learning strategies. *Metacognition Learning*, *10*(3), 313–346. https://doi.org/10.1007/s11409-014-9130-2

Lewalter, D., Diedrich, J., Goldhammer, F., Köller, O., & Reiss, K. (Hrsg.). (2022). *PISA 2022. Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland. Zusammenfassung*. Abgerufen von https://www.pisa.tum.de/fileadmin/w00bgi/www/Berichtsbaende_und_Zusammenfassungungen/PISA-2022-zusammenfassung.pdf [25.07.2024].

Lopez Real, F., & Veloo, P. K. (1993). Children’s use of diagrams as a problem-solving strategy. In N. Hirabayashi & L. Shigematsu (Hrsg.), *Proceedings of the International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (S. 502–509). Japan, Tsukuba: PME.

Ludwig, M., & Weigand, H.-G. (2018). Konstruieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, … G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3. Aufl., S. 43–61). Heidelberg: Springer Spektrum.

Lunney, G. H. (1970). Using analysis of variance with a dichotomous dependent variable : An empirical study. *Journal of Educational Measurement*, *7*(4), 263–269.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Manalo, E., & Uesaka, Y. (2011). Drawing attention to diagram use. *Science*, *334*(6057), 760–761. https://doi.org/10.1126/science.334.6057.761-a

Manalo, E., & Uesaka, Y. (2016). Hint, instruction, and practice: The necessary components for promoting spontaneous diagram use in students' written work? In *Diagrammatic Representation and Inference: 9th International Conference, Diagrams 2016, Philadelphia, PA, USA, August 7-10, 2016, Proceedings* (S. 157–171). https://doi.org/10.1007/978-3-642-31223-6

Manalo, E., Uesaka, Y., Pérez-Kriz, S., Kato, M., & Fukaya, T. (2013). Science and engineering students' use of diagrams during note taking versus explanation. *Educational Studies*, *39*(1), 118–123. https://doi.org/10.1080/03055698.2012.680577

Matos, J. F., & Carreira, S. (1997). The quest for meaning in students' mathematical modelling activity. In S. K. Houston, W. Blum, I. Huntley, & N. Neill (Hrsg.), *Teaching & learning mathematical modelling – Innovation, investigation and applications* (S. 63–75). Chichester: Horwood.

Mayer, R. E. (2005). Cognitive theory of multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 31–48). New York: Cambridge University.

Mayer, R. E. (2009). Constructivism as a theory of learning versus constructivism as a prescription for instruction. In S. Tobias & T. M. Duffy (Hrsg.), *Constructivist instruction. Succes or failure?* (S. 184–200). New York: Routledge.

Mayer, R. E., Fennell, S., Farmer, L., & Campbell, J. (2004). A personalization effect in multimedia learning: Students learn better when words are in conversational style rather than formal style. *Journal of Educational Psychology*, *96*(2), 389–395. https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.2.389

Mayer, R. E., & Gallini, J. K. (1990). When is an illustration worth ten thousand words? *Journal of Educational Psychology*, *82*(4), 715–726. https://doi.org/10.1037/0022-0663.82.4.715

Mayer, R. E., & Sims, V. K. (1994). For whom is a picture worth a thousand words? Extensions of a dual-coding theory of multimedia learning. *Journal of Educational Psychology*, *86*(3), 389–401. https://doi.org/10.1037/0022-0663.86.3.389

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (11. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Miles, M. B., & Huberman, M. A. (2004). *Qualitative data analysis. An expanded sourcebook* (2. Aufl.). Thousand Oaks: Sage.

Moosbrugger, H., & Kelava, A. (2012). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion. Mit 66 Abbildungen und 41 Tabellen* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Moreno, R., & Mayer, R. E. (2000). Engaging students in active learning: The case for personalized multimedia messages. *Journal of Educational Psychology*, *92*(4), 724–733.

