Uwe Mylatz

Vergleich unstetiger Funktionen in der Analysis

Diplomarbeit

Fernuniversität Hagen
Lehrgebiet Theoretische Informatik I
eingereicht im Mai 1992
Gutachter Prof. Dr. Klaus Weihrauch

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Diplomarbeit behandle ich ein Thema aus der Berechenbarkeitstheorie. Es geht um den Vergleich unstetiger Funktionen, vor allem Funktionen aus der Analysis. Ich beziehe mich dabei auf das Buch „Computability“ von Klaus Weihrauch und auf eine Diplomarbeit von Thorsten von Stein mit dem Titel „Vergleich nicht konstruktiv lösbarer Probleme in der Analysis“.

Die Funktionen, die dabei betrachtet werden, sind Typ-II-Funktionen. Dies bedeutet, daß ihr Definitionsbereich die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Die Argumente sind unendliche Objekte, z.B. Folgen über den natürlichen Zahlen, Mengen von natürlichen Zahlen, reelle Zahlen usw. Aber der Definitionsbereich hat höchstens die Mächtigkeit des Kontinuums, also des Intervalls [0,1] der reellen Zahlen, was auch der Mächtigkeit der Potenzmenge oder der Menge aller Folgen der natürlichen Zahlen entspricht. Eine Theorie der Typ-II-Berechenbarkeit erfaßt nicht diejenigen Funktionen mit noch mächtigerem Definitionsbereich. So sind als Argumente nicht beliebige Funktionen über den reellen Zahlen zugelassen, da die Menge aller derartiger Funktionen mächtiger ist das Kontinuum. Als Argumente kommen nur kontinuumsmächtige Teilmengen der reellen Funktionen in Betracht, z.B. die Menge der stetigen Funktionen über einem kompakten Intervall.

Die Theorie der Typ-II-Berechenbarkeit besitzt teilweise große Ähnlichkeiten zur Berechenbarkeitstheorie der Typ-I-Funktionen. Wesentliche Unterschiede enthüllt der Begriff der Stetigkeit bzw. Unstetigkeit bei den Typ-II-Funktionen. Eine Funktion heißt dabei stetig, wenn zur Berechnung eines endlichen Teils des Ergebnisses immer auch ein endlicher Teil des Arguments ausreicht. Der Begriff Stetigkeit wird dadurch gerechtfertigt, daß er bei der Wahl einer geeigneten Topologie mit dem topologischen Begriff der Stetigkeit übereinstimmt. Ich werde dieses Thema im ersten Kapitel kurz umreißen.

In der Typ-I-Berechenbarkeitstheorie ist ein wichtiges und faszinierendes Ergebnis, daß es nicht berechenbare Funktionen gibt, also Funktionen, die durch einen Computer mit einem endlichen Programm nicht berechnet werden können. Solche Funktionen sind gewissermaßen zu kompliziert, um durch eine endliche Zeichenkette (Programm) codiert werden zu können. Bei Beweisen wird oft zu dem Hilfsmittel der Selbstanwendbarkeit gegriffen. Man kann einige Funktionen so interpretieren, daß sie Eigenschaften von Funktionen und damit auch von sich selbst berechnen können. Mit diesem Trick kann dann oft die Annahme, eine Funktion sei berechenbar, zum Widerspruch geführt werden.

Eine ähnliche Position wie die nicht berechenbaren Funktionen in der Berechenbarkeitstheorie nehmen die unstetigen Funktionen in der Typ-II-Theorie ein. Man kann die Unstetigkeit einer Funktion so interpretieren, daß die Funktion von einem Computer selbst mit einem unendlichen Programm nicht berechnet werden kann [1]. Es zeigt sich, daß viele vertraute reelle Funktionen, die wir aus der Schulmathematik kennen, unstetig und damit erst recht nicht berechenbar sind. Dies erklärt auch, warum in einem Gebiet wie der numerischen Mathematik soviel experimentiert werden muß. Viele numerische Verfahren sind in bestimmten Zahlbereichen zuverlässig und liefern gute Ergebnisse, in anderen Bereichen sind sie instabil und liefern vollkommen falsche Werte. Bei welchen Eingaben die Algorithmen zuverlässige Ergebnisse abliefern, ist oft eher eine Erfahrungssache denn ein beweisbarer Sachverhalt.

Ich finde auch die Existenz dieser unstetigen Funktionen bemerkenswert. Insgesamt zeigt sich, daß die Möglichkeiten eines Computers und damit von exakten Methoden und Algorithmen eng begrenzt sind. Der Mensch ist in seinem Denken dieser Grenzen nicht gänzlich enthoben, jedoch hat er immer die Möglichkeit und das Bedürfnis, festgelegte Methoden und Denkschablonen zu überschreiten, zu transzendieren. So liegt die Faszination der Mathematik sicherlich auch darin, daß es keinen Algorithmus gibt, der bei jedem Problem zum Erfolg führt. Gerade die ungelösten Aufgaben der Mathematik üben auf jeden Interessierten den größten Reiz aus. So sind auch viele Existenzbeweise und Widerspruchsbeweise in meiner Arbeit nicht konstruktiv. Ob es im menschlichen Denken etwas nicht Erfaßbares wie Intuition gibt, ist natürlich eine philosophische oder weltanschauliche Frage, die mit exakten Mitteln nicht zu beantworten ist.

Ich werde im ersten Kapitel kurz den Stetigkeitsbegriff der Theorie der Typ-II-Berechenbarkeit skizzieren. Außerdem möchte ich dort zusammenfassen, was Thorsten von Stein in seiner Diplomarbeit über unstetige Funktionen herausgefunden hat. Er hatte dort eine Hierarchie von unstetigen Funktionen definiert, die sogenannte C-Hierarchie. Im 2.-5. Kapitel füge ich dieser Hierarchie neue Funktionen hinzu. Im 2. Kapitel beschäftige ich mich mit Ω-stetigen Funktionen und ihrer Beziehung zu den C-stetigen Funktionen. Im 3. Kapitel beweise ich, daß auch die Berechnung der n-ten Ableitung einer n-mal stetig differenzierbaren Funktion C-stetig ist. Ich beweise in diesem Kapitel ebenfalls einige Sätze zu einem Fortsetzungsproblem und zur Übersetzung von Zahlen von r-adischer in s-adische Darstellung. Kapitel 4 führt einige neue C^2-stetige Funktionen ein und Kapitel 5 mehrere C^3-stetige Funktionen. Im 6. Kapitel definiere

---

[1] Eine Typ-I-Funktion läßt sich immer durch ein unendliches Programm berechnen. Das Programm bräuchte nur eine Liste der abzählbar vielen Argumente mit den jeweiligen Funktionswerten zu sein.

ich eine neue Klasse von Funktionen, die über der gesamten C-Hierarchie liegt, die Klasse der C^{∞}-stetigen Funktionen. Im 7. Kapitel schließlich versuche ich, unstetige Funktionen durch prädikatenlogische Ausdrücke zu beschreiben, so wie das für nicht berechenbare Typ-I-Funktionen mit der Kleene-Hierarchie gemacht wird. Ich kann leider noch nicht so exakte und eindeutige Ergebnisse vorweisen. Ich habe dort bewiesen, daß bestimmte Ausdrücke mit n Quantoren C^n-stetige Funktionen definieren, aber ich konnte die umgekehrte Richtung nicht nachweisen. Ich vermute zwar, daß C^n-stetige Funktionen durch Ausdrücke mit höchstens $2 \cdot n$ Quantoren beschrieben werden können, habe aber dieses Problem zunächst zurückgestellt.

Symbolerklärung

An dieser Stelle möchte ich noch einige Bezeichnungskonventionen meiner Arbeit erklären.

N-Tupel über der Menge der natürlichen Zahlen werden durch $(a_0,a_1,...,a_{n-1})\in\mathbb{N}^n$ bezeichnet, konstante n-Tupel durch a^n. Folgen über $\mathbb{N}$ werden durch $(a_0,a_1,...)\in\mathbb{N}^\omega$ bezeichnet, konstante Folgen durch a^ω. Dabei wird durch $\mathbb{N}^\omega$ oder $\mathbb{B}$ die Menge aller Folgen über $\mathbb{N}$ symbolisiert und durch $\mathbb{N}^*$ die Menge aller endlichen Worte über $\mathbb{N}$. Es sind auch gemischte Darstellungen möglich, so meint $(1,2,...,6)2^3$ dasselbe wie $(1,2,3,4,5,6,2,2,2)$ und $(0,1,2)0^3 3^\omega$ ist die Folge $(0,1,2,0,0,0,3,3,3,3,...)$. Für die Präfixrelation von Worten oder Folgen wird „≤“ bzw. „<“ verwendet. Die ersten n Zeichen einer Folge p werden durch $[\![p]\!]_n$ bezeichnet: $[\![p]\!]_n:=(p(0),p(1),...,p(n-1))$. M_p ist die durch p repräsentierte Menge: $M_p:=\{k \mid (\exists i)\ p(i)=k+1\}$. $M_p=\emptyset \Leftrightarrow p=0^\omega$.

Die Cantorsche Paarungsfunktion „$\langle,\rangle$“ wurde schon bei Weihrauch auf Folgen ausgedehnt [2]. Es gelten folgende Definitionen: $\langle p,q\rangle(2n):=p(n)$ und $\langle p,q\rangle(2n+1):=q(n)$ für alle Folgen $p,q\in\mathbb{N}^\omega$. $\langle p\rangle:=p$ und $\langle p_1,p_2,...,p_{k+1}\rangle:=\langle\langle p_1,p_2,...,p_k\rangle,p_{k+1}\rangle$ für alle Folgen $p,p_1,p_2,...,p_{k+1}\in\mathbb{N}^\omega$. $\langle i,p\rangle(0):=i$ und $\langle i,p\rangle(n+1):=p(n)$ für alle $i\in\mathbb{N}$ und alle Folgen $p\in\mathbb{N}^\omega$. $\langle p_0,p_1,p_2,...\rangle\langle i,j\rangle:=p_i(j)$ für alle $p_0,p_1,p_2,...\in\mathbb{N}^\omega$.
Bei Stein [3] wird auch oft das noch nicht definierte Tupel $\langle p,i\rangle$ mit $i\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}^\omega$ benutzt. Da ich mich an die dort eingeführte Schreibweise halten möchte, definiere ich nachträglich $\langle p,i\rangle:=\langle i,p\rangle$ für alle $i\in\mathbb{N}$ und $p\in\mathbb{N}^\omega$. Auf diese Weise läßt sich die Paarungsfunktion auch auf beliebige gemischte Folgen ausdehnen. Definiere $\langle x\rangle:=x$ und $\langle x_1,x_2,...,x_{k+1}\rangle:=\langle\langle x_1,x_2,...,x_k\rangle,x_{k+1}\rangle$ für alle $x,x_1,x_2,...,x_{k+1}\in\mathbb{N}\cup\mathbb{N}^\omega$. Z.B. gilt dann $\langle 0^\omega,1,2,3\rangle=\langle\langle 0^\omega,1,2\rangle,3\rangle=\langle\langle\langle 0^\omega,1\rangle,2\rangle,3\rangle=\langle 3,\langle\langle 0^\omega,1\rangle,2\rangle\rangle=\langle 3,\langle 2,\langle 0^\omega,1\rangle\rangle\rangle$ $=\langle 3,\langle 2,\langle 1,0^\omega\rangle\rangle\rangle=(3,2,1)0^\omega$.

Einige einfache Funktionen werden in den Beweisen des öfteren benötigt.
NEG:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ wird definiert durch $\text{NEG}(n):=\begin{cases}0 & \text{falls } n=1\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
INV:$\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ wird gegeben durch $\text{INV}(p)(n):=\begin{cases}0 & \text{falls } p(n)=1\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.
SIGN:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ wird definiert durch $\text{SIGN}(n):=\begin{cases}0 & \text{falls } n=0\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

$\overline{0}:[0,1]\to\mathbb{R}$ ist die konstante Nullfunktion im Intervall $[0,1]$: $\overline{0}(x):=0$ für alle $x\in[0,1]$.

2 [Weihrauch] Seite 346.
3 [Stein] Seite 15.

Kapitel I. Typ-II-Berechenbarkeit und C-Hierarchie

Typ-II-Berechenbarkeit

Im Unterschied zur Theorie der Typ-I-Berechenbarkeit beschäftigt sich die der Typ-II-Berechenbarkeit mit Funktionen, deren Argumente unendliche Objekte sind. Dies sind z.B. Funktionen $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, $f:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{N}$, $f:P^\omega\to P^\omega$ und $f:P^\omega\to\mathbb{N}$. $\mathbb{B}$ ist dabei die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen. $\mathbb{C}$ ist die Menge aller Folgen über $\{0,1\}$. P^ω ist die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, also die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Ich beschäftige mich in dieser Arbeit nur mit Funktionen $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ und $f:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$. Außerdem sind $\mathbb{B}_0$ und $\mathbb{C}_0$ definiert durch $\mathbb{B}_0:=\mathbb{B}\cup\mathbb{N}^*$ und $\mathbb{C}_0:=\mathbb{C}\cup\{0,1\}^*$.

In der Theorie der Berechenbarkeit wurde vor allem die Kompliziertheit der Funktionen untersucht. Ein wichtiges Ergebnis ist, daß es nicht berechenbare Funktionen gibt, also Funktionen, die so kompliziert sind, daß sie nicht durch einen endlichen Algorithmus dargestellt werden können. Solche Probleme kann man in die Theorie der Typ-II-Berechenbarkeit ganz einfach importieren, z.B. durch Benutzung des Selbstanwendbarkeitsproblems K: Definiere $f: \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $f(p)(n):=\begin{cases}0 \text{ falls } p(0)\in K\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.

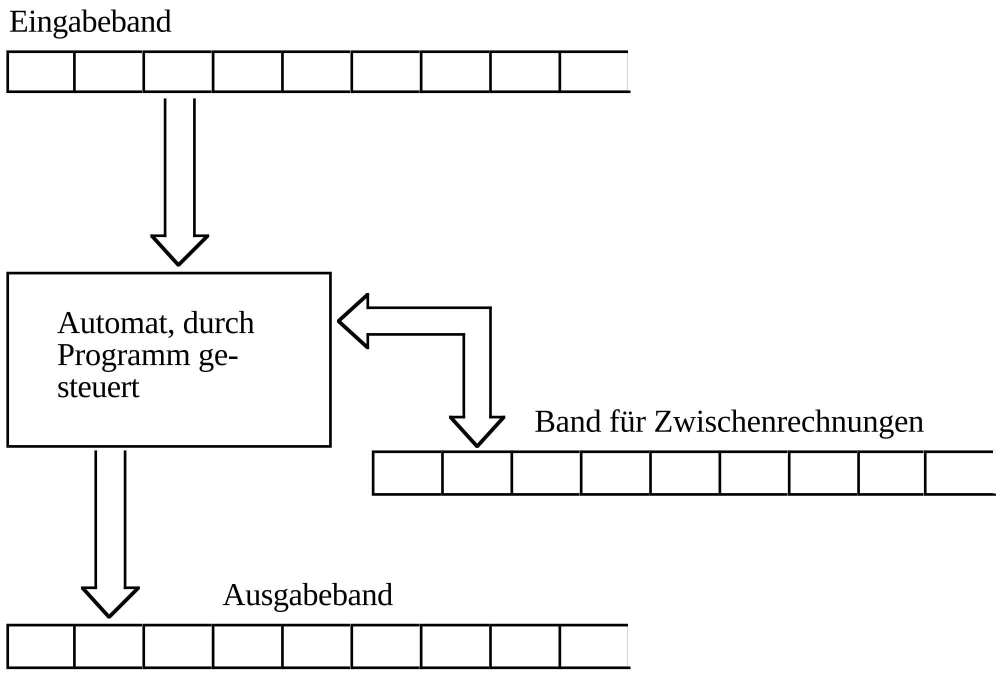
Dies wäre aber nur eine Darbietung bekannter Sachverhalte in einem neuen Gewand. Die Typ-II-Berechenbarkeit bringt aber vollkommen neue Probleme mit sich. Dies hat seine Ursache darin, daß die Eingabe für die Funktion vor der Verarbeitung nicht mehr vollständig vorliegen kann. Eine Maschine für Typ-II-Funktionen kann, wenn sie Werte ausgibt, immer nur einen endlichen Teil der Eingabe eingelesen haben. Also hängt jeder Teil der Ausgabe von einem endlichen Präfix der Eingabe ab. Funktionen, die sich so verhalten, heißen dabei stetig.

Die Typ-II-Maschine liest von einem Eingabeband Zeichen [4]. Der Lesekopf wandert dabei nach rechts. Für Zwischenrechnungen benutzt die Maschine ein Band, das wie das Band einer Turingmaschine gelesen und beschrieben werden kann. Daß das Band nur nach rechts unendlich ist, stellt dabei keine Einschränkung dar. Die nächste Operation des Automaten hängt dann von dem eingelesenen Zeichen, vom internen Zustand und von dem Zeichen auf dem Hilfsband ab. Das Ausgabeband kann nur beschrieben werden, der Schreibkopf wandert nur

[4] Für Funktionen $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ oder $f:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ müßte die Folge auf dem Eingabeband genauso wie die Ausgabe codiert werden, z.B. durch binäre Darstellung.

nach rechts. Wenn bisher ausgegebene Zeichen wieder überschrieben werden könnten, so wäre die Ausgabe unzuverlässig, denn es gibt keinen Halt der Maschine. Bei der Turingmaschine wird der Funktionswert einer Funktion genau dann berechnet, wenn die Maschine hält. Bei Existenz des Funktionswertes erhalten wir eine positive Antwort durch das Anhalten der Maschine, bei Nichtexistenz erhalten wir diese Antwort nicht. Da die Typ-II-Maschine nicht anhält, erhalten wir keine Antwort. Der Funktionswert existiert genau dann, wenn unendlich viele Felder des Ausgabebandes beschrieben werden. Er existiert nicht, falls von einer Stelle an keine Ausgabezeichen mehr ausgegeben werden. In beiden Fällen gibt es aber keine Antwort, ob der Funktionswert existiert.