Müller-Hill, E. (2015). Semiotische Rekonstruktion empirischer Schülerauffassungen von Geometrie und spezielle Hürden für den Übergang vom propädeutischen zum weiterführenden Geometrieunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 89–110). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Niedersächsisches Kultusministerium. (2012). *Kerncurriculum für die Integrierte Gesamtschule: Schuljahrgänge 5-10 - Mathematik*. Abgerufen von http://www.fachmoderator-mathematik.de/fileadmin/KC/KC IGS Mathematik Internetfassung.pdf [25.07.2024].

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (S. 3–32). New York: Springer.

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving processes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2*(3), 33–54.

OECD. (2014). *PISA 2012 Ergebnisse: Was Schülerinnen und Schüler wissen und können (Band I, Überarbeitete Ausgabe, Februar 2014): Schülerleistungen in Lesekompetenz, Mathematik und Naturwissenschaften*. https://doi.org/https://doi.org/10.1787/9789264208858-de.

Oestermeier, U., & Eitel, A. (2008). *Lernen mit Text und Bild*. Abgerufen von https://www.e-teaching.org/etresources/pdf/langtext_2014_oestermeier-uwe_eitel-alexander_lernen-mit-text-und-bild.pdf [11.09.2018].

Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen. Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. (Dissertation). Münster, New York: Waxmann.

Ott, B. (2018). Grafisches Darstellen zu Textaufgaben fördern – eine Interventions- und Evaluationsstudie in der 3. Jahrgangsstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *39*(2), 285–318. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0125-9

Paivio, A. (2007). *Mind and its evolution. A dual coding theoretical approach*. Lawrence Erlbaum.

Palmer, S. E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Hrsg.), *Cognition and categorization* (S. 259–303). Lawrence Erlbaum.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 39–60. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9181-5

Peirce, C. S. (1906). Prolegomena to an apology for pragmaticism. *The Monist*, *16*(4), 492–546.

Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce, Volume 2* (The Peirce Edition Project, Hrsg.). Bloomington I.N.: Indiana University Press.

Peng, N., Xue, C., Wang, H., Niu, Y., & Chen, Y. V. (2017). Research on the effect of visual conventions on perception and inference. In A. Marcus & W. Wang (Hrsg.), *International Conference of Design, User Experience, and Usability* (S. 284–297). https://doi.org/10.1007/978-3-319-58634-2_22

Pintrich, P. R. (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning. *International Journal of Educational Research*, *31*(6), 459–470. https://doi.org/10.1016/S0883-0355(99)00015-4

Pólya, G. (1967). *Schule des Denkens: vom Lösen mathematischer Probleme* (2. Aufl.). Bern: Francke.

Prediger, S. (2013). Sprachmittel für mathematische Verstehensprozesse – Einblicke in Probleme, Vorgehensweisen und Ergebnisse von Entwicklungsforschungsstudien. In A. Pallack (Hrsg.), *Impulse für eine zeitgemäße Mathematiklehrer-Ausbildung. MNU-Dokumentation der 16. Fachleitertagung Mathematik* (S. 26–36). Neuss: Seeberger.

Presmeg, N. (2002). A triadic nested lens for viewing teachers' representations of semiotic chaining. In F. Hitt (Hrsg.), *Representations and mathematics visualization* (S. 263–276). Mexiko: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. Emerge from psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (S. 205–235). Rotterdamm: Sense Publishers.

Quillin, K., & Thomas, S. (2015). Drawing-to-learn: A framework for using drawings to promote model-based reasoning in biology. *CBE Life Sciences Education*, *14*(1), 1–16. https://doi.org/10.1187/cbe.14-08-0128

Radford, L. (2002). The object of representations: Between wisdom and certainty. In F. Hitt (Hrsg.), *Representations and mathematics visualization* (S. 219–240). Mexiko: Cinvestav-IPN.

Raithel, J. (2008). *Quantitative Forschung. Ein Praxiskurs* (2. Aufl.). https://doi.org/10.1007/978-3-531-91148-9

Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2014a). *Quantitative Methoden 1. Einführung in die Statsitik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2014b). *Quantitative Methoden 2. Einführung in die Statsitik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Reinhold, F., Reiss, K., Diedrich, J., Hofer, S., & Heinze, A. (2018). Mathematische Kompetenz in PISA 2018 – aktueller Stand und Entwicklung. In K. Reiss, M. Weis, E. Klieme, & O. Köller (Hrsg.), *PISA 2018. Grundbildung im internationalen Vergleich* (S. 187–210). Münster: Waxmann.

Reiss, K., Weis, M., Klieme, E., & Köller, O. (2019). *PISA 2018. Grundbildung im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Rellensmann, J. (2019). *Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren*. (Dissertation). Wiesbaden: Springer.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., Blomberg, J., & Leopold, C. (2022). Effects of drawing instructions and strategic knowledge on mathematical modeling performance: Mediated by the use of the drawing strategy. *Applied Cognitive Psychology*, *36*(2), 402–417. https://doi.org/10.1002/acp.3930

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53–78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen. Literaturüberblick. In F. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 141–155). Weinheim: Beltz.

Reuter, T. (2016). *Die Rolle externer Repräsentationen für die Konstruktion und Nutzung mentaler Modelle bei der Lösung problemhaltiger Textaufgaben in der Primarstufe*. Abgerufen von https://kola.opus.hbz-nrw.de/frontdoor/index/index/docId/1325 [28.07.2020].

Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American Journal of Educational Research*, *3*(11), 1387–1397.

Roth, J., & Wittmann, G. (2018). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, & R. Hölzl (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3. Aufl., S. 107–148). Heidelberg: Springer Spektrum.

Roth, W. M. (2018). Elaborating the later Vygotsky's radical initiative on the nature and function of language: implications for mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(6), 975–986. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0912-x

Rotman, B. (2006). Towards a semiotics of mathematics. In R. Hersh (Hrsg.), *18 unconventional essays on the nature of mathematics* (S. 97–127). https://doi.org/10.1007/0-387-29831-2

Sandmann, A. (2014). Lautes Denken – die Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen. In D. Krüger, I. Parchmann, & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 179–188). Berlin, Heidelberg: Springer.

Saß, S., Schütte, K., & Lindner, M. A. (2017). Test-takers' eye movements: Effects of integration aids and types of graphical representations. *Computers and Education*, *109*, 85–97. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.02.007

Saundry, C., & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: young children's mathematical reasoning through pictures. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Hrsg.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 5, S. 57–63). Prag, Tschechische Republik: PME.

Schecker, H. (2014). Überprüfung der Konsistenz von Itemgruppen mit Cronbachs α. In D. Krüger, I. Parchmann, & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung*. Abgerufen von https://www.researchgate.net/publication/313220515 [04.02.2020].

Schmeck, A. (2010). *Visualisieren naturwissenschaftlicher Sachverhalte* (Dissertation, Universität Duisburg-Essen). Abgerufen von https://www.fachportal-paedagogik.de/ literatur/vollanzeige.html?FId=3297650 [14.01.2020].

Schmidgall, S. P. (2017). *Drawing to learn: Investigating the role of contributing factors and instructional support for learner-generated drawing* (Dissertation, Eberhard Karls Universität Tübingen). Abgerufen von https://publikationen.uni-tuebingen.de/xmlui/handle/10900/77277 [22.02.2019].

Schmidgall, S. P., Eitel, A., & Scheiter, K. (2019). Why do learners who draw perform well? Investigating the role of visualization, generation and externalization in learner-generated drawing. *Learning and Instruction*, *60*, 138–153. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.01.006

Schmitz, A. (2017). *Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufen zum Visualisieren im Mathematikunterricht (Dissertation)*. https://doi.org/10.1007/978-3-658-18425-4

Schnotz, W. (1994). *Aufbau von Wissensstrukturen. Untersuchungen zur Kohärenzbildung beim Wissenserwerb mit Texten*. (Dissertation). Weinheim: Beltz.

Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 49–70). New York: Cambridge University.

Schnotz, W. (2010). Visuelles Lernen. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (4. Aufl., S. 927–934). Weinheim, Basel: Beltz.