Eine Maschine, die Typ-II-Funktionen berechnet, sieht schematisch so aus [5]:

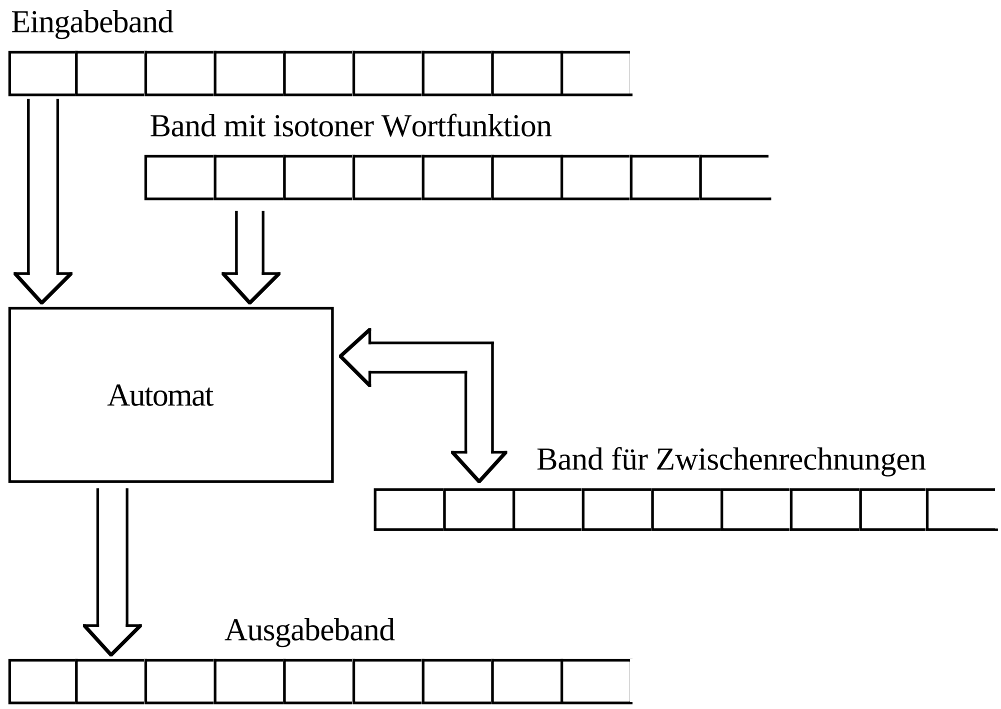


Eine Typ-II-Maschine für stetige Funktionen arbeitet etwas anders. Sie wird nicht von einem endlichen Programm gesteuert. Für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ ist es erforderlich, daß zur Berechnung eines endlichen Präfixes der Ausgabe ein endliches Präfix der Eingabe reicht. Die stetige Funktion f ist eindeutig festgelegt durch eine isotone Wortfunktion $\overline{f}$ mit der Eigenschaft $f(p)=\sup\{\overline{f}(v)|v\leq p\}$ [6]. Die Maschine wird dann nicht durch ein endliches Programm gesteuert, sondern durch eine unendliche Tabelle von Ein- und Ausgabepräfixen. Diese Tabelle wird wie

---

[5] [Weihrauch] Seite 341.
[6] Satz 3.1.26 [Weihrauch] Seite 343. Ich werde im folgenden die entsprechende isotone Wortfunktion einer Funktion f mit $\overline{f}$ bezeichnen.

ein zweites Eingabeband benutzt. Beim Einlesen der Zeichen vom Eingabeband sucht die Maschine nur nach dem bisher eingelesenen Präfix auf dem Steuerband und verlängert die bisherige Ausgabe eventuell mit denjenigen Zeichen des zugeordneten Ausgabepräfixes, die noch nicht auf das Ausgabeband geschrieben wurden.



Die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{B}$ nach $\mathbb{B}$ bzw. von $\mathbb{B}$ nach $\mathbb{N}$ wird mit $[\mathbb{B}\to\mathbb{B}]$ bzw. $[\mathbb{B}\to\mathbb{N}]$ bezeichnet. Analog zur Numerierung φ der berechenbaren Funktionen gibt es Repräsentationen $\chi:\mathbb{B}\to[\mathbb{B}\to\mathbb{N}]$ und $\psi:\mathbb{B}\to[\mathbb{B}\to\mathbb{B}]$ mit ähnlichen Eigenschaften wie φ. Die Namen der stetigen Funktionen unter χ bzw. ψ sind nichts anderes als Kodierungen der zugehörigen isotonen Wortfunktionen.

Der Übergang zur Typ-II-Berechenbarkeit wird unter anderem durch bestehende Theorien der Mathematik motiviert. So sind Objekte, mit denen wir vertraut sind, wie z.B. reelle Zahlen, Mengen oder Funktionen, im allgemeinen unendliche Objekte. Will man Funktionen auf einer Menge solcher Objekte betrachten, so muß man die Elemente derselben durch unendliche Objekte repräsentieren, also z.B. durch unendliche Folgen. Allerdings gelingt dies nur für kontinuumsmächtige Mengen. Die Mächtigkeit von $\mathbb{B}$ ist gleich der Mächtigkeit der Potenzmenge von $\mathbb{N}$, das ist gleich der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ oder der aller stetigen Funktionen über dem Intervall [0,1]. Mächtigere Mengen lassen sich durch Folgen nicht mehr repräsentieren. Z.B. ist die Menge aller Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nicht mehr kontinuumsmächtig.

Nun zur Darstellung einiger dieser Objekte. Jede rationale Zahl r ist darstellbar als Bruch $\frac{n-m}{k+1}$ mit geeigneten Zahlen $n,m,k\in\mathbb{N}$. Durch $\nu_Q\langle n,m,k\rangle:=\frac{n-m}{k+1}$ wird eine Numerierung ν_Q der rationalen Zahlen definiert. Reelle Zahlen lassen sich auf vielfache Weise repräsentieren:

$\rho_n:\mathbb{B}\to\mathbb{R}$ ist die Darstellung durch Cauchy-Folgen und wird definiert durch

$\rho_n(p):=\begin{cases} x \text{ falls } \nu_Q(p(n)) \text{ gegen } x \text{ konvergiert} \\ \text{div sonst} \end{cases}$ mit

$\mathrm{dom}(\rho_n)=\{p \mid \lim\limits_{n\to\infty}\nu_Q(p(n)) \text{ existiert}\}$.

$\rho_<:\mathbb{B}\to\mathbb{R}$ wird definiert durch $\rho_<(p):=\begin{cases} x \text{ falls } \nu_Q(p(n)) \text{ gegen } x \text{ konvergiert und} \\ \quad \nu_Q(p(n)) \text{ streng monoton wächst} \\ \text{div sonst} \end{cases}$.

$\rho_>:\mathbb{B}\to\mathbb{R}$ wird definiert durch $\rho_>(p):=\begin{cases} x \text{ falls } \nu_Q(p(n)) \text{ gegen } x \text{ konvergiert und} \\ \quad \nu_Q(p(n)) \text{ streng monoton abnimmt} \\ \text{div sonst} \end{cases}$.

$\delta_m:\mathbb{B}\to\mathbb{R}$ ist die m-adische Darstellung reeller Zahlen und wird definiert durch

$\delta_m(p):=\pi_1(p(0))-\pi_2(p(0))+\sum\limits_{i=1}^{\infty}p(i)\cdot m^{-i}$.

Diese Repräsentationen eignen sich nicht besonders gut. Sie approximieren zwar reelle Zahlen, aber da die Konvergenzgeschindigkeit nicht bekannt ist, hat man keine Information über die Güte der Approximation eines endlichen Anfangsstücks. Wir verwenden fast immer die Repäsentation ρ, die diesen Mangel behebt.

$\rho:\mathbb{B}\to\mathbb{R}$ wird definiert durch $\rho(p):=\begin{cases} x \text{ falls } \nu_Q(p(n)) \text{ gegen } x \text{ konvergiert und} \\ \qquad \text{für alle } m,n \text{ mit } n>m \text{ gilt} \\ \qquad |\nu_Q(p(m))-\nu_Q(p(n))|<2^{-m} \\ \text{div sonst} \end{cases}$.

Die Menge der stetigen Funktionen über dem Intervall [0,1] läßt sich auch repräsentieren, z.B. durch eine Approximation durch Polygone. Dies ist möglich, da die Menge der Polygone mit rationalen Eckpunkten abzählbar und in der Menge der stetigen Funktionen dicht ist. Es wird eine Numerierung α der Polygonzüge auf dem Intervall [0,1] zugrunde gelegt. Die Repräsentation δ_α wird dann definiert durch

$$\delta_\alpha(p) := \begin{cases} f & \text{falls } \alpha(p(n)) \text{ gegen } f \text{ konvergiert und} \\ & \text{für alle } m,n \text{ mit } n>m \text{ gilt} \\ & |\alpha(p(m))-\alpha(p(n))|<2^{-m} \\ \text{div} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die C-Hierarchie

In der Diplomarbeit von Thorsten von Stein mit dem Titel "Vergleich nicht konstruktiv lösbarer Probleme in der Analysis" wurde versucht, die im Sinne der Typ-II-Berechenbarkeit nicht stetigen Funktionen von $\mathbb{B}$ nach $\mathbb{B}$ oder von $\mathbb{B}$ nach $\mathbb{N}$ nach ihrer Schwierigkeit in Klassen einzuteilen.

Hierzu wurde eine bestimmte Art von Reduzierbarkeit definiert:
$\Sigma \leq_2 \Gamma :\Leftrightarrow$ Es gibt zwei stetige Funktionen A und B mit $\Sigma(p)=A\langle p,\Gamma \circ B(p)\rangle$ für alle $p\in \mathbb{B}$.
Dies bedeutet: Σ ist reduzierbar auf Γ, gdw. Σ mit Hilfe von Γ berechnet werden kann, wobei p vor der Anwendung von Γ stetig mit B umgerechnet werden kann und zur Berechnung des Ergebnisses mit A die Ausgangsfolge p nochmal mit hinzugezogen wird. Der dazugehörende Äquivalenzbegriff wird definiert durch $\Sigma \equiv_2 \Gamma :\Leftrightarrow \Sigma \leq_2 \Gamma$ und $\Gamma \leq_2 \Sigma$.

Ω-stetige Funktionen

Eine der einfachsten unstetigen Funktionen ist das Allwissenheitsprinzip Ω. $\Omega(p)$ ist 0, wenn p die konstante Nullfolge ist, und sonst 1. Der Beweis der Unstetigkeit ist einfach. Um $\Omega(p)$ zu berechnen, reicht kein endliches Präfix der Eingabe aus. Es ist das Wissen über die unendlich vielen Folgenglieder nötig. Daher der Name Allwissenheitsprinzip.

Es ist möglich, die Berechnung vieler anderer Funktionen auf Ω zurückzuführen. So sind natürlich alle stetigen Funktionen auf Ω reduzierbar. Aber auch weitere unstetige Funktionen lassen sich auf Ω reduzieren. Im Folgenden zähle ich die Ω-stetigen Funktionen aus [Stein] auf, wobei ich die Funktionen dort, wo es möglich ist, durch prädikatenlogische Ausdrücke beschreibe, da ich hierauf später noch zurückkommen werde.

Allwissenheitsprinzip:

$$\Omega(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n)\ p(n)=0 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Test auf reelle Zahl gleich 0:

$$O(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \rho(p)=0 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n)\ |\nu_Q(p(n))| \leq 2^{-n} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Gleichheit reeller Zahlen:

$$G(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \rho(p)=\rho(q) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n)\ |\nu_Q(p(n))-\nu_Q(q(n))| \leq 2^{-n+1} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Test auf Nullfunktion:

$$V(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \delta_\alpha(p)=\overline{0} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n)\ |\alpha(p(n))| \leq 2^{-n} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Test auf Gleichheit zweier stetiger Funktionen:

$$W\langle p,q\rangle := \begin{cases} 0 \text{ falls } \delta_\alpha(p)=\delta_\alpha(q) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n)\ |\alpha(p(n))-\alpha(q(n))| \leq 2^{-n+1} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Test auf Nullstelle:

$$Z(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \delta_\alpha(p) \text{ besitzt eine Nullstelle} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n)\ \mathrm{Inf}(|\alpha(p(n))|) \leq 2^{-n} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Test auf Nullstelle in beliebigem Intervall:

$$Z'\langle p,q,r\rangle := \begin{cases} 0 \text{ falls } \delta_\alpha(p) \text{ besitzt eine Nullstelle in } [\rho(q),\rho(r)] \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

C-stetige Funktionen

Viele Funktionen wird man schon aus dem Grund nicht auf Ω reduzieren können, weil die Funktionswerte von Ω Zahlen sind und keine Folgen. Eine recht einfache unstetige Funktion ist die charakteristische Funktion C, die entscheidet, ob eine natürliche Zahl n in p vorkommt oder nicht. Genauer entscheidet sie, ob n+1 in p vorkommt: $C(p)(n) := \begin{cases} 0 \text{ falls } n \in M_p \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$.

Das hat den Vorteil, daß durch die Nullfolge die leere Menge repräsentiert werden kann. Der Funktionswert von C ist wieder eine Folge. Man kann nun auch viele $\mathbb{B}$-wertige Funktionen auf C reduzieren. Eine Funktion Γ heißt dabei C^1-stetig, gdw. es stetige Funktionen A und B gibt mit $\Gamma(p)=A\langle p, C \circ B(p)\rangle$ für alle $p \in \mathbb{B}$. Nach Satz 4.3 in [Stein] kann man im Falle von C die Reduzierbarkeitsbedingung vereinfachen: Eine Funktion Γ ist C^1-stetig, gdw. es stetige Funktionen A und B gibt mit $\Gamma(p)=A \circ C \circ B(p)$ für alle $p \in \mathbb{B}$.

Es folgen jetzt die C^1-stetigen Funktionen aus [Stein]. Hierbei konnte ich im allgemeinen keine prädikatenlogische Beschreibung angeben, da von dem Funktionswert meistens nur die Erfüllung einer Eigenschaft gefordert ist, die von verschiedenen Folgen erfüllt werden kann. In den betreffenden Beweisen werden dann zwar bestimmte Folgen konstruiert, aber diese lassen sich prädikatenlogisch schlecht beschreiben.

Charakteristische Funktion:

$$C(p)(n) := \begin{cases} 0 \text{ falls } n \in M_p \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ falls } (\exists m)\ p(m)+1=n \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Übersetzung ρ_n nach ρ:

$$\rho(F(p))=\rho_n(p)$$

Übersetzung $\rho_<$ nach ρ:

$$\rho(F'(p))=\rho_<(p)$$

Übersetzung $\rho_>$ nach ρ:

$$\rho(F''(p))=\rho_>(p)$$

Ableitung an einer Stelle:

$\rho(D'\langle p,q\rangle)$ ist die Ableitung von $\delta_\alpha(p)$ an der Stelle $\rho_n(q)$

Ableitungsfunktion:

$\delta_\alpha(A(p))$ ist die Ableitungsfunktion von $\delta_\alpha(p)$

Kleinste Nullstelle:

$\rho(S(p))$ ist die kleinste Nullstelle von $\delta_\alpha(p)$

C^2-stetige Funktionen

Es ist eine interessante Tatsache, daß die mehrmalige Anwendung der Funktion C zu neuen Funktionen führt. So ist die Funktion N, die gleich in der Aufzählung erscheint, mit Hilfe zweimaliger Anwendung von C stetig berechenbar, aber die einmalige Anwendung von C reicht nicht aus: Es gibt stetige Funktionen A_1, A_2 und A_3 mit $N(p)=A_1 \circ C \circ A_2 \circ C \circ A_3(p)$ für alle $p\in \mathbb{B}$, es gibt aber keine stetigen Funktionen A_1 und A_2 mit $N(p)=A_1 \circ C \circ A_2(p)$ für alle $p\in \mathbb{B}$. Dies ist Veranlassung dafür, eine ganze Hierarchie von unstetigen Funktionen rekursiv zu definieren: eine Funktion Γ heißt C^0-stetig, gdw. sie stetig ist, sie heißt C^{n+1}-stetig, wenn es eine C^n-stetige Funktion Σ und stetige Funktionen A_1, A_2 und A_3 gibt mit $\Gamma(p)=A_1 \circ C \circ A_2 \circ \Sigma \circ A_3(p)$ für alle $p\in \mathbb{B}$. Es folgen jetzt die C^2-stetigen Funktionen aus [Stein].

Test auf $M_p=\mathbb{N}$:

$$N(p) := \begin{cases} 0 & \text{falls } M_p=\mathbb{N} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall n)(\exists m)\ p(m)+1=n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Test auf M_p unendlich:

$$U(p) := \begin{cases} 0 & \text{falls } M_p \text{ unendlich} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall n)(\exists m)\ p(m)>n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Halteproblem für ψ:

$$K\langle p,q\rangle := \begin{cases} 0 & \text{falls } \psi_p(q) \text{ existiert} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall n)(\exists m)\ \psi_p(q)(n)=m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Häufungspunkt einer rationalen Folge:

$$H(p) := \begin{cases} 0 & \text{falls 0 Häufungspunkt von } (\nu_Q(p(n)))_{n\in \mathbb{N}} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall m)(\forall k)(\exists n>k)\ |\nu_Q(p(n))|\le 2^{-m} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Häufungspunkt einer reellen Folge:

$$H'\langle p,q\rangle := \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho(p) \text{ Häufungspunkt von } (\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall m)(\forall k)(\exists n>k)\ |\rho(q_n)-\rho(p)|\leq 2^{-m} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } (\forall m)(\forall k)(\exists n>k)\ |\nu_Q(q\langle n,n\rangle)-\nu_Q(p(n))|\leq 2^{-m} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Charakteristische Funktion der Auftretenshäufigkeit:

$$L(p)(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ unendlich oft in } p \text{ auftritt} \\ m+1 & \text{falls } n \text{ } m\text{-mal in } p \text{ auftritt} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} m+1 & \text{falls } (\exists l)(\forall k>l)\ |\{i\leq k \mid p(i)=n\}|=m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

C^n-stetige Funktionen

Zumindest einige Funktionen der höheren Klassen der C-Hierarchie erhält man durch Verallgemeinerung des Halteproblems und des Selbstanwendbarkeitsproblems. Hierbei wird eine Repräsentation von unstetigen Funktionen benötigt. Diese erhält man durch Rückgriff auf die Repräsentation von stetigen Funktionen bei Weihrauch [7]. Dort wurde eine Repräsentation $\chi:\mathbb{B}\to[\mathbb{B}\to\mathbb{N}]$ der $\mathbb{N}$-wertigen stetigen Funktionen und eine Repräsentation $\psi:\mathbb{B}\to[\mathbb{B}\to\mathbb{B}]$ der $\mathbb{B}$-wertigen stetigen Funktionen definiert. Diese Definitionen lassen sich rekursiv auf die C-Hierarchie ausdehnen [8]:

$\overset{n}{\psi}$ wird definiert durch $\overset{0}{\psi}_p(q):=\psi_p(q)$ und $\overset{n+1}{\psi}_{\langle p1,p2\rangle}(q):=\psi_{p2}\circ C\circ\overset{n}{\psi}_{p1}(q)$.

$\overset{n}{\chi}$ wird definiert durch $\overset{0}{\chi}_p(q):=\chi_p(q)$ und $\overset{n+1}{\chi}_{\langle p1,p2\rangle}(q):=\chi_{p2}\circ C\circ\overset{n}{\psi}_{p1}(q)$.

Die universellen Funktionen von $\overset{n}{\chi}$ und $\overset{n}{\psi}$ werden definiert durch $U^n_\chi\langle p,q\rangle:=\overset{n}{\chi}_p(q)$ und $U^n_\psi\langle p,q\rangle:=\overset{n}{\psi}_p(q)$ für alle $p,q\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.

Das Halteproblem für $\overset{n}{\chi}$ ist C^{n+1}-stetig:

$$H^n_\chi\langle p,q\rangle := \begin{cases} 0 & \text{falls } \overset{n}{\chi}_p(q) \text{ existiert} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } (\exists m)\ \overset{n}{\chi}_p(q)=m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

[7] [Weihrauch] Seite 352.
[8] [Stein] Seite 61.

Das Halteproblem für ψ^n ist C^{n+2}-stetig:

$$H^n_\psi\langle p,q\rangle := \begin{cases} 0 \text{ falls } \psi^n_p(q) \text{ existiert} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall m)(\exists k)\ \psi^n_p(q)(m)=k \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Das Selbstanwendbarkeitsproblem für χ^n ist C^{n+1}-stetig:

$$K^n_\chi(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \chi^n_p(p) \text{ existiert} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ falls } (\exists m)\ \chi^n_p(p)=m \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Das Selbstanwendbarkeitsproblem für ψ^n ist C^{n+2}-stetig:

$$K^n_\psi(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \psi^n_p(p) \text{ existiert} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall m)(\exists k)\ \psi^n_p(p)(m)=k \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Es wurde von Stein vor allem bewiesen, daß die Klassen $[\mathbb{B}\to\mathbb{B}]^n$ bzw. $[\mathbb{B}\to\mathbb{N}]^n$ der C^n-stetigen Funktionen für alle $n\in\mathbb{N}$ untereinander verschieden sind, daß es also für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine Funktion $f\in[\mathbb{B}\to\mathbb{B}]^{n+1}/[\mathbb{B}\to\mathbb{B}]^n$ und eine Funktion $g\in[\mathbb{B}\to\mathbb{N}]^{n+1}/[\mathbb{B}\to\mathbb{N}]^n$ gibt. Die C^n-stetigen Funktionen bilden also eine echte Hierarchie.

Kapitel II. Ω-Stetigkeit und C-Stetigkeit

Von diesem Kapitel an untersuche ich neue Funktionen auf ihre Stetigkeitseigenschaften.

Die ersten beiden Funktion sind Ω-stetig und relativ einfach, die weiteren sind C-stetig, sollen aber zum Verständnis von Ω beitragen. Wichtigstes Ziel ist in diesem Kapitel nicht die Untersuchung einzelner Funktionen, sondern die Beziehung von Ω zu C und die mehrfache Anwendung von Ω.

Monotonie einer Folge

Definition 2.1: $MON:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ wird definiert durch

$$MON(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } (\forall m)(\forall n>m)\ p(n)\geq p(m) \\ 1 \text{ sonst}\end{cases} \quad \text{für alle } p\in\mathbb{B}.$$

Satz 2.2: $MON\equiv_2\Omega$.

Beweis: Mit der stetigen Funktion $Gr:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$, definiert durch

$Gr(p)(n):=\begin{cases}0 \text{ falls } p(n+1)\geq p(n) \\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ gilt $MON(p)=\Omega\circ Gr(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$, also $MON\leq_2\Omega$.

Es gilt ebenfalls $\Omega\leq_2 MON$: Denn sei die stetige Funktion $Gr2:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ definiert durch

$Gr2(p)(0):=\begin{cases}1 \text{ falls } p(0)=0 \\ 3 \text{ sonst}\end{cases}$ und $Gr2(p)(n+1):=\begin{cases}n+2 \text{ falls } p(n+1)=0 \\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$.

Falls $p=0^\omega$, gilt $Gr2(p)=(1,2,3,4,5,...)$. $Gr2(p)$ ist also streng monoton steigend. Falls $p\neq 0^\omega$, gibt es ein n mit $p(n)\neq 0$. Falls $p(0)\neq 0$, folgt $Gr2(p)(0)=3$ und $Gr2(p)(1)=2$ oder $Gr2(p)(1)=0$, also $Gr2(p)(1)<Gr2(p)(0)$. Falls $p(0)=0$, gibt es eine kleinste Zahl $n\neq 0$ mit $p(n)\neq 0$. Dann gilt $Gr2(p)(n)=0$ und $Gr2(p)(n-1)=n$, also $Gr2(p)(n)<Gr2(p)(n-1)$. Also gilt $\Omega(p)=MON\circ Gr2(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$.

QED.

Definition 2.3: $STRMON:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ wird definiert durch

$$STRMON(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } (\forall m)(\forall n>m)\ p(n)>p(m) \\ 1 \text{ sonst}\end{cases} \quad \text{für alle } p\in\mathbb{B}.$$

Satz 2.4: STRMON$\equiv_2\Omega$.

Beweis: Mit der stetigen Funktion StrGr:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$, definiert durch
StrGr(p)(n):=$\begin{cases}0 & \text{falls } p(n+1)>p(n)\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$ gilt nämlich STRMON(p)=$\Omega\circ$StrGr(p).
Es gilt ebenfalls $\Omega\leq_2$STRMON, denn mit der stetigen Funktion Gr2 von oben gilt ebenfalls Ω(p)=STRMON$\circ$Gr2(p) für alle $p\in\mathbb{B}$.
QED.

Die Minimumfunktion

Wir wissen schon, daß C nicht auf Ω reduzierbar ist. Es stellt sich die Frage, ob dies nur an den unterschiedlichen Wertebereichen ($\mathbb{B}$ oder $\mathbb{N}$ bzw. {0,1}) liegt, oder ob es Funktionen gibt, die nicht nur aus diesem Grund informationshaltiger als Ω sind.
Mit der Minimumfunktion zeige ich, daß es $\mathbb{N}$-wertige Funktionen gibt, die auf C reduzierbar sind, aber nicht auf Ω.

Definition 2.5: MIN:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{N}$ wird definiert durch MIN(p):=min{p(i) | $i\in\mathbb{N}$} für alle $p\in\mathbb{B}$.

MIN ist total, da das Minimum einer Menge natürlicher Zahlen immer existiert.

Satz 2.6: MIN$\leq_2$C.

Beweis: Sei M:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{N}$ definiert durch M(p):=min{n|p(n)=0} und INC:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch INC(p)(n):=p(n)+1. Dann gilt MIN(p)=M$\circ$C$\circ$INC(p) für alle $p\in\mathbb{N}$.
QED.

Satz 2.7: $\Omega\leq_2$MIN.

Beweis: Sei P:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ definiert durch P(p)(n):=$\begin{cases}0 & \text{falls } p(n)\neq 0\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.
Es gilt dann Ω(p)=NEG$\circ$MIN$\circ$P(p) für alle $p\in\mathbb{B}$. Denn falls $p=0^\omega$, folgt $P(p)=1^\omega$, also MIN$\circ$P(p)=1, also NEG$\circ$MIN$\circ$P(p)=0. Falls $p\neq 0^\omega$, gibt es ein n mit p(n)≠0, also P(p)(n)=0, also gilt MIN$\circ$P(p)=0 und somit NEG$\circ$MIN$\circ$P(p)=1. Also ist Ω auf MIN reduzierbar.
QED.

<u>Satz 2.8</u>: MIN ist nicht auf Ω reduzierbar.

<u>Beweis</u>: Angenommen, es gilt $MIN\leq_2\Omega$. Dann gibt es stetige Funktionen $A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ und $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ mit $MIN(p)=A\langle p,\Omega\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$.
Sei $p_{2,n}:=3^n2^\omega$, $p_{1,n}:=3^n1^\omega$ und $p_{0,n}:=3^n0^\omega$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann muß für mindestens zwei verschiedene i und j aus {0,1,2} für unendlich viele n $\Omega\circ B(p_{i,n})=\Omega\circ B(p_{j,n})=k$ gelten, wobei k konstant 0 oder 1 ist. Da aber A stetig ist, gibt es ein $m\in\mathbb{N}$, so daß $A\langle w,k\rangle=A\langle v,k\rangle$ für alle v,w mit $3^m\leq v$, $3^m\leq w$. Sei $n_0>m$ eine Zahl mit $\Omega\circ B(p_{i,n_0})=\Omega\circ B(p_{j,n_0})=k$. Für n_0 gilt dann $i=MIN(p_{i,n_0})=A\langle p_{i,n_0},\Omega\circ B(p_{i,n_0})\rangle=A\langle p_{i,n_0},k\rangle=A\langle p_{j,n_0},k\rangle=A\langle p_{j,n_0},\Omega\circ B(p_{j,n_0})\rangle$ $=MIN(p_{j,n_0})=j$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von i und j. Also ist MIN nicht auf Ω reduzierbar.
QED.

Die Funktion MIN gibt also mehr Information als Ω. Somit liegt der Unterschied zwischen den C-stetigen und Ω-stetigen Funktionen nicht nur in ihrem Wertebereich. $\mathbb{N}$-wertige C-stetige Funktionen können durchaus mehr Information liefern als Ω. Diese Aussage läßt sich noch weiter verschärfen.

<u>Satz 2.9</u>: Es gibt {0,1}-wertige Funktionen, die auf C, aber nicht auf Ω reduzierbar sind.

<u>Beweis</u>: Betrachte die Funktion $GMIN:\mathbb{B}\to\{0,1\}$, definiert durch

$$GMIN(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } \min\{p(n)|n\in\mathbb{N}\} \text{ gerade}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

GMIN ist auf C reduzierbar, denn es gilt $GMIN(p)=GER\circ MIN(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$ mit der stetigen Funktion $GER:\mathbb{N}\to\{0,1\}$, $GER(n):=\begin{cases}0 \text{ falls n ist gerade}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$.

C ist aber nicht auf GMIN reduzierbar. Betrachte $p_{2,n}:=3^n2^\omega$ und $p_{1,n}:=3^n1^\omega$. Es gilt $GMIN(p_{2,n})=0$ und $GMIN(p_{1,n})=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Angenommen, es gibt stetige Funktionen $A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ und $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ mit $GMIN(p)=A\langle p,\Omega\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Es gilt dann für alle n $GMIN(p_{2,n})=A\langle p_{2,n},\Omega\circ B(p_{2,n})\rangle=0$ und $GMIN(p_{1,n})=A\langle p_{1,n},\Omega\circ B(p_{1,n})\rangle=1$. Da A stetig ist, würde aus $\Omega\circ B(p_{2,n})=\Omega\circ B(p_{1,m})$ für beliebig große n und m auch $A\langle p_{2,n},\Omega\circ B(p_{2,n})\rangle$ $=A\langle p_{1,m},\Omega\circ B(p_{1,m})\rangle$ folgen, da $p_{2,n}$ und $p_{1,m}$ an den ersten n bzw. m Stellen das gleiche Präfix besitzen. Also gibt es ein n_0, so daß für alle $n,m>n_0$ $\Omega\circ B(p_{2,n})\neq\Omega\circ B(p_{1,m})$ gilt. Hieraus folgt sofort $\Omega\circ B(p_{2,n})=\Omega\circ B(p_{2,m})$ und $\Omega\circ B(p_{1,n})=\Omega\circ B(p_{1,m})$ für alle $n,m>n_0$. Also werden $\Omega\circ B(p_{2,n})$ und $\Omega\circ B(p_{1,n})$ ab einer Stelle n_0 konstant, und zwar mit verschiedenen Werten 0 und 1.

Dies ist aber nicht möglich. $\Omega\circ B(p_{2,n})\neq\Omega\circ B(p_{1,n})$ impliziert $B(p_{2,n})=(0,0,0,...)$ und $B(p_{1,n})\neq(0,0,0,...)$ oder $B(p_{2,n})\neq(0,0,0,...)$ und $B(p_{1,n})=(0,0,0,...)$. OBdA sei $B(p_{2,n})=(0,0,0,...)$ und $B(p_{1,n})\neq(0,0,0,...)$ für alle $n>n_0$. Da A stetig ist, gibt es ferner ein minimales $w\leq 3^\omega$, $n_1:=lg(w)\geq n_0$, so daß für alle q mit $w\leq q$ und q‘ mit $w\leq q$‘ $A<q,0>=A<q',0>$ und $A<q,1>=A<q',1>$ gilt.
Also gibt es für alle $n\geq n_1$ ein k mit $B(p_{1,n})(k)\neq 0$. Dann muß es auf Grund der Stetigkeit von B ein Präfix v von $p_{1,n}$ geben, so daß $B(p)(k)\neq 0$ für alle p mit $v\leq p$. Dann gilt $v=3^l$ mit $l<n$ oder $v=3^n1^m$ mit $m\geq 0$. Definiere $q:=v0^\omega$, falls $lg(w)\leq lg(v)$, sonst $q:=w0^\omega$. Es gilt dann $v\leq q$ und $w\leq q$. Es folgt $B(q)\neq(0,0,0,...)$ und $A<q,\Omega\circ B(q)>=1$. Hieraus folgt $GMIN(q) =A<q,\Omega\circ B(q)>=1$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von GMIN.
Im Fall $B(p_{2,n})\neq(0,0,0,...)$ und $B(p_{1,n})=(0,0,0,...)$ kann analog geschlossen werden.
Also ist GMIN nicht auf Ω reduzierbar.
QED.

Mehrfache Anwendung von Ω

Es stellt sich die Frage, ob eine mehrfache Anwendung von Ω zu größeren Funktionenklassen führt. Dies ist tatsächlich der Fall, wie ich gleich zeigen werde. Aber alle Funktionen sind auf C reduzierbar.

Definition 2.10: Eine Funktion $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ oder $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ heißt Ω^0-stetig gdw. Γ stetig ist und Ω^{n+1}-stetig gdw. es eine stetige Funktion $A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ ($A:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$) und eine Ω^n-stetige Funktion $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ gibt mit $\Gamma(p)=A<p,\Omega\circ\Sigma(p)>$ für alle $p\in\mathbb{B}$.

Satz 2.11: Es gibt eine Ω^2-stetige Funktion, die nicht auf Ω, aber auf C reduzierbar ist.

Beweis: Sei $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ definiert durch

$$\Gamma(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } p(i) \text{ ist gerade für alle } i\in\mathbb{N} \text{ und es gibt ein } k\in\mathbb{N} \text{ mit } p(k)=2\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Γ ist Ω^2-stetig:
Definiere $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$$\Sigma(p)(n):=\begin{cases}0 \text{ falls } (\exists i\in\mathbb{N})\ p(i) \text{ ungerade oder } p(n)\neq 2\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Σ ist Ω-stetig. Denn mit $F:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, $F(q)(i):=\begin{cases}0 \text{ falls } q(i) \text{ gerade}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ und $E:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$,
$E<p,j>(n):=\begin{cases}0\ p(n)\neq 2 \text{ oder } j=1\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ $\Sigma(p)(n)=E<p,\Omega\circ F(p)>(n)$:

$\Sigma(p)(n)=0 \Rightarrow (\exists i\in \mathbb{N})$ p(i) ungerade oder $p(n)\neq 2 \Rightarrow F(p)\neq 0^\omega$ oder $p(n)\neq 2$

$\Rightarrow \Omega\circ F(p)=1$ oder $p(n)\neq 2 \Rightarrow E\langle p,\Omega\circ F(p)\rangle(n)=0$ und

$\Sigma(p)(n)=1 \Rightarrow (\exists i\in \mathbb{N})$ p(i) gerade und $p(n)=2 \Rightarrow F(p)=0^\omega$ und $p(n)=2$

$\Rightarrow \Omega\circ F(p)=0$ und $p(n)=2 \Rightarrow E\langle p,\Omega\circ F(p)\rangle(n)=1$.