Schnotz, W. (2014). Visuelle kognitive Werkzeuge beim Mathematikverstehen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, Bd. 1* (S. 45–52). https://doi.org/10.17877/DE290R-538

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, *13*(2), 141–156. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00017-8

Schnotz, W., & Bannert, M. (2018). Visuelles Lernen. In D. H. Rost, J. R. Sparfeldt, & S. R. Buch (Hrsg.), *Handwörterbuch pädagogische Psychologie* (5. Aufl., S. 886–893). Weinheim, Basel: Beltz.

Schnotz, W., Zink, T., & Pfeiffer, M. (1996). Visualisierungen im Lehr-Lern-Prozess. *Zeitschrift für Pädagogik*, *42*(2), 193–214.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (S. 334–370). New York: Macmillan.

Schreier, M. (2014). Varianten qualitativer Inhaltsanalyse: ein Wegweiser im Dickicht der Begrifflichkeiten. *Forum: Qualitative Sozialforschung*, *15*(1), Art. 18. Abgerufen von https://www.ssoar.info/ssoar/handle/document/37708 [06.01.2020].

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur*. (Dissertation). Münster: Waxmann.

Schukajlow, S., Blomberg, J., & Leopold, C. (2019). I enjoy making drawings! Enjoyment, knowledge about drawings, use of drawings, and students' performance. In I. M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, & P. Vale (Hrsg.), *Proceedings of the 43th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 297–304). Pretoria, South Africa: PME.

Schukajlow, S., Blomberg, J., & Rellensmann, J. (2019). I am scared to make a drawing. Students' anxiety and its relation to the use of drawings, modelling, and gender. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Netherlands: Utrecht University.

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *50*(1), 5–18. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5

Schukajlow, S., Kolter, J., & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *47*(7), 1241–1254. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0707-2

Schukajlow, S., & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32*(1), 53–77. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0023-x

Schwamborn, A., Mayer, R. E., Thillmann, H., Leopold, C., & Leutner, D. (2010). Drawing as a generative activity and drawing as a prognostic activity. *Journal of Educational Psychology*, *102*(4), 872–879. https://doi.org/10.1037/a0019640

Sedlmeier, P., & Renkewitz, F. (2018). *Forschungsmethoden und Statistik Für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (3. Aufl.). Hallbergmoos: Pearson.

Sill, H.-D. (2019). *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Paderborn: Ferdinand Schöningh.

Stein, P. (2014). Forschungsdesigns für die quantitative Sozialforschung. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 135–152). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Stenning, K., & Oberlander, J. (1995). A cognitive theory of graphical and linguistic reasoning: Logic and implementation. *Cognitive Science*, *19*(1), 97–140. https://doi.org/10.1016/0364-0213(95)90005-5

Stephany, S. (2018). *Sprache und mathematische Textaufgaben. Eine empirische Untersuchung zu leser- und textseitigen sprachlichen Einflussfaktoren auf den Lösungsprozess*. (Dissertation, Universität Köln). Münster: Waxmann.

Stern, E., Aprea, C., & Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and Instruction*, *13*(2), 191–203.

Stillman, G. A., Blum, W., & Salett Biembengut, M. (2015). *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8

Sturm, N. (2018). *Problemhaltige Textaufgaben lösen. Einfluss eines Repräsentationstrainings auf den Lösungsprozess von Drittklässlern*. (Dissertation, Universität Koblenz-Landau). Wiesbaden: Springer.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2014). Impacting positively on students' mathematical problem solving beliefs: An instructional intervention of short duration. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*(1), 8–29. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.08.005

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 265–280. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2

Stylianou, D. A., & Pitta-Pantazi, D. (2002). Visualization and high achievement in mathematics: A critical look at successful visualization strategies. In F. Hitt (Hrsg.), *Representations and mathematics visualization* (S. 31–46). Mexico: Cinestav-IPN.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*(2), 257–285. https://doi.org/10.1016/0364-0213(88)90023-7

Sweller, J. (2005a). Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 19–30). New York: Cambridge University.

Sweller, J. (2005b). The redundancy principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 159–168). New York: Cambridge University.