Da $E\langle p,\Omega\circ F(p)\rangle$ $\mathbb{C}$-wertig und total ist, folgt $\Sigma(p)=E\langle p,\Omega\circ F(p)\rangle$, also $\Sigma\leq_2\Omega$.

Definiere $A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ durch

$A\langle p,0\rangle:=1$ und $A\langle p,1\rangle:=0$. Es gilt dann $\Gamma(p)=A\langle p,\Omega\circ\Sigma(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$, denn

$A\langle p,\Omega\circ\Sigma(p)\rangle=0 \Leftrightarrow \Omega\circ\Sigma(p)=1 \Leftrightarrow (\exists n)\ \Sigma(p)(n)\neq 0 \Leftrightarrow (\exists n)\ \Sigma(p)(n)=1$

$\Leftrightarrow (\exists n)(\forall i)$ p(i) gerade und $p(n)=2$

$\Leftrightarrow [(\exists n)\ p(n)=2]$ und $[(\forall i)$ p(i) gerade$]$

$\Leftrightarrow \Gamma(p)=0$ und

$A\langle p,\Omega\circ\Sigma(p)\rangle=1 \Leftrightarrow \Omega\circ\Sigma(p)=0 \Leftrightarrow (\forall n)\ \Sigma(p)(n)=0$

$\Leftrightarrow (\forall n)(\exists i)$ p(i) ungerade oder $p(n)\neq 2$

$\Leftrightarrow [(\forall n)\ p(n)\neq 2]$ oder $[(\exists i)$ p(i) ungerade$]$

$\Leftrightarrow \Gamma(p)=1$.

Somit ist Γ Ω^2-stetig.

Γ ist C-stetig:

Definiere $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$$\Sigma(p)(n):=\begin{cases}1 \text{ falls } p(n) \text{ ungerade}\\ 2 \text{ falls } p(n)=2\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Σ ist stetig. Definiere $A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ durch

$$A(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } p(0)=1 \text{ und } p(1)=0\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Es gilt dann $\Gamma(p)=A\circ C\circ\Sigma(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$, denn

$A\circ C\circ\Sigma(p)=0 \Leftrightarrow C\circ\Sigma(p)(0)=1$ und $C\circ\Sigma(p)(1)=0$

$\Leftrightarrow [(\forall i)\ \Sigma(p)(i)\neq 1]$ und $[(\exists i)\ \Sigma(p)(i)=2]$

$\Leftrightarrow [(\forall i)$ p(i) gerade$]$ und $[(\exists i)\ p(i)=2]$

$\Leftrightarrow \Gamma(p)=0$ und

$A\circ C\circ\Sigma(p)=1 \Leftrightarrow C\circ\Sigma(p)(0)=0$ oder $C\circ\Sigma(p)(1)=1$

$\Leftrightarrow [(\exists i)\ \Sigma(p)(i)=1]$ oder $[(\forall i)\ \Sigma(p)(i)\neq 2]$

$\Leftrightarrow [(\exists i)$ p(i) ungerade$]$ oder $[(\forall i)\ p(i)\neq 2]$

$\Leftrightarrow \Gamma(p)=1$.

Γ ist nicht Ω-stetig:
Annahme: Es gibt stetige Funktionen A und B mit $\Gamma(p)=A<p,\Omega\circ B(p)>$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Sei für alle $n,m\in\mathbb{N}$ $p_{1,n}:=0^n20^\omega$, $p_{2,n,m}:=0^n20^m10^\omega$ und $p_3:=0^\omega$. Es gilt $\Gamma(p_{1,n})=0$, $\Gamma(p_{2,n,m})=1$ und $\Gamma(p_3)=1$. Da $p_{1,n}$, $p_{2,n,m}$ und p_3 gleiche Präfixe der Länge n haben, muß für genügend großes $n\in\mathbb{N}$ $\Omega\circ B(p_{1,n})=i$, $\Omega\circ B(p_{2,n,m})=j$ und $\Omega\circ B(p_3)=j$ gelten mit i=1 und j=0 oder i=0 und j=1.
Falls i=1 und j=0, gilt also $B(p_{1,n})\neq 0^\omega$ und $B(p_{2,n,m})=0^\omega$ für genügend großes n und beliebiges m. Es gibt dann ein $k\in\mathbb{N}$ mit $B(p_{1,n})(k)\neq 0$. Da B stetig ist, gibt es ein $w\leq p_{1,n}$ mit $B(q)(k)\neq 0$ für alle $q\in\mathbb{B}$ mit $w\leq q$. Definiere q_0 durch $q_0:=0^n20^{lg(w)}10^\omega$. Dann gilt $w\leq q_0$ und deshalb $B(q_0)(k)\neq 0$. Aber wegen $q_0=p_{2,n,lg(w)}$ gilt $B(p_{2,n,lg(w)})(k)\neq 0$. Dies ist ein Widerspruch.
Falls i=0 und j=1, gilt also $B(p_{1,n})=0^\omega$ und $B(p_3)\neq 0^\omega$. Es gibt dann ein $k\in\mathbb{N}$ mit $B(p_3)(k)\neq 0$. Da B stetig ist, gibt es ein $w\leq p_3$ mit $B(q)(k)\neq 0$ für alle $q\in\mathbb{B}$ mit $w\leq q$. Definiere q_0 durch $q_0:=0^{lg(w)}20^\omega$. Dann gilt $w\leq q_0$ und deshalb $B(q_0)(k)\neq 0$. Aber wegen $q_0=p_{1,lg(w)}$ gilt $B(p_{1,lg(w)})(k)\neq 0$. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch.
Insgesamt folgt, daß Γ nicht Ω-stetig sein kann.
QED.

Im weiteren will ich aber zunächst nicht die Ω^n-stetigen Funktionen betrachten. Sie reduzieren die durch mehrfache Anwendung von Ω erhaltene Information auf die Werte 0 und 1 und scheinen dadurch weniger zu leisten, als möglich wäre. Ich untersuche statt dessen eine zweite Art von Funktionen, die ich Ω_n-stetige Funktionen nenne. Die Ω_n-stetigen Funktionen bilden eine Hierarchie unterhalb der C-stetigen Funktionen, wie ich gleich zeigen werde. [9]

<u>Definition 2.12</u>: Eine Funktion $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ oder $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ heißt Ω_n-stetig, gdw. es eine stetige Funktion $A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ $(A:\mathbb{B}\to\mathbb{B})$ und stetige Funktionen $A_1,\ldots,A_n:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ gibt mit $\Gamma(p)=A<p,\Omega\circ A_1(p),\Omega\circ A_2(p),\ldots,\Omega\circ A_n(p)>$ für alle $p\in\mathbb{B}$.

Zur Untersuchung dieser Funktionen definiere ich noch eine weitere Klasse von Funktionen.

<u>Definition 2.13</u>: Sei für alle $n\in\mathbb{N}$ $C_n:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ definiert durch

$$C_n(p)(i):=\begin{cases}0 \text{ falls } i<n \text{ und } (\exists k)\ p(k)=i+1\\ 1 \text{ falls } i<n \text{ und } (\forall k)\ p(k)\neq i+1\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}.$$

[9] Die genaue Beziehung von Ω^n-stetigen und Ω_n-stetigen Funktionen muß noch untersucht werden.

C_n ist also an den ersten n Stellen identisch mit C, liefert aber an den unendlich vielen restlichen Stellen keine Information.

<u>Definition 2.14</u>: Eine Funktion $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ oder $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ heißt C_n-stetig gdw. es stetige Funktionen $A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ $(A:\mathbb{B}\to\mathbb{B})$ und $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ gibt mit $\Gamma(p)=A\langle p,C_n\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$.

<u>Satz 2.15</u>: Wenn f C_n-stetig ist, so ist f auch Ω_n-stetig.

<u>Beweis</u>: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang (n=0): Ist f C_0-stetig, so ist f stetig und somit Ω_0-stetig.
Induktionsschluß ($n\to n+1$): Sei f C_{n+1}-stetig. Es gibt dann stetige Funktionen A und B mit $f(p)=A\langle p,C_{n+1}\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Die Funktion X, definiert durch

$$X\langle p,i,q\rangle:=\langle p,(i,q(0),q(1),q(2),\ldots)\rangle \text{ ist stetig.}$$

Es gilt somit $f(p)=A\langle p,C_{n+1}\circ B(p)\rangle$
$=A\circ X\langle p,C_{n+1}\circ B(p)(0),(C_{n+1}\circ B(p)(1),C_{n+1}\circ B(p)(2),\ldots)\rangle$.
Mit der stetigen Funktion DEC, definiert durch

$$DEC(q)(n):=\begin{cases} q(n)-1 \text{ falls } q(n)>0 \\ 0 \text{ sonst}\end{cases}, \text{ gilt}$$

$(C_{n+1}(q)(1),C_{n+1}(q)(2),\ldots)=C_n\circ DEC(q)$.
Denn $C_n\circ DEC(q)(i)=0 \Leftrightarrow i\geq n$ oder $(\exists k)\ DEC(q)(k)=i+1 \Leftrightarrow i+1\geq n+1$ oder $(\exists k)\ q(k)=i+2$ $\Leftrightarrow C_{n+1}(q)(i+1)=0$.
Außerdem gilt $C_{n+1}\circ B(p)(0)=0 \Leftrightarrow (\exists i)\ B(p)(i)=1 \Leftrightarrow (\exists i)\ Y\circ B(p)(i)\neq 0 \Leftrightarrow \Omega\circ Y\circ B(p)=1$.
Y ist dabei definiert durch

$$Y(q)(n):=\begin{cases} 1 \text{ falls } q(n)=1 \\ 0 \text{ sonst}\end{cases} \text{ und ist stetig.}$$

Mit $A_1:=Y\circ B$ und $E\langle p,i,q\rangle:=\begin{cases}\langle p,1,q\rangle \text{ falls } i=0 \\ \langle p,0,q\rangle \text{ sonst}\end{cases}$ folgt dann
$f(p)=A\circ X\circ E\langle p,\Omega\circ A_1(p),C_n\circ DEC\circ B(p)\rangle$.
Nach Induktionsvoraussetzung gibt es stetige Funktionen $Z,Z_2,Z_3,Z_4,\ldots,Z_{n+1}$ mit $C_n\circ DEC\circ B(p)=Z\langle p,\Omega\circ Z_2(DEC\circ B(p)),\Omega\circ Z_3(DEC\circ B(p)),\ldots,\Omega\circ Z_{n+1}(DEC\circ B(p))\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$.
Also gilt insgesamt $f(p)=A\circ X\circ E\langle p,\Omega\circ A_1(p),C_n\circ DEC\circ B(p)\rangle$
$=A\circ X\circ E\langle p,\Omega\circ A_1(p),Z\langle p,\Omega\circ Z_2(DEC\circ B(p)),\Omega\circ Z_3(DEC\circ B(p)),\ldots,\Omega\circ Z_{n+1}(DEC\circ B(p))\rangle\rangle$.
Es gibt eine stetige Funktion Γ mit
$A\circ X\circ E\langle p,p_1,Z\langle p,p_2,p_3,\ldots,p_{n+1}\rangle\rangle=\Gamma\langle p,p_1,p_2,p_3,\ldots,p_{n+1}\rangle$.
Mit dieser Funktion gilt dann $f(p)=A\circ X\circ E\langle p,\Omega\circ A_1(p),C_n\circ DEC\circ B(p)\rangle$
$=A\circ X\circ E\langle p,\Omega\circ A_1(p),Z\langle p,\Omega\circ Z_2(DEC\circ B(p)),\Omega\circ Z_3(DEC\circ B(p)),\ldots,\Omega\circ Z_{n+1}(DEC\circ B(p))\rangle\rangle$
$=\Gamma\langle p,\Omega\circ A_1(p),\Omega\circ Z_2\circ DEC\circ B(p),\Omega\circ Z_3\circ DEC\circ B(p),\ldots,\Omega\circ Z_{n+1}\circ DEC\circ B(p)\rangle$.

Also ist f Ω_n-stetig.

QED.

Satz 2.16: Wenn f Ω_n-stetig ist, so ist f auch C_n-stetig.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang (n=0): Wenn f Ω_0-stetig ist, dann ist f stetig und somit C_0-stetig.

Induktionsschluß (n→n+1): Sei f Ω_{n+1}-stetig. Dann gibt es stetige Funktionen $A,A_1,...,A_{n+1}$ mit $f(p)=A\langle p,\Omega\circ A_1(p),\Omega\circ A_2(p),...,\Omega\circ A_{n+1}(p)\rangle$.

Mit der stetigen Funktion X, definiert durch

$X\langle p,q_1,\langle p,q_2,q_3,...,q_{n+1}\rangle\rangle:=\langle p,q_1,q_2,...,q_{n+1}\rangle$ gilt

$f(p)=A\langle p,\Omega\circ A_1(p),\Omega\circ A_2(p),...,\Omega\circ A_{n+1}(p)\rangle$

$=A\circ X\langle p,\Omega\circ A_1(p),\langle p,\Omega\circ A_2(p),...,\Omega\circ A_{n+1}(p)\rangle\rangle$. Nach der IV gibt es stetige Funktionen V und W mit $\langle p,\Omega\circ A_2(p),\Omega\circ A_3(p),...,\Omega\circ A_{n+1}(p)\rangle=V\langle p,C_n\circ W(p)\rangle$.

Also folgt $f(p)=A\circ X\langle p,\Omega\circ A_1(p),V\langle p,C_n\circ W(p)\rangle\rangle$. Es gibt eine stetige Funktion R mit $\langle p,i,V\langle p,q\rangle\rangle=R\langle p,\langle i,q\rangle\rangle$. Damit folgt $f(p)=A\circ X\circ R\langle p,\langle\Omega\circ A_1(p),C_n\circ W(p)\rangle\rangle$. Mit

$$Y(q)(n):=\begin{cases}1 \text{ falls } q(n)\neq 0\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$ gilt $\Omega\circ A_1(p)=1 \Leftrightarrow (\exists k)\ A_1(p)(k)\neq 0 \Leftrightarrow (\exists k)\ Y\circ A_1(p)(k)=1$

$\Leftrightarrow C\circ Y\circ A_1(p)(0)=0$.

Ferner gilt für alle $i\in\mathbb{N}$ $C_n\circ W(p)(i)=C_{n+1}\circ INC2\circ W(p)(i+1)$, wobei INC2 definiert ist durch

$$INC2(q):=\begin{cases}0 \text{ falls } q(n)=0\\ q(n)+1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Denn es gilt $C_n\circ W(p)(i)=1$

$\Leftrightarrow i<n$ und $(\forall k)\ W(p)(k)\neq i+1$

$\Leftrightarrow i<n$ und $(\forall k)\ INC2\circ W(p)(k)\neq i+2$

$\Leftrightarrow i+1<n+1$ und $(\forall k)\ INC2\circ W(p)(k)\neq i+2$

$\Leftrightarrow C_{n+1}\circ INC2\circ W(p)(i+1)=1$.

Ich definiere weiter die Funktion Z durch

$Z(q)(2n):=Y\circ A_1(q)(n)$ und $Z(q)(2n+1):=INC2\circ W(q)(n)$.

Wenn man noch weiter P definiert durch

$$P(q)(0):=\begin{cases}1 \text{ falls } q(0)=0\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$ und $P(q)(i+1):=q(i+1)$, gilt

$f(p)=A\circ X\circ R\langle p,\langle\Omega\circ A_1(p),C_n\circ W(p)\rangle\rangle=A\circ X\circ R\langle p,P(C_{n+1}\circ Z(p))\rangle$.

Denn $P(C_{n+1}\circ Z(p))(0)=0$

$\Leftrightarrow C_{n+1}\circ Z(p)(0)=1$

$\Leftrightarrow (\forall k)\ Z(p)(k)\neq 1$

$\Leftrightarrow (\forall k)\ Y\circ A_1(p)(k)\neq 1$ (denn $INC2\circ W(p)(i)=1$ ist sowieso nicht möglich)

$\Leftrightarrow (\forall k)\ A_1(p)(k)=0$

$\Leftrightarrow \Omega\circ A_1(p)(k)=0$

und für alle $i>0$ gilt

$P(C_{n+1}\circ Z(p))(i)=0$

$\Leftrightarrow C_{n+1}\circ Z(p)(i)=0$

$\Leftrightarrow (\exists k)\ Z(p)(k)=i+1$ oder $i\geq n+1$

$\Leftrightarrow (\exists k)\ INC2\circ W(p)(k)=i+1$ oder $i\geq n+1$ (denn $Y\circ A_1(p)(i)>1$ ist nicht möglich)

$\Leftrightarrow (\exists k)\ W(p)(k)=i$ oder $i\geq n+1$

$\Leftrightarrow C_n\circ W(p)(i-1)=0$.

Mit der stetigen Funktion Q, definiert durch $Q\langle p,q\rangle:=\langle p,P(q)\rangle$ gilt schließlich $f(p)=A\circ X\circ R\langle p,P(C_{n+1}\circ Z(p))\rangle=A\circ X\circ R\circ Q\langle p,C_{n+1}\circ Z(p)\rangle$. Also ist f C_{n+1}-stetig.

QED.

Die Ω_n-stetigen Funktionen sind also genauso schwierig wie die C_n-stetigen Funktionen. Es soll jetzt gezeigt werden, daß die C_n-stetigen Funktionen eine echte Hierarchie unterhalb von C bilden.

Satz 2.17: Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt: C_{n+1} ist nicht auf C_n reduzierbar.

Beweis: Annahme: C_{n+1} ist auf C_n reduzierbar. Es gibt dann stetige Funktionen A und B mit $C_{n+1}(p)=A\langle p,C_n\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$. $C_n\circ B(p)$ kann nur 2^n verschiedene Werte annehmen, da nur die ersten n Stellen verschieden sein können.

Sei $f:\{0,1\}^{n+1}\rightarrow\mathbb{N}^{n+1}$ definiert durch $f(w)(i):=\begin{cases} i+1 \text{ falls } w(i)=1 \\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$ für alle $i\leq n$.

Ich definiere für alle $k\in\mathbb{N}$ und $w\in\{0,1\}^{n+1}$ $p_{k,w}:=0^k f(w)0^\omega$. $C_n\circ B(p_{k,w})$ kann für alle $k\in\mathbb{N}$ und $w\in\{0,1\}^{n+1}$ ebenfalls nur 2^n verschiedene Werte annehmen. Da A stetig ist, gibt es zu jedem $v\in\{0,1\}^n 0^\omega$ ein $m_v\in\mathbb{N}$, so daß für alle $k,l\geq m_v$ und $w,u\in\{0,1\}^{n+1}$ $\llbracket A\langle p_{k,w},v\rangle\rrbracket_{n+1}=\llbracket A\langle p_{l,u},v\rangle\rrbracket_{n+1}$ gilt. Definiere M als die kleinste Zahl, so daß für alle $k,l\geq M$ und $w,u\in\{0,1\}^{n+1}$ und für alle $v\in\{0,1\}^n 0^\omega$ $\llbracket A\langle p_{k,w},v\rangle\rrbracket_{n+1}=\llbracket A\langle p_{l,u},v\rangle\rrbracket_{n+1}$ gilt. Diese Zahl existiert, da sie das Maximum von 2^n Zahlen ist. Hieraus folgt, daß es für alle $k\geq M$ und für alle $w\in\{0,1\}^{n+1}$ nur 2^n verschiedene Werte für $\llbracket A\langle p_{k,w},C_n\circ B(p_{k,w})\rangle\rrbracket_{n+1}$ geben kann. Aber es gibt für $\llbracket C_{n+1}(p_{k,w})\rrbracket_{n+1}$ insgesamt 2^{n+1} verschiedene Werte, denn für je zwei verschiedene $v,w\in\{0,1\}^{n+1}$ sind $C_{n+1}(p_{k,v})$ und $C_{n+1}(p_{k,w})$ innerhalb der ersten n+1 Stellen verschieden. Also gibt es ein $k\in\mathbb{N}$ und $w\in\{0,1\}^{n+1}$ mit $C_{n+1}(p_{k,w})\neq A\langle p_{k,w},C_n\circ B(p_{k,w})\rangle$. Also ist die Annahme $C_{n+1}(p)=A\langle p,C_n\circ B(p)\rangle$ nicht für alle $p\in\mathbb{B}$ richtig. Also ist C_{n+1} für kein $n\in\mathbb{N}$ auf C_n reduzierbar.

QED.

<u>Definition 2.18</u>: Eine Funktion Γ heißt C_∞-stetig, gdw. es stetige Funktionen A und B und zu jedem $p\in\mathbb{B}$ ein $n\in\mathbb{N}$ gibt mit $\Gamma(p):=A<p,C_n\circ B(p)>$.

Bei dieser Definition ist es wichtig, daß das n von der Folge p abhängt und nicht für alle Argumente gleich zu sein braucht.

<u>Satz 2.19</u>: MIN ist C_∞-stetig.

<u>Beweis</u>: Sei $M:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{N}$ definiert durch $M<p,q>:=\min\{n|n\leq p(0) \text{ und } q(n)=0\}$ und $INC:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch $INC(p)(n):=p(n)+1$. Dann gilt für alle $p\in\mathbb{B}$ $MIN(p)=M<p,C_{p(0)}\circ INC(p)>$. Denn es gilt $M<p,C_{p(0)}\circ INC(p)>=k$

$\Leftrightarrow k=\min\{n|n\leq p(0) \text{ und } C_{p(0)}\circ INC(p)(n)=0\}$

$\Leftrightarrow k\leq p(0) \text{ und } k=\min\{n|C_{p(0)}\circ INC(p)(n)=0\}$

$\Leftrightarrow k\leq p(0) \text{ und } k=\min\{n|(\exists i)\ INC(p)(i)=n+1\}$

$\Leftrightarrow k\leq p(0) \text{ und } k=\min\{n|(\exists i)\ p(i)=n\}$

$\Leftrightarrow k\leq p(0) \text{ und } k=\min\{p(i)|i\in\mathbb{N}\}$

$\Leftrightarrow k=\min\{p(i)|i\in\mathbb{N}\}$

$\Leftrightarrow k=MIN(p)$.

Also gibt es zu jedem $p\in\mathbb{B}$ ein $n\in\mathbb{N}$ mit $MIN(p)=M<p,C_n\circ INC(p)>$. $n:=p(0)$ leistet das Gewünschte. Also ist MIN C_∞-stetig.
QED.

<u>Satz 2.20</u>: Es gibt C_∞-stetige Funktionen, die für kein $n\in\mathbb{N}$ auf C_n reduzierbar sind.

<u>Beweis</u>: MIN ist eine solche Funktion. Annahme: $MIN(p):=A<p,C_n\circ B(p)>$ für ein $n\in\mathbb{N}$ und alle $p\in\mathbb{B}$. $C_n\circ B(p)$ hat nur 2^n verschiedene Werte.
Sei $p:=(2^n)^\omega$. Für jedes $w\in\{0,1\}^n$ gibt es ein $v\leq p$, so daß für alle q und q‘ mit $v\leq q$ und $v\leq q‘$ $A<q,w0^\omega>=A<q‘,w0^\omega>$ gilt. Also gibt es ein $M\in\mathbb{N}$, so daß für alle q mit $(2^n)^M\leq q$ nur 2^n verschiedene Werte für $A<q,C_n\circ B(q)>$ existieren. Also gibt es auch für alle $p_k:=(2^n)^M k^\omega$ ebenfalls nur 2^n verschiedene Werte von $A<p_k,C_n\circ B(p_k)>$. Aber für $MIN(p_k)$ gibt es 2^{n+1} verschiedene Werte ($MIN(p_k)=\min\{k,2^n\}$ für alle k). Also ist $MIN(p):=A<p,C_n\circ B(p)>$ nicht für alle $p\in\mathbb{B}$ möglich und mithin MIN nicht C_n-stetig. Nach dem letzten Satz wissen wir schon, daß MIN C_∞-stetig ist.
QED.

Die Menge der C_∞-stetigen Funktionen liegt also über der Hierarchie der C_n-stetigen Funktionen, ist aber noch nicht identisch mit der der C-stetigen Funktionen.

<u>Satz 2.21</u>: C ist nicht C_∞-stetig.

<u>Beweis</u>: Annahme: C ist C_∞-stetig. Es gibt dann stetige Funktionen A und B und für jedes $p\in\mathbb{B}$ ein $n\in\mathbb{N}$ mit $C(p)=A\langle p,C_n{\circ}B(p)\rangle$.
Ich will jetzt rekursiv eine Folge von Mengen Q_n konstruieren, deren Durchschnitt genau eine Folge p_∞ enthält, für die $C(p_\infty)=A\langle p_\infty,C_n{\circ}B(p_\infty)\rangle$ für kein $n\in\mathbb{N}$ gelten kann. Jede Menge Q_n enthält nur Folgen, die mit dem Präfix w_n beginnen.
Q_0 und w_0 werden definiert durch $Q_0:=\{0^{p(0)}1^{q(0)}0^{p(1)}2^{q(1)}0^{p(2)}3^{q(2)}...|p\in\mathbb{B},q\in\mathbb{C}\}$ und $w_0:=\varepsilon$.
Seien Q_n und w_n schon definiert und es gelte $Q_n=\{w_n0^{p(0)}(n+1)^{q(0)}0^{p(1)}(n+2)^{q(1)}0^{p(2)}(n+3)^{q(2)}...|p\in\mathbb{B},q\in\mathbb{C}\}$. Es gibt für alle $q_n\in Q_n$ höchstens 2^n unterschiedliche Werte von $C_n{\circ}B(q_n)$. Also gibt es, da A stetig ist, ein $k\in\mathbb{N}$, so daß für alle p mit $p(0)\geq k$ auch nur 2^n unterschiedliche Werte für die ersten 2n+1 Stellen von $A\langle q_n,C_n{\circ}B(q_n)\rangle$ existieren. Es gibt aber für die ersten 2n+1 Stellen von $C(q_n)$, auch für beliebig großes p(0), mindestens 2^{n+1} verschiedene Werte. Mithin gibt es ein ein $x\in\{0,1\}$, so daß für alle $q_n\in Q_n$ mit $w_n0^k(n+1)^x\leq q_n$ $C(q_n)\neq A\langle q_n,C_n{\circ}B(q_n)\rangle$ gilt. Definiere $w_{n+1}:=w_n0^k(n+1)^x$ und $Q_{n+1}:=\{w_{n+1}0^{p(0)}(n+2)^{q(0)}0^{p(1)}(n+3)^{q(1)}0^{p(2)}(n+4)^{q(2)}...|p\in\mathbb{B},q\in\mathbb{C}\}$.

Definiere nun $p_\infty:=\sup\{w_n|n\in\mathbb{N}\}$. Es ist zu beweisen, daß für kein $n\in\mathbb{N}$ $C(p_\infty)=A\langle p_\infty,C_n{\circ}B(p_\infty)\rangle$ gilt:
Annahme: Es gibt ein $n\in\mathbb{N}$ gilt $C(p_\infty)=A\langle p_\infty,C_n{\circ}B(p_\infty)\rangle$. Es gilt aber $p_\infty\in Q_{n+1}$ und Q_{n+1} wurde so definiert, daß für alle $q\in Q_{n+1}$ $C(q)\neq A\langle q,C_n{\circ}B(q)\rangle$ gilt. Also folgt $C(p_\infty)\neq A\langle p_\infty,C_n{\circ}B(p_\infty)\rangle$.
Also gibt es ein $p\in\mathbb{B}$, so daß $C(p)=A\langle p,C_n{\circ}B(p)\rangle$ kein $n\in\mathbb{N}$ erfüllt ist. Folglich ist C nicht C_∞-stetig.
QED.

Die bisherigen Ergebnisse legen es nahe, auch für höhere Klassen der C-Hierarchie Zwischenstufen zu definieren. Ich möchte hier nur zwei Definitionen geben, aber auf weitere Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit verzichten.

Definition 2.22: Eine Funktion Γ heißt C^n_m-stetig, gdw. es stetige Funktionen A, B und E und eine C^n-stetige Funktion Σ gibt mit $\Gamma(p)=A<p,\Sigma\circ B<p,C_m\circ E(p)>>$ für alle $p\in\mathbb{B}$.

Definition 2.23: Eine Funktion Γ heißt C^n_∞-stetig, gdw. es stetige Funktionen A, B und E und eine C^n-stetige Funktion Σ gibt mit $\Gamma(p)=A<p,\Sigma\circ B<p,C_\infty\circ E(p)>>$ für alle $p\in\mathbb{B}$.

Kapitel III. C^1-stetige Funktionen

Während das letzte Kapitel die unterste Stufe der C-Hierarchie untersuchte, soll es in diesem um spezielle C-stetige Funktionen gehen. Ich betrachte das Problem, eine Folge zu sortieren, die höheren Ableitungen einer mehrmals stetig differenzierbaren Funktion, die Übersetzung zwischen verschiedenen adischen Zahlendarstellungen und eine nicht stetig fortsetzbare partielle Funktion. Das Ableitungsproblem ist natürlich ein Kernproblem der Analysis. Das Übersetzungsproblem behandelt eine Funktion zwischen reellen Zahlen, hat aber eine größere Affinität zur Zahlentheorie.

Sortierung einer Folge

Die Funktion SORT sortiert eine Folge von natürlichen Zahlen nach ihrer Größe. Diese Sortierung besitzt aufgrund der unendlichen Argumente die Anomalie, daß durch unendlich oft auftretende Elemente größere Zahlen weggefiltert werden.

<u>Definition 3.1</u>: $\mathrm{SORT}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ wird rekursiv definiert durch $\mathrm{SORT}(p)(0):=\min\{p(i) \mid i\in\mathbb{N}\}$ und $\mathrm{SORT}(p)(n+1):=\min\{p(i) \mid p(i)\geq p(n) \text{ und } |\{j\leq n \mid \mathrm{SORT}(p)(j)=p(i)\}|<|\{j \mid (p)(j)=p(i)\}|\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Diese Definition drückt aus, daß SORT(p)(0) das kleinste Element von p überhaupt und SORT(p)(n+1) das kleinste Element von p sein soll, das in SORT(p)(0) bis SORT(p)(n) noch nicht so oft vorkommt wie in p.

<u>Satz 3.2</u>: $\mathrm{SORT} \equiv_2 C$.

<u>Beweis</u>:
1) $\mathrm{SORT}\leq_2 C$: Definiere $P:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $P(p)(0):=<1,p(0)>+1$ und $P(p)(n+1):=<i,p(n+1)>+1$, falls $p(n+1)$ in $(p(0),p(1),...,p(n+1))$ genau i-mal vorkommt. Definiere weiter $V:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch
$V(q)(0):=\min\{n \mid q<1,n>=0\}$ und

$$V(q)(n+1):=\begin{cases} m \text{ falls } q<i+1,m>=0 \text{ und } m \text{ kommt in} \\ \quad (V(q)(0),V(q)(1),\ldots,V(q)(n)) \text{ i-mal vor, } i>0 \\ \min\{m \mid q<1,m>=0 \text{ und } m>V(q)(n)\} \text{ sonst} \end{cases}.$$

P und V sind stetig. Dann gilt $\mathrm{SORT}(p)=V\circ C\circ P(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Dies beweise ich durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang (n=0):
$V\circ C\circ P(p)(0) \quad =\min\{m \mid C\circ P(p)<1,m>=0\}$

$=\min\{m \mid (\exists k)\ P(p)(k)=<1,m>+1\}$

$=\min\{m \mid (\exists k)\ P(p)(k)=<1,p(k)>+1 \text{ und } m=p(k)\}$

$=\min\{p(k) \mid P(p)(k)=<1,p(k)>+1\}$

$=\min\{p(k) \mid k\in \mathbb{N}\}$, denn es gibt zu jedem m ein k mit $P(p)(k)=<1,p(k)>+1$ und $p(k)=p(m)$

$=SORT(p)(0)$

Induktionsschluß ($n\rightarrow n+1$):

1. Fall: Es gibt ein m, so daß $C\circ P(p)<i+1,m>=0$ und m kommt in $(V\circ C\circ P(p)(0),V\circ C\circ P(p)(1),...,V\circ C\circ P(p)(n))$ i-mal vor, $i>0$

$\Rightarrow$ Es gibt ein k mit $P(p)(k)=<i+1,m>+1$ und m kommt in $(V\circ C\circ P(p)(0),V\circ C\circ P(p)(1),...,V\circ C\circ P(p)(n))$ i-mal vor, $i>0$

$\Rightarrow$ Es gibt ein k mit $P(p)(k)=<i+1,p(k)>+1$ und p(k) kommt (nach IV) in $(SORT(p)(0),SORT(p)(1),...,SORT(p)(n))$ i-mal vor, $i>0$

$\Rightarrow$ Es gibt ein k mit p(k) kommt in $(p(0),p(1),...,p(k))$ i+1-mal vor und p(k) kommt in $(SORT(p)(0),SORT(p)(1),...,SORT(p)(n))$ i-mal vor, $i>0$

$\Rightarrow SORT(p)(n+1)=p(k)$

$\Rightarrow SORT(p)(n+1)=m$

$\Rightarrow SORT(p)(n+1)=V\circ C\circ P(p)(n+1)$

2. Fall: $V\circ C\circ P(p)(n+1)=\min\{m \mid C\circ P(p)<1,m>=0 \text{ und } m>V\circ C\circ P(p)(n)\}$

$\Rightarrow V\circ C\circ P(p)(n+1)=\min\{m \mid C\circ P(p)<1,m>=0 \text{ und } m>SORT(p)(n)\}$ nach IV

$\Rightarrow V\circ C\circ P(p)(n+1)=\min\{m \mid (\exists k)\ P(p)(k)=<1,m>+1 \text{ und } m>SORT(p)(n)\}$

$\Rightarrow V\circ C\circ P(p)(n+1)=\min\{p(k) \mid P(p)(k)=<1,p(k)>+1 \text{ und } p(k)>SORT(p)(n)\}$

$\Rightarrow V\circ C\circ P(p)(n+1)=\min\{p(k) \mid p(k) \text{ kommt in } (p(0),p(1),...,p(k)) \text{ einmal vor und } p(k)>SORT(p)(n)\}$

$\Rightarrow V\circ C\circ P(p)(n+1)=SORT(p)(n+1)$

Insgesamt folgt also $SORT\leq_2 C$.