Sweller, J., Van Merrienboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*(3), 251–296. https://doi.org/10.1023/A:1022193728205

Tabachnick, B., & Fidell, L. (2013). *Using multivariate statistics* (6. Aufl.). Boston, MA: Pearson.

Terwel, J., Van Oers, B., Van Dijk, I., & Van den Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation*, *15*(1), 25–44. https://doi.org/10.1080/13803610802481265

The National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Uesaka, Y., & Manalo, E. (2006). Active comparison as a means of promoting the development of abstract conditional knowledge and appropriate choice of diagrams in math word problem solving. In P. Cox, B. Plimmer, & P. Rodgers (Hrsg.), *International Conference on Theory and Application of Diagrams, Diagrams 2006: Diagrammatic Representation and Inference* (S. 181–195). Berlin, Heidelberg: Springer.

Uesaka, Y., & Manalo, E. (2011a). Task-related factors that influence the spontaneous use of diagrams in math word problems. *Applied Cognitive Psychology*, *26*(2), 251–260. https://doi.org/10.1002/acp.1816

Uesaka, Y., & Manalo, E. (2011b). The effects of peer communication with diagrams on students' math word problem solving processes and outcomes. In L. Carlson, C. Hoelscher, & T. Shipley (Hrsg.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (S. 312–317). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction*, *17*(3), 322–335. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.02.006

Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2010). The effects of perception of efficacy and diagram construction skills on students' spontaneous use of diagrams when solving math word problems. In A. K. Goel, M. Jamnik, & N. H. Narayanan (Hrsg.), *Diagrammatic representation and inference* (S. 197–211). Berlin, Heidelberg: Springer.

Urban, D., & Mayerl, J. (2018). *Angewandte Regressionsanalyse: Theorie, Technik und Praxis* (5. Aufl.). https://doi.org/10.1007/978-3-658-01915-0

Van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, *83*(6), 301–312.

Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities*, *40*(6), 540–553. https://doi.org/10.1177/00222194070400060501

Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *18*(4), 246–254. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00079

Van Meter, P. (2001). Drawing construction as a strategy for learning from text. *Journal of Educational Psychology*, *93*(1), 129–140. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.1.129

Van Meter, P., Aleksic, M., Schwartz, A., & Garner, J. (2006). Learner-generated drawing as a strategy for learning from content area text. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(2), 142–166. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2005.04.001

Van Meter, P., & Firetto, C. M. (2013). Cognitive model of drawing construction. Learning through the construction of drawings. In G. J. Schraw, M. T. McCrudden, & D. R. Robinson (Hrsg.), *Learning through visual displays* (S. 247–380). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing.

Van Meter, P., & Garner, J. (2005). The promise and practice of learner-generated drawing: Literature review and synthesis. *Educational Psychology Review*, *17*(4), 285–325. https://doi.org/10.1007/s10648-005-8136-3

Veloo, P. K. (1996). Teaching children to draw diagrams in solving word problems: An exploratory study. In P. C. Clarkson (Hrsg.), *Technology in mathematics education* (S. 580–587). Melbourne: Australia.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM - Mathematics Education*, *52*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Weinert, F. E. (2014). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen: Eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (3. Aufl., S. 17–31). Weinheim, Basel: Beltz.

Weinstein, C. E., & Mayer, R. E. (1986). The teaching of learning strategies. In Merlin C. Wittrock (Hrsg.), *Handbook of research on teaching* (S. 315–372). New York: Macmillan.

Welch, B. L. (1947). The generalisation of student's problems when several different population variances are involved. *Biometrika*, *34*(1–2), 28–35. https://doi.org/10.1093/biomet/34.1-2.28

Willis, G. B., & Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192–201. https://doi.org/10.1037/0022-0663.80.2.192

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *4*(2), 35–41.

Wittrock, M. C., & Farley, F. (2010). Learning as a generative process. *Educational Psychologist*, *45*(1), 40–45. https://doi.org/10.1080/00461520903433554

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Hrsg.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (S. 1–8). Washington, DC: Mathematical Association of America.