2) $C\leq_2 SORT$: Definiere $V:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch $V(p)(0):=2\cdot p(0)$ und

$$V(p)(n+1):=\begin{cases}2\cdot p(n+1) \text{ falls } p(n+1) \text{ in } (p(0),p(1),...,p(n)) \text{ nicht vorkommt}\\ 2\cdot(n+1)+1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Definiere weiter $E:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch $E(q)(n):=\begin{cases}0 \text{ falls } 2(n+1)\in\{q(0),q(1),...,q(n+1)\}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$

V und E sind stetig und es gilt $C(p)=E\circ SORT\circ V(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Denn für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$E\circ SORT\circ V(p)(n)=0 \Rightarrow 2(n+1)\in\{SORT\circ V(p)(0),SORT\circ V(p)(1),...,SORT\circ V(p)(n+1)\}$

$\Rightarrow (\exists k\leq n+1)\ SORT\circ V(p)(k)=2(n+1)$

$\Rightarrow (\exists k)\ V(p)(k)=2(n+1)$

$\Rightarrow (\exists k)\ p(k)=n+1$ und p(k) kommt in $(p(0),p(1),...,p(k-1))$ nicht vor

$\Rightarrow (\exists k)\ p(k)=n+1$

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow C(p)(n)=0 \\
E\circ SORT\circ V(p)(n)=1 \quad & \Rightarrow 2(n+1)\notin \{SORT\circ V(p)(0),SORT\circ V(p)(1),...,SORT\circ V(p)(n+1)\} \\
& \Rightarrow (\forall k\leq n+1)\ SORT\circ V(p)(k)\neq 2(n+1) \\
& \Rightarrow (\forall k)\ V(p)(k)\neq 2(n+1) \\
& \Rightarrow (\forall k)\ p(k)\neq n+1 \text{ oder } p(k) \text{ kommt in } (p(0),p(1),...,p(k-1)) \text{ vor} \\
& \Rightarrow \text{Es gibt kein erstes Auftreten von } n+1 \text{ in } p \\
& \Rightarrow \text{Es gibt kein Auftreten von } n+1 \text{ in } p \\
& \Rightarrow (\forall k)\ p(k)\neq n+1 \\
& \Rightarrow C(p)(n)=1
\end{aligned}
$$

Da $E\circ SORT\circ V(p)(n)$ für alle $n\in \mathbb{N}$ definiert ist und nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, ist die Aussage $C(p)=E\circ SORT\circ V(p)$ für alle $p\in \mathbb{B}$ bewiesen. Also gilt $C\leq_2 SORT$.
Insgesamt gilt also $SORT \equiv_2 C$.
QED.

Höhere Ableitungen einer Funktion

Von Stein [10] wurde gezeigt, daß die Ableitung einer einmal stetig differenzierbaren Funktion an einer Stelle, aber auch deren Ableitungsfunktion auf dem Intervall [0,1] C-stetig ist. Es liegt der Gedanke nahe, daß die Konstruktion höherer Ableitungen nicht mehr C-stetig ist. Denn wenn man z.B. eine zweimal stetig differenzierbare Funktion zweimal differenziert, so bildet man im allgemeinen die erste Ableitungsfunktion und differenziert diese wiederum. Also würde man zwei Anwendungen der C-Funktion benötigen.

Ich werde zeigen, daß auch höhere Ableitungen C-stetig sind. Hierzu nehme ich eine ähnliche Beweisführung wie in [Stein] vor, benutze jedoch an Stelle des Differentialquotienten $\frac{f(z)-f(z')}{(z-z')}$ höhere Differentialquotienten. So vermeide ich die Notwendigkeit, mehrere Ableitungsschritte vornehmen zu müssen.

Hierzu müssen wir uns erstmal mit den höheren Differentialquotienten beschäftigen:

[10] [Stein] Seite 35 ff.

Satz 3.3: Die n-te Ableitung der n-mal stetig differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hat die Gestalt

$$f^{(n)}(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} (-\varepsilon)^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon).$$

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von L´Hopital. Vorher sind einige Hilfssätze zu beweisen:

Hilfssatz 3.4: Für alle $k\le n$ gilt $\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)\right)^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(k)}(x+i\varepsilon) \cdot i^k$. [11]

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang (k=0): Ist klar.
Induktionsschritt ($k\to k+1$, $k<n$):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)\right)^{(k+1)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(k)}(x+i\varepsilon) \cdot i^k\right)' \qquad \text{nach IV}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(k+1)}(x+i\varepsilon) \cdot i^{k+1}.$$

QED.

Hilfssatz 3.5: Für alle $k\le n$ gilt $(-\varepsilon)^{n^{(k)}} = (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (-\varepsilon)^{n-k}$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang (k=0):

$$(-1)^0 \cdot \frac{n!}{(n-0)!} \cdot (-\varepsilon)^{n-0} = (-\varepsilon)^n = (-\varepsilon)^{n^{(0)}}.$$

Induktionsschritt ($k\to k+1$, $k<n$):

$$(-\varepsilon)^{n^{(k+1)}} = \left((-\varepsilon)^{n^{(k)}}\right)' = \left((-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (-\varepsilon)^{n-k}\right)' \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{n! \cdot (n-k)}{(n-k)!} \cdot (-\varepsilon)^{n-k-1}$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{(n-(k+1))!} \cdot (-\varepsilon)^{n-(k+1)}$$

QED.

[11] Es ist die Ableitung nach ε gemeint.

Folgerung 3.6: Für alle $k \le n$ gilt

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)^{(k)}}{(-\varepsilon)^{n\ (k)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(k)}(x+i\varepsilon) \cdot i^k}{(-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (-\varepsilon)^{n-k}} .$$

Hieraus ergibt sich für k=n :

Folgerung 3.7:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)^{(n)}}{(-\varepsilon)^{n\ (n)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(n)}(x+i\varepsilon) \cdot i^n}{(-1)^n \cdot \frac{n!}{(n-n)!} \cdot (-\varepsilon)^{n-n}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(n)}(x+i\varepsilon) \cdot i^n}{(-1)^n \cdot n!} .$$

Um diesen Ausdruck auszuwerten, brauchen wir zwei weitere Hilfssätze:

Hilfssatz 3.8: $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot i^k = 0$ für alle $n \ge 2$ und $1 \le k < n$.

Beweis: Durch vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang (n=2): Dann ist k=1.

$$\sum_{i=1}^{2} \binom{2}{i} \cdot (-1)^i \cdot i = \binom{2}{1} \cdot (-1) \cdot 1 + \binom{2}{2} \cdot 2 = -2 + 2 = 0.$$

Induktionsschluß ($n \rightarrow n+1$): Es ist dann $1 \le k \le n$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot (-1)^i \cdot i^k = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot i^k + \binom{n}{i-1} \cdot (-1)^i \cdot i^k \right] \text{ nach dem Additionssatz [12]}$$

$$= \binom{n}{0}(-1) + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot i^k + \binom{n}{i} \cdot (-1)^{i+1} \cdot (i+1)^k \right] + \binom{n}{n+1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n+1)^k$$

[12] Additionssatz für Binomialkoeffizienten, [Bronstein] Seite 157.

$$=-1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\Big[(-1)^i\cdot i^k+(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot i^j\Big]+0 \quad \text{nach dem Binomischen Lehrsatz}$$

$$=-1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\Big[(-1)^i\cdot i^k+(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\cdot i^j+(-1)^{i+1}\cdot i^k\Big]$$

$$=-1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\cdot i^j$$

$$=-1-\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\cdot i^j$$

$$=-1-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^j \quad \text{nach Umordnung der Summen}$$

$$=-1-\binom{k}{0}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i \qquad \text{,da nach IV alle Summanden für } j>0 \text{ Null werden}$$

$$=-1-1\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i$$

$$=-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i \;=0 \text{ nach Satz (2.8) [Bronstein] Seite 158.}$$

QED.

Hilfssatz 3.9: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^n=(-1)^n\cdot n!$ für alle $n\geq 1$.

Beweis: Durch vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang (n=1):

$$\sum_{i=1}^{1}\binom{1}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^1=\binom{1}{1}\cdot(-1)\cdot 1=-1=(-1)^1\cdot 1!.$$

Induktionsschluß ($n\rightarrow n+1$):

$$\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}\Big[\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^{n+1}+\binom{n}{i-1}\cdot(-1)^i\cdot i^{n+1}\Big] \quad \text{nach dem Additionssatz}$$

$$=\binom{n}{0}(-1)+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^{n+1}+\binom{n}{i}\cdot(-1)^{i+1}\cdot(i+1)^{n+1}\right]+\binom{n}{n+1}\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}$$

$$=-1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left[(-1)^i\cdot i^{n+1}+(-1)^{i+1}\cdot(i+1)^{n+1}\right]+\ 0$$

$$=-1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left[(-1)^i\cdot i^{n+1}+(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\cdot i^j\right]\quad \text{nach dem Binomischen Lehrsatz}$$

$$=-1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left[(-1)^i\cdot i^{n+1}+(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\cdot i^j+(-1)^{i+1}\cdot i^{n+1}\right]$$

$$=-1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\cdot i^j$$

$$=-1-\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^j\quad \text{nach Umordnung der Summen}$$

$$=-1-\binom{n+1}{0}\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^0-\binom{n+1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^n\quad \text{nach Hilfssatz 3.8}$$

$$=-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i-\binom{n+1}{n}\cdot(-1)^n\cdot n!\quad \text{nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$=0-(n+1)\cdot(-1)^n\cdot n!\quad \text{nach Satz (2.8) [Bronstein] Seite 158}$$

$$=(n+1)\cdot(-1)^{n+1}\cdot n!$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!$$

QED.

<u>Beweis von Satz 3.3</u>: Zu beweisen ist $f^{(n)}(x):=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon)^{-n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\cdot f(x+i\varepsilon)$.

Es gilt $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f(x+i\varepsilon)}{(-\varepsilon)^n}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(x+i\varepsilon)}{(-\varepsilon)^n}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f(x)}{(-\varepsilon)^n}=\lim_{\varepsilon\to 0}f(x)\frac{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot}{(-\varepsilon)^n}\ .$$

Da Zähler und Nenner des Bruchs gegen 0 konvergieren, läßt sich der Satz von L´Hopital anwenden. Dieser Satz läßt sich nicht nur einmal anwenden, sondern insgesamt n-mal, da nach Folgerung 3.6 für alle $k \leq n$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f(x+i\varepsilon)^{(k)}}{(-\varepsilon)^{n\,(k)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f^{(k)}(x+i\varepsilon)\cdot i^k}{(-1)^k\cdot \frac{n!}{(n-k)!}\cdot(-\varepsilon)^{n-k}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot \lim_{\varepsilon\to 0} f^{(k)}(x+i\varepsilon)\cdot i^k}{(-1)^k\cdot \frac{n!}{(n-k)!}\cdot(-\varepsilon)^{n-k}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f^{(k)}(x)\cdot i^k}{(-1)^k\cdot \frac{n!}{(n-k)!}\cdot(-\varepsilon)^{n-k}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} f^{(k)}(x) \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^k}{(-1)^k\cdot \frac{n!}{(n-k)!}\cdot(-\varepsilon)^{n-k}} \quad .$$

Nach Satz 3.8 gilt $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot i^k = 0$ für alle $n\geq 2$ und $1\leq k<n$. Somit konvergieren Zähler und Nenner beide gegen 0, womit die Voraussetzung des Satzes von L´Hopital erfüllt ist. Nach der n-ten Anwendung des Satzes aber erhält man

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (-\varepsilon)^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i\cdot f(x+i\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f(x+i\varepsilon)^{(n)}}{(-\varepsilon)^{n\,(n)}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f^{(n)}(x+i\varepsilon)\cdot i^n}{(-1)^n\cdot n!} \quad .$$

Nach Satz 3.9 gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot f^{(n)}(x+i\varepsilon)\cdot i^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\cdot(-1)^i\cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \left(f^{(n)}(x+i\varepsilon)\right)\cdot i^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(n)}(x) \cdot i^n$$

$$= f^{(n)}(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot i^n$$

$$= f^{(n)}(x) \cdot (-1)^n \cdot n!.$$

Also folgt $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)^{(n)}}{(-\varepsilon)^{n\ (n)}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f^{(n)}(x+i\varepsilon) \cdot i^n}{(-1)^n \cdot n!}$

$$= \frac{f^{(n)}(x) \cdot (-1)^n \cdot n!}{(-1)^n \cdot n!} = f^{(n)}(x), \text{ was zu beweisen war.}$$

QED.

Folgerung 3.10: Die n-te Ableitung der n-mal stetig differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hat die Gestalt $f^{(n)}(x) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n+i} \cdot f(x+i\varepsilon)$.

Beweis: Es gilt $\dfrac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^{n+i} \cdot f(x+i\varepsilon)}{(\varepsilon)^n} = \dfrac{(-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)}{(\varepsilon)^n}$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)}{(-1)^n (\varepsilon)^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot f(x+i\varepsilon)}{(-\varepsilon)^n}.$$

QED.

Nun folgt der erste Satz über höhere Ableitungen:

Satz 3.11: Es gibt eine stetige Funktion $D^k:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, so daß für alle $p\in \mathrm{Def}(\delta_\alpha)$, $q\in \rho_n^{-1}(]0,1[)$ gilt: Falls $\delta_\alpha(p)$ in einem Intervall um $\rho_n(q)$ k-mal differenzierbar ist, so ist $\rho_n(D^k\langle p,q\rangle)$ die k-te Ableitung von $\delta_\alpha(p)$ an der Stelle $\rho_n(q)$.

<u>Beweis</u>:

Der Beweis erfolgt für die k-te Ableitung in Anlehnung an den Beweis von Stein [13].

Seien $p \in \mathbb{B}$ und $q \in \mathbb{B}$ beliebig, so daß $\rho_n(q) \in]0,1[$ und $\delta_\alpha(p)$ k-mal differenzierbar in einer Umgebung von $\rho_n(q)$. Sei ferner $x := \rho_n(q)$, $x_n := \nu_Q(q(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $f := \delta_\alpha(p)$ und $f_m := \alpha(p(m))$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Setze für alle $n \in \mathbb{N}$ $D_n^k := (2^{-n})^{-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k+i} \cdot f(x_n + i \cdot 2^{-n}) = 2^{nk} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k+i} \cdot f(x_n + i \cdot 2^{-n})$.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} D_n^k = f^{(k)}(x)$ nach Folgerung 3.10.

Betrachte nun $D_{n,m}^k := 2^{nk} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k+i} \cdot f_m(x_n + i \cdot 2^{-n})$.

Dann gilt für alle $n,m \in \mathbb{N}$:

$$| D_{n,m}^k - D_n^k | = 2^{nk} \left| \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k+i} \cdot f_m(x_n + i \cdot 2^{-n}) - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k+i} \cdot f(x_n + i \cdot 2^{-n}) \right|$$

$$= 2^{nk} \left| \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k+i} \cdot [f_m(x_n + i \cdot 2^{-n}) - f(x_n + i \cdot 2^{-n})] \right|$$

$$\leq 2^{nk} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left| f_m(x_n + i \cdot 2^{-n}) - f(x_n + i \cdot 2^{-n}) \right| \quad \text{nach der Dreiecksungleichung}$$

$$\leq 2^{nk} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot 2^{-m} \quad \text{da } \left| f_m(y) - f(y) \right| \leq 2^{-m} \text{ für alle } y \in]0,1[$$

$$= 2^{nk} \cdot 2^{-m} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^{nk-m} \cdot 2^k \quad \text{nach Satz (2.7) bei Bronstein [14]}$$

$$= 2^{nk-m+k}.$$

Setze nun $D_n^{k*} := D_{n,nk+n+k}^k$. Dann gilt $| D_n^{k*} - D_n^k | \leq 2^{nk-nk-n-k+k} = 2^{-n}$ und somit $\lim_{n\to\infty} D_n^{k*} = \lim_{n\to\infty} D_n^k = f^{(k)}(x)$.

Definiere also

[13] Beweis von Satz 8, [Stein] Seite 35.
[14] [Bronstein] Seite 158.

$$D^k\langle p,q\rangle(n) := \nu_Q^{-1}\Big(2^{nk}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k+i}\cdot\alpha(p(n\cdot k+n+k))(\nu_Q(q(n))+i\cdot 2^{-n})\Big).$$ [15]

Es gilt dann $\rho_n(D^k\langle p,q\rangle(n)) = \lim_{n\to\infty} \nu_Q(D^k\langle p,q\rangle(n)) = \lim_{n\to\infty} D_n^{k*} = \delta_\alpha(p)^{(k)}(\rho_n(q))$, also die k-te Ableitung von $\delta_\alpha(p)$ an der Stelle $\rho_n(q)$.

QED.

Satz 3.12: Es gibt eine C-stetige Funktion $D'^k:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, so daß für alle $p\in Def(\delta_\alpha)$, $q\in\rho_n^{-1}(]0,1[)$ gilt: Falls $\delta_\alpha(p)$ in einem Intervall um $\rho_n(q)$ k-mal differenzierbar ist, so ist $\rho(D'^k\langle p,q\rangle)$ die k-te Ableitung von $\delta_\alpha(p)$ an der Stelle $\rho_n(q)$.

Beweis: Definiere $D'^{(k)} := F\circ D^{(k)}$. Es folgt die C-Stetikeit von $D'^{(k)}$ aus der von F.

QED.

Der Beweis von Satz 10 bei Stein läßt sich analog übertragen [16]:

Satz 3.13: Es gibt eine C-stetige Funktion $A^l:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, so daß für alle $p\in Def(\delta_\alpha)$ gilt: Falls $\delta_\alpha(p)$ l–mal stetig differenzierbar ist, so ist $\delta_\alpha(A^l(p))$ die l-te Ableitungsfunktion von $\delta_\alpha(p)$.

Beweis: Sei $f:=\delta_\alpha(p)$ und $f^{(l)}$ die l-te Ableitung von f. Die höheren Differentialquotienten konvergieren auf dem kompakten Intervall [0,1] gleichmäßig gegen $f^{(l)}$. Deshalb gibt es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $k\in\mathbb{N}$, so daß für alle $x\in[0,1]$ gilt:

$$\varepsilon<2^{-k} \Rightarrow \Big|f^{(l)}(x) - \varepsilon^{-l}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}(-1)^{l+i}\cdot f(x+i\varepsilon)\Big| < 2^{-n}.$$

Definiere $D_n(f)(x) := 2^{nl}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}(-1)^{l+i}\cdot f(x+i\cdot 2^{-n})$ für alle $x\in[0,1]$.

Dann konvergieren die $D_n(f)$ gleichmäßig gegen $f^{(l)}$. Weiter gilt: Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, so konvergiert die Folge $(D_n(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f^{(l)}$.

---

[15] Genaugenommen liefert natürlich ν_Q^{-1} eine Menge und keine Zahl. Man müßte hier eigentlich einen eindeutigen Wert definieren, was durch Kürzen auch möglich ist.

[16] Beweis von Satz 10, [Stein] Seite 37.

Setze nun $Q(p)\langle n,m\rangle := \nu_Q^{-1}\Big(2^{nl}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}(-1)^{l+i}\cdot\alpha(p(n))(\nu_Q(m)+i\cdot 2^{-n})\Big)$. Dann ist Q stetig und berechenbar und für alle $p\in Def(\delta_\alpha)$, $k\in\mathbb{N}$, $m\in\nu_Q^{-1}([0,1]\cap\mathbb{Q})$ gilt:

$\nu_Q(Q(p)\langle k,m\rangle)=D_k(\alpha(p(k)))(\nu_Q(m))$.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es für alle $p\in Def(\delta_\alpha)$, so daß $\delta_\alpha(p)$ l–mal stetig differenzierbar ist, zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $k\in\mathbb{N}$, so daß für alle $m\in\nu_Q^{-1}([0,1]\cap\mathbb{Q})$ gilt:

$|\ \nu_Q(Q(p)\langle k,m\rangle) - (\delta_\alpha(p))^{(l)}(\nu_Q(m))\ |<2^{-n}$.

Definiere

$E(p)\langle i,n,j,k\rangle := \begin{cases} 0 \text{ falls } |\ \alpha(i)(\nu_Q(j)) - \nu_Q(Q(p)\langle k,j\rangle)\ |<2^{-n} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$.

Dann ist E stetig und berechenbar. Setze weiter

$\Sigma(p)\langle i,n,j,k,m\rangle := \begin{cases} \langle i,n,m\rangle+1 \text{ falls } k>m \text{ und } \nu_Q(j)\in[0,1] \text{ und } E(p)\langle i,n,j,k\rangle\neq 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$ und

$\Gamma(q)(n):=\pi_1\mu\langle i,m\rangle[p\langle i,n,m\rangle\neq 0]$ für $p,q\in\mathbb{B}$, $i,j,k,n,m\in\mathbb{N}$.

Dann sind Σ und Γ stetig und berechenbar. Es kann jetzt genau wie im Beweis von Satz 10 bei Stein gezeigt werden, daß $\Gamma C\Sigma$ die Bedingungen des Satzes erfüllt. Die Beweisführung ist wörtlich dieselbe und soll deshalb hier nicht weiter ausgeführt werden. Mit $\Gamma C\Sigma(p)$ ist also eine C-stetige l-te Ableitungsfunktion gefunden worden.

QED.

Bei den letzten Problemen wurde schon vorausgesetzt, daß die vorliegende Funktion an einer Stelle oder auf einem Intervall differenzierbar ist. Nur unter dieser Voraussetzung ist die Ableitungsfunktion C-stetig. Es scheint schwerer zu sein, die Differenzierbarkeit überhaupt festzustellen. Es ist fraglich, ob sich dieses Problem überhaupt in der C-Hierarchie einordnen läßt.

Übersetzung von r-adischer in s-adische Darstellung

Als nächste Funktion betrachte ich die Übersetzung einer Zahl von r-adischer Darstellung in die s-adische Darstellung. Ich beschränke mich dabei auf reelle Zahlen im Intervall [0,1], um Fallunterscheidungen zwischen Stellen vor und nach dem Komma zu vermeiden. Ich verwende deshalb für die m-adische Darstellung folgende Repräsentation:

Definition 3.14: Eine m-adische Repräsentation δ_m des Intervalls [0,1] wird definiert durch $\delta_m:\Sigma_m^{\omega}\to\mathbb{R}$, $\delta_m(p):=\sum_{i=1}^{\infty}p(i)\cdot m^{-i}$. Dabei ist Σ_m durch $\Sigma_m:=\{0,1,2,...,m-1\}$ definiert.

Sei ferner $\nu_m:\Sigma_m^{*}\to\mathbb{N}$ definiert durch $\nu_m(a_0,a_1,...,a_n):=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot m^{n-i}$.

Es soll jetzt die Übersetzungsfunktion $TRANS_{rs}$ definiert werden. Sie übersetzt eine Zahl von r-adischer in die s-adische Darstellung . Zu dieser Funktion habe ich bisher unveröffentliche Aufzeichnungen von Klaus Weihrauch bekommen. Einige Beweise stammen von Klaus Weihrauch. Ich werde diese kennzeichnen.

$TRANS_{rs}$ ist durch die Bedingung $\delta_r(p)=\delta_s(TRANS_{rs}(p))$ nicht eindeutig festgelegt. Dies liegt daran, daß es zwei s-adische Darstellungen ein und derselben reellen Zahl geben kann. Genauer gilt:

Satz 3.15: [17]

1) $\delta_r^{-1}\{0\}=\{(0,0,0,...)\}$ und $\delta_r^{-1}\{1\}=\{(r-1)^{\omega}\}$.

Für alle $x\in\,]0,1[$ gilt:

2) $\delta_r^{-1}\{x\}$ hat ein oder zwei Elemente.

3) $\delta_r^{-1}\{x\}$ hat zwei Elemente $\Leftrightarrow$ $(\exists n,k\in\mathbb{N})\ x=\frac{n}{r^k}$.

4) Falls $\delta_r^{-1}\{x\}$ zwei Elemente hat, dann haben sie die Form $wa0^{\omega}$ und $w(a-1)(r-1)^{\omega}$ mit $w\in\Sigma_r^{k}$, $a\in\Sigma_r$, $1\leq a<r$.

Beweis:

1) klar.

2) Sei $x\in\,]0,1[$ und $\delta_r(p)=x$. Es gebe ein $q\neq p$ mit $\delta_r(q)=x$.

Sei i die kleinste Zahl mit $p(i)\neq q(i)$. Dann gilt mit $m:=\nu_r(p(0),p(1),...,p(i-1))$

[17] Satz und Beweis aus nicht veröffentlichten handschriftlichen Aufzeichnungen von Klaus Weihrauch.

$$\frac{r\cdot m+p(i)}{r^i} \le x \le \frac{r\cdot m+p(i)+1}{r^i} \quad \text{und} \quad \frac{r\cdot m+q(i)}{r^i} \le x \le \frac{r\cdot m+q(i)+1}{r^i} \; .$$

O.B.d.A. gelte p(i)<q(i). Dann gilt q(i)=p(i)+1. Hieraus folgt

$$\frac{r\cdot m+p(i)}{r^i} \le x \le \frac{r\cdot m+q(i)}{r^i} \quad \text{und} \quad \frac{r\cdot m+q(i)}{r^i} \le x \le \frac{r\cdot m+q(i)+1}{r^i} \text{ , also}$$

$$\frac{r\cdot m+q(i)}{r^i} \le x \le \frac{r\cdot m+q(i)}{r^i} \text{ , also } x=\frac{r\cdot m+q(i)}{r^i} \text{ und damit}$$

$p=(p(0),p(1),...,p(i-1))p(i)(r-1)^\omega$ und

$q=(p(0),p(1),...,p(i-1))(p(i)+1)0^\omega$.

Sei auch $\delta_r(q')=x$ und $q'\neq p$. Man schließt analog, daß gilt:

$q'=(p(0),p(1),...,p(i-1))(p(i)+1)0^\omega$.

Also sind q und q' identisch. Es gibt also höchstens zwei verschiedene Elemente in $\delta_r^{-1}\{x\}$.

3) $\delta_r^{-1}\{x\}$ habe zwei Elemente $\Rightarrow$ $(\exists n,k\in \mathbb{N})$ $x=\frac{n}{r^k}$, denn nach Beweis von 2) gilt

$x=\frac{r\cdot m+q(i)}{r^i}$, wähle $n:=r\cdot m+q(i)$ und $k:=i$.

Es gelte andererseits $(\exists n,k\in \mathbb{N})$ $x=\frac{n}{r^k}$. Der Bruch sei soweit gekürzt, daß r nicht Teiler von n ist. Es gibt ein w, $lg(w)\le k$ und $\nu_r(w)=n$, da $0<x<1$. Es gilt dann $x= \delta_r(w0^\omega)$ und mit w=va $x= \delta_r(v(a-1)(r-1)^\omega)$. Also hat $\delta_r^{-1}\{x\}$ zwei Elemente.

4) Unter 3) gezeigt.

QED.

<u>Definition 3.16</u>: $TRANS_{rs}:\Sigma_r^\omega\to\Sigma_s^\omega$ heißt diejenige Funktion mit $\delta_r(p)=\delta_s(TRANS_{rs}(p))$ für alle $p\in\Sigma_r^\omega$, für die gilt: $[(\exists w\in \Sigma_s^*)\ TRANS_{rs}(p)=w0^\omega] \Rightarrow TRANS_{rs}(p)=0^\omega$.

Diese Definition vermeidet die Mehrdeutigkeit von $TRANS_{rs}$. Nach Satz 3.15 ist Mehrdeutigkeit nur möglich, wenn $TRANS_{rs}(p)=wa0^\omega$ für ein $w\in \Sigma_s^*$ und $a\in \Sigma_s$. In diesem Fall wird $TRANS_{rs}(p)=w(a-1)(s-1)^\omega$ gesetzt. Nur im Fall $TRANS_{rs}(p)=0^\omega$ ist die Übersetzung eindeutig.

<u>Definition 3.17</u>: Für $w\in \Sigma_r^*$, $w=(a_0,a_1,...,a_n)$ wird I_r definiert durch

$$I_r(w):=\left[\frac{\nu_r(w)}{r^{lg(w)}}, \frac{\nu_r(w)+1}{r^{lg(w)}} \right].$$

Es gilt $I_r(\varepsilon)=[0,1]$.

<u>Hilfssatz 3.18</u>: Sei $I_r(w)\subseteq I_s(y)$ und a<r. Dann gibt es höchstens ein b<s mit $I_r(wa)\subseteq I_s(yb)$.

Beweis: Die $I_s(yc)$, $c<s$, haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Also gilt $I_r(wa)\subseteq I_s(yb)$ für höchstens ein b.
QED.

Definition 3.19: Sei $\beta:\Sigma_r^*\to\Sigma_s^*$ definiert durch $\beta(\varepsilon):=\varepsilon$ und

$$\beta(wa):=\begin{cases}\beta(w) \text{ falls } I_r(wa)\subseteq I_s(\beta(w)b) \text{ für kein } b<s\\ \beta(w)b \text{ sonst für das b mit } I_r(wa)\subseteq I_s(\beta(w)b)\end{cases}.$$

Hilfssatz 3.20: Es gilt für alle $w\in\Sigma_r^*$ $I_r(w)\subseteq I_s(\beta(w))$.

Beweis: Der einfache Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über die Länge von w.
Induktionsanfang (n=0): $I_r(w)=I_r(\varepsilon)=[0,1]$ und $I_s(\beta(w))=I_s(\varepsilon)=[0,1]$.
Induktionsschluß ($n\to n+1$): Sei $lg(w)=n+1$ und $w=va$ mit $v\in\Sigma_r^*$ und $a\in\Sigma_r$. Es gilt nach Induktionsvoraussetzung $I_r(v)\subseteq I_s(\beta(v))$. Falls $I_r(va)\subseteq I_s(\beta(v)b)$ für kein $b<s$, gilt $\beta(w)=\beta(va)=\beta(v)$ und somit $I_r(w)=I_r(va)\subseteq I_r(v)\subseteq I_s(\beta(v))=I_s(\beta(w))$. Falls es ein $b\in\Sigma_r$ gibt mit $I_r(va)\subseteq I_s(\beta(v)b)$, gilt $I_r(w)=I_r(va)\subseteq I_s(\beta(v)b)=I_s(\beta(va))=I_s(\beta(w))$.
QED.

Die Definitionen 3.17 und 3.19 werden für den Beweis des nächsten Satzes gebraucht. Für $w\leq p$ drückt das Intervall $I_r(w)$ aus, welche Werte $\delta_r(p)$ annehmen kann, wenn nur das Präfix w von p bekannt ist. Die Funktion β berechnet stetig die Übersetzung von p in das s-adische System, soweit das auf Grund der endlichen Präfixe von p möglich ist.

Satz 3.21: Es gebe ein k mit $s|r^k$. Sei $p\in\Sigma_r^\omega$. Dann ist β auf p unbeschränkt. [18]

Beweis: Annahme: Sei β auf p beschränkt. Dann gibt es ein $w\leq p$ mit $\beta(v)=\beta(w)$ für alle v mit $w\leq v<p$. Es gilt $I_r(w)\subseteq I_s(\beta(w))$.
Für alle v mit $w\leq v<p$ und alle $b\in\Sigma_s$ gilt dann $I_r(v)\not\subseteq I_s(\beta(w)b)$.
Es gibt ein v_0, so daß für alle v mit $v_0\leq v<p$ $lg(I_r(v))<lg(I_s(\beta(w)b))$ gilt.
Es gibt dann ein b, so daß

$$\frac{\nu_r(v)}{r^{lg(v)}} < \frac{\nu_s(\beta(w)b)}{s^{lg(\beta(w)b)}} < \frac{\nu_r(v)+1}{r^{lg(v)}} \text{, also}$$

$$\nu_r(v) < \frac{r^{lg(v)}}{s^{lg(\beta(w)b)}}\cdot\nu_s(\beta(w)b) < \nu_r(v)+1 \text{ für alle v mit } v_0\leq v<p.$$

[18] Satz und Beweis aus nicht veröffentlichten handschriftlichen Aufzeichnungen von Klaus Weihrauch.

Wegen $s|r^k$ gibt es ein v mit $v_0 \le v < p$, so daß $\frac{r^{lg(v)}}{s^{lg(\beta(w)b)}}$ ganzzahlig wird. Das ist ein Widerspruch. Also ist β auf p unbeschränkt.
QED.

<u>Folgerung 3.22</u>: Falls alle Primteiler von s auch Primteiler von r sind, ist $TRANS_{rs}$ stetig.

<u>Beweis</u>: Falls alle Primteiler von s auch Primteiler von r sind, gibt es ein k mit $s|r^k$. Dann stimmt β nach Satz 3.21 mit $TRANS_{rs}$ überein. Da β stetig ist, ist auch $TRANS_{rs}$ stetig.
QED.

<u>Satz 3.23</u>: Falls es einen Primteiler von s gibt, der kein Primteiler von r ist, gilt $\Omega \le_2 TRANS_{rs}$, ist $TRANS_{rs}$ also unstetig. [19]

<u>Beweis</u>: Sei q die Darstellung von $\frac{1}{s}$ im r-adischen System. q ist dann periodisch und läßt sich darstellen durch $q=w^\omega$ mit geeignetem $w \in \Sigma_r^*$ [20]. Definiere $B:\mathbb{B} \to \Sigma_r^\omega$ durch

$B(p)(k \cdot lg(w)+n) := \begin{cases} w(n) & \text{falls } p(k)=0 \\ (r-1) & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $0 \le n \le lg(w)-1$ und $k \ge 0$.

Definiere weiter $A:\mathbb{B} \to \mathbb{N}$ durch $A(p) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p(0) \ge 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Es gilt dann $\Omega(p)=1$

$\Rightarrow k=\min\{m \mid p(m) \ne 0\}$ existiert

$\Rightarrow (\exists k)\ B(p)=w^{k-1}(r-1)^{lg(w)}v$ mit geeignetem $v \in \Sigma_r^\omega$

$\Rightarrow TRANS_{rs} \circ B(p)(0) \ge 1$,denn $TRANS_{rs} \circ B(w^\omega)=0(s-1)^\omega$ und für alle $p \ne 0^\omega$ gilt $\delta_s(TRANS_{rs} \circ B(p)) > \delta_s(TRANS_{rs} \circ B(w^\omega))$

$\Rightarrow A \circ TRANS_{rs} \circ B(p)=1$

und $\Omega(p)=0$

$\Rightarrow (\forall k)\ p(k)=0$

$\Rightarrow B(p)=w^\omega$

$\Rightarrow TRANS_{rs} \circ B(p)=0(s-1)^\omega$

$\Rightarrow TRANS_{rs} \circ B(p)(0)=0$

$\Rightarrow A \circ TRANS_{rs} \circ B(p)=0$

---

[19] Dieser und die folgenden Sätze außer Satz 3.24 stammen wieder ausschließlich von mir.

[20] Nach [Niven] Seite 352 hat $\frac{1}{s}$ die kleinste Vorperiodenlänge i und die kleinste Periodenlänge j gdw. i und j die <u>kleinsten</u> Zahlen sind mit $s|r^i(r^j-1)$ (dort für Dezimalzahlen bewiesen, aber leicht auf beliebige adische Systeme zu verallgemeinern). Da es einen Primteiler von s gibt, der kein Teiler von r ist, folgt i=0. Also gibt es ein w mit $q=w^\omega$ und $lg(w)=j$.

Es gilt mithin $\Omega(p)=A\circ TRANS_{rs}\circ B(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$, und da A und B stetig sind, folgt $\Omega\leq_2 TRANS_{rs}$.
QED.

Aus Folgerung 3.22 und Satz 3.23 folgt sofort:

<u>Satz 3.24</u>: $TRANS_{rs}$ ist genau dann stetig, wenn

$$\{i \mid i \text{ Primteiler von } s\}\subseteq\{j \mid j \text{ Primteiler von } r\}.$$

Dies ist der wichtigste Satz dieses Abschnitts. Es folgen nun einige weitere Sätze, die die Übersetzungsfunktion genauer einzuordnen versuchen.

<u>Satz 3.25</u>: $TRANS_{rs}$ ist C-stetig.

<u>Beweis</u>: Sei $B:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ und $A:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ definiert durch

$$B(p)<n,m>:=\begin{cases}<m,b>+1 & \text{falls } lg(\beta([\![p]\!]_{n+1}))=m+1 \text{ und } \beta([\![p]\!]_{n+1})(m)=b\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und $$A(q)(m):=\begin{cases}b & \text{falls } q<m,b>=0 \text{ für ein } b\in\Sigma_s\\ s-1 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Es gilt für alle $r\geq 2$ und $s\geq 2$ und für alle $p\in\Sigma_r^\omega$ $TRANS_{rs}(p)=A\circ C\circ B(p)$.
Der Beweis erfolgt durch Fallunterscheidung.
1. Fall: Es gibt ein $b\in\Sigma_s$ mit $C\circ B(p)<m,b>=0$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} b=A\circ C\circ B(p)(m) &\Leftrightarrow C\circ B(p)<m,b>=0\\ &\Leftrightarrow (\exists n)\ B(p)<n,m>=<m,b>+1\\ &\Leftrightarrow (\exists n)\ lg(\beta([\![p]\!]_{n+1}))=m+1 \text{ und } \beta([\![p]\!]_{n+1})(m)=b\\ &\Leftrightarrow b=TRANS_{rs}(p)(m)\end{aligned}$$

2. Fall: Es gibt kein $b\in\Sigma_s$ mit $C\circ B(p)<m,b>=0$. Es gilt dann $A\circ C\circ B(p)(m)=s-1$ und es gibt kein n und kein b mit $lg(\beta([\![p]\!]_{n+1}))=m+1$ und $\beta([\![p]\!]_{n+1})(m)=b$. Somit gilt $TRANS_{rs}(p)=\beta(p)(s-1)^\omega$ und $lg(\beta(p))<m+1$. Also folgt $TRANS_{rs}(p)(m)=s-1=A\circ C\circ B(p)(m)$.
QED.

<u>Satz 3.26</u>: Falls $TRANS_{rs}$ unstetig ist, gilt $TRANS_{rs}\leq_2\Omega$ nicht.

<u>Beweis</u>: $TRANS_{rs}$ sei unstetig und

$p_s:=0(s-1)^\omega$, $p_r=:TRANS_{sr}(p_s)$,
$p_{s,n,m}:=0(s-1)^n0(s-1)^m0^\omega$, $p_{r,n,m}:=TRANS_{sr}(p_{s,n,m})$,
$p'_{s,n,m}:=0(s-1)^n10^m1^\omega$, $p'_{r,n,m}:=TRANS_{sr}(p'_{s,n,m})$,
$q_{s,n,m}:=10^n0(s-1)^m0^\omega$, $q_{r,n,m}:=TRANS_{sr}(q_{s,n,m})$,
$q'_{s,n,m}:=10^n10^m1^\omega$, $q'_{r,n,m}:=TRANS_{sr}(q'_{s,n,m})$.

Annahme: Es gibt Funktionen $A,B\in[\mathbb{B}\to\mathbb{B}]$ mit $TRANS_{rs}(p)=A\langle p,\Omega\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Es gilt $\delta_s(p_s)=\frac{1}{s}$ und damit $p_r=TRANS_{sr}(p_s)=w^\omega$ mit einem $w\in\Sigma_r^*$ [21]. Da A stetig ist, gibt es ein $k\in\mathbb{N}$, so daß für alle $p,q\in\mathbb{B}$ mit $\Omega\circ B(p)=\Omega\circ B(q)$ und $[\![p]\!]_k=[\![q]\!]_k\leq p_r$ $TRANS_{rs}(p)=A\langle p,\Omega\circ B(p)\rangle=A\langle q,\Omega\circ B(q)\rangle=TRANS_{rs}(q)$ gilt. Hieraus folgt, daß es ein $z\in\mathbb{N}$ geben muß, so daß für alle $n\geq z$ und für alle $m\in\mathbb{N}$ $\Omega\circ B(p_{r,n,m})=i$, $\Omega\circ B(p'_{r,n,m})=i$, $\Omega\circ B(q_{r,n,m})=j$ und $\Omega\circ B(q'_{r,n,m})=j$ mit $i=0$ und $j=1$ oder $i=1$ und $j=0$.
Es gilt also für alle $m\in\mathbb{N}$ $\Omega\circ B(p_{r,z,m})=i$ und $\Omega\circ B(p'_{r,z,m})=i$ mit $i\in\{0,1\}$. Es folgt aber aus der Stetigkeit von A, daß für genügend großes m $[\![A\langle p_{r,z,m},i\rangle]\!]_{z+2}=[\![A\langle p'_{r,z,m},i\rangle]\!]_{z+2}$ gilt. Also folgt $0=p_{s,z,m}(z+1)=p'_{s,z,m}(z+1)=1$. Das ist ein Widerspruch.
Also ist $TRANS_{rs}$ im Falle der Unstetigkeit nicht auf Ω reduzierbar.
QED.

Für den nächsten Satz benötige ich einen Hilfssatz. Dieser besagt, daß $TRANS_{rs}$ zwar nicht stetig ist, aber daß aus einem genügend langen Präfix von p höchstens zwei beliebig lange Präfixe berechnet werden können, von denen eines Präfix von $TRANS_{rs}(p)$ sein muß.

<u>Hilfssatz 3.27</u>: Sei für jedes $n\in\mathbb{N}$ $p_n\in\Sigma_r^\omega$ und es gelte $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Sei $q:=TRANS_{rs}(p)$. Dann hat $\delta_s^{-1}\circ\delta_s(q)$ höchstens zwei Elemente, nämlich q und eventuell q'. Es gibt dann zu jedem $m\in\mathbb{N}$ ein $n_0\in\mathbb{N}$, so daß für alle $n\geq n_0$ $TRANS_{rs}(p_n)(m)=q(m)$ oder $TRANS_{rs}(p_n)(m)=q'(m)$.

<u>Beweis</u>: Es sei $x:=\delta_r(p)$. Es gilt $x=\delta_s(q)$, da q die Übersetzung von x aus der r-adischen Darstellung in die s-adische ist. Nach Satz 3.15.2 hat $\delta_s^{-1}\circ\delta_s(q)=\delta_s^{-1}(x)$ höchstens zwei Elemente, nämlich q und eventuell q'. Annahme: Es gibt ein $m\in\mathbb{N}$, so daß es unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ gibt mit $TRANS_{rs}(p_n)(m)\neq q(m)$ und $TRANS_{rs}(p_n)(m)\neq q'(m)$. Es gibt also unendlich viele n mit

[21] Siehe dazu die Fußnote zum Beweis von Satz 3.23.

$\delta_s(TRANS_{rs}(p_n)) \notin I_s((q(0),q(1),...,q(m-1))$ und
$\delta_s(TRANS_{rs}(p_n)) \notin I_s((q'(0),q'(1),...,q'(m-1))$.

Es gilt aber $x \in Kern(I_s((q(0),q(1),...,q(m-1)) \cup I_s((q'(0),q'(1),...,q'(m-1)))$ [22]. Weiter gilt $x=\delta_r(p)= \lim_{n\to\infty} \delta_r(p_n) = \lim_{n\to\infty} \delta_s(TRANS_{rs}(p_n))$. Dies ist ein Widerspruch. Also gibt es zu jedem $m\in \mathbb{N}$ ein $n_0\in \mathbb{N}$, so daß für alle $n\geq n_0$ $TRANS_{rs}(p_n)(m)=q(m)$ oder $TRANS_{rs}(p_n)(m)=q'(m)$.
QED.

<u>Satz 3.28</u>: Für alle $r,s\geq 2$ ist C nicht auf $TRANS_{rs}$ reduzierbar.

<u>Beweis</u>: Für stetiges $TRANS_{rs}$ ist das klar. Sei also $TRANS_{rs}$ nicht stetig. Ich führe einen Widerspruchsbeweis.
Annahme: $C(p)=A\langle p,TRANS_{rs}\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in \mathbb{B}$ mit stetigen Funktionen $A,B\in [\mathbb{B}\to\mathbb{B}]$.
Sei $p_n:=0^n(1,3,5,7,9,...)$, $q_n:=0^n(2,4,6,8,10,...)$ und $p:=(0,0,0,...)$. Es gilt $C(p_n)(2\cdot i)=0$, $C(p_n)(2\cdot i+1)=1$, $C(q_n)(2\cdot i)=1$ und $C(q_n)(2\cdot i+1)=0$ für alle $i,n\in \mathbb{N}$. Da B stetig ist, gibt es für jedes $m\in \mathbb{N}$ ein $n_0\in \mathbb{N}$, so daß für alle $n\geq n_0$ und $k\leq m$ $B(p_n)(k)=B(q_n)(k)=B(p)(k)$ gilt. $B(p_n)$, $B(q_n)$ und $B(p)$ haben also für genügend großes n beliebig lange gemeinsame Präfixe. Wegen $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = p$ gibt es nach Hilfssatz 3.27 zu jedem $m\in \mathbb{N}$ ein $n_0\in \mathbb{N}$, so daß für alle $n\geq n_0$ mindestens zwei der drei Worte $[\![TRANS_{rs}(p_n)]\!]_m$, $[\![TRANS_{rs}(q_n)]\!]_m$ und $[\![TRANS_{rs}(p)]\!]_m$ gleich sein müssen.
Wegen der Stetigkeit von A müssen dann für genügend großes n zwei der drei Folgen $A\langle p_n,TRANS_{rs}\circ B(p_n)\rangle$, $A\langle q_n,TRANS_{rs}\circ B(q_n)\rangle$ und $A\langle p,TRANS_{rs}\circ B(p)\rangle$ das gleiche Präfix der Länge 2 haben.
Es gilt aber für alle $n\in \mathbb{N}$ $C(p_n)(0)=0$, $C(p_n)(1)=1$, $C(q_n)(0)=1$, $C(q_n)(1)=0$, $C(p)(0)=1$ und $C(p)(1)=1$. Also haben $C(p_n)$, $C(q_n)$ und $C(p)$ kein gemeinsames Präfix der Länge 2. Dies ist ein Widerspruch. Also ist C nicht auf $TRANS_{rs}$ reduzierbar.
QED.

Fortsetzungsproblem

Zum Schluß dieses Kapitels betrachte ich noch ein ganz anderes Problem. Es handelt sich um eine partielle Funktion, die nicht stetig fortsetzbar ist. Mir ist in diesem Zusammenhang aufgefallen, daß man eigentlich einen schwachen und einen starken Begriff der Fortsetzung unterscheiden kann. So gilt der Funktionswert f(p) ja schon als undefiniert, wenn nur endlich viele Folgenglieder von f(p) existieren. Es gilt also f(p)=div, auch wenn f(p)(i) für ein $i\in \mathbb{N}$

[22] $Kern(M):=\{x\in M \mid (\exists r)(\forall y)\ |x-y|<r \Rightarrow y\in M\}$. Dieser topologische Begriff bezeichnet das Innere einer Menge.

existiert. Der schwache Begriff der Fortsetzung erlaubt für eine Fortsetzung f' von f, daß $f'(p)(i) \neq f(p)(i)$ gilt. Der starke Begriff erfordert, daß die Fortsetzung von f die ganze Information beibehält.

Definition 3.29: Sei $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ oder $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ eine partielle Funktion. Eine Funktion $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ oder $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ heißt genau dann eine starke Fortsetzung von Σ, wenn für alle $p\in\mathbb{B}$ und alle $i\in\mathbb{N}$ gilt: $\Sigma(p)(i)=k \Rightarrow \Gamma(p)(i)=k$. Γ heißt genau dann eine schwache Fortsetzung von Σ, wenn für alle $p\in\mathbb{B}$ gilt: $\Sigma(p)$ existiert $\Rightarrow \Gamma(p)=\Sigma(p)$.

Ich benutze im folgenden den schwachen Begriff der Fortsetzung.

Definition 3.30: Sei $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ oder $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ eine partielle Funktion. Eine Funktion $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ oder $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ heißt genau dann eine Fortsetzung von Σ, wenn Γ eine schwache Fortsetzung von Σ ist. Σ heißt genau dann stetig fortsetzbar, wenn es eine totale stetige schwache Fortsetzung von Σ gibt.

Es soll jetzt die folgende Funktion untersucht werden:

Definition 3.31: $FSP:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ sei definiert durch

$$FSP(p)(i):=\begin{cases} 0 \text{ falls die Position der } i+1\text{-ten } 1 \text{ in } p \text{ gerade ist} \\ 1 \text{ falls die Position der } i+1\text{-ten } 1 \text{ in } p \text{ ungerade ist} \\ \text{div sonst} \end{cases}.$$

FSP(p) ist nur definiert, wenn p unendlich viele Einsen besitzt. Es stellt sich die Frage, ob FSP stetig fortsetzbar ist oder wie kompliziert eine Fortsetzung mindestens sein muß.

Satz 3.32: FSP ist nicht stetig fortsetzbar.

Beweis: Annahme: FSP ist stetig fortsetzbar. Sei $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ eine totale stetige Fortsetzung von FSP. Definiere für alle $n\in\mathbb{N}$ $p_n:=0^{2n}1^\omega$, $q_n:=0^{2n+1}1^\omega$ und $p:=0^\omega$. Es gibt dann ein $k\in\mathbb{N}$ mit $f(p)(0)=k$. Da f stetig ist, gibt es ein $w\leq p$, so daß $f(q)(0)=k$ für alle $q\in\mathbb{B}$ mit $w\leq q$. Es gibt ein $n\in\mathbb{N}$ mit $w=0^n$. Wegen $w\leq p_n$ und $w\leq q_n$ folgt für dieses n $f(p_n)(0)=f(q_n)(0)=k$. Es gilt aber $f(p_n)(0)=0$ und $f(q_n)(0)=1$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist FSP nicht stetig fortsetzbar.
QED.

Satz 3.33: Es gibt keine totale Fortsetzung von FSP, die auf Ω reduzierbar ist.

Beweis: Annahme: f ist eine Fortsetzung von FSP und auf Ω reduzierbar. Dann gibt es stetige Funktionen $A:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ und $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ mit $f(p)=A\langle p,\Omega\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$.
Definiere $p:=0^\omega$, $p_n:=0^{2n}1^\omega$, $p_n':=0^{2n}101^\omega$, $q_n:=0^{2n+1}1^\omega$ und $q_n':=0^{2n+1}101^\omega$. Es gelte $A\langle p,0\rangle(0)=k_1$, $A\langle p,0\rangle(1)=k_2$, $A\langle p,1\rangle(0)=l_1$ und $A\langle p,1\rangle(1)=l_2$.
Da A stetig ist, gibt es ein $w\leq p$, so daß $A\langle q,0\rangle(0)=k_1$, $A\langle q,0\rangle(1)=k_2$, $A\langle q,1\rangle(0)=l_1$ und $A\langle q,1\rangle(1)=l_2$ für alle $q\in\mathbb{B}$ mit $w\leq q$. Es gibt dann ein $n\in\mathbb{N}$ mit $w=0^n$. Da $w\leq p_n$, $w\leq p_n'$, $w\leq q_n$ und $w\leq q_n'$, folgt
$A\langle p_n,0\rangle=(k_1,k_2,\ldots)$, $A\langle p_n',0\rangle=(k_1,k_2,\ldots)$, $A\langle q_n,0\rangle=(k_1,k_2,\ldots)$, $A\langle q_n',0\rangle=(k_1,k_2,\ldots)$ und $A\langle p_n,1\rangle=(l_1,l_2,\ldots)$, $A\langle p_n',1\rangle=(l_1,l_2,\ldots)$, $A\langle q_n,1\rangle=(l_1,l_2,\ldots)$, $A\langle q_n',1\rangle=(l_1,l_2,\ldots)$.
Also gibt es für die beiden ersten Folgenglieder von $f(p_n)$, $f(p_n')$, $f(q_n)$ und $f(q_n')$ nur zwei mögliche Kombinationen, nämlich (k_1,k_2) und (l_1,l_2). Im Widerspruch dazu gilt aber $f(p_n)=(0,1,\ldots)$, $f(p_n')=(0,0,\ldots)$, $f(q_n)=(1,0,\ldots)$ und $f(q_n')=(1,1,\ldots)$. Also gibt es keine auf Ω reduzierbare Fortsetzung von FSP.
QED.

Definition 3.34: Ich definiere eine totale Fortsetzung $FS:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ von FSP durch

$$FS(p)(i):=\begin{cases}0 & \text{falls die Position der i+1-ten 1 in p gerade ist}\\ 1 & \text{falls die Position der i+1-ten 1 in p ungerade ist}\\ 2 & \text{sonst}\end{cases}.$$

FS ist sogar eine starke Fortsetzung von FSP.

<u>Satz 3.35</u>: FS ist C-stetig.

<u>Beweis</u>:

Definiere $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $B(p)(n):=\begin{cases} \langle i,0\rangle+1 & \text{falls } p(n) \text{ die } i+1\text{-te } 1 \text{ ist und } n \text{ gerade} \\ \langle i,1\rangle+1 & \text{falls } p(n) \text{ die } i+1\text{-te } 1 \text{ ist und } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Definiere $A:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $A(q)(i):=\begin{cases} 0 & \text{falls } q\langle i,0\rangle=0 \\ 1 & \text{falls } q\langle i,1\rangle=0 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann gilt für alle $p\in\mathbb{B}$

$A\circ C\circ B(p)(n)=0 \Leftrightarrow C\circ B(p)\langle n,0\rangle=0 \Leftrightarrow (\exists k)\ B(p)(k)=\langle n,0\rangle+1$

$\Leftrightarrow$ p(k) ist die n+1-te 1 in p und n ist gerade $\Leftrightarrow$ $FS(p)(n)=0$

$A\circ C\circ B(p)(n)=1 \Leftrightarrow C\circ B(p)\langle n,1\rangle=0 \Leftrightarrow (\exists k)\ B(p)(k)=\langle n,1\rangle+1$

$\Leftrightarrow$ p(k) ist die n+1-te 1 in p und n ist ungerade $\Leftrightarrow$ $FS(p)(n)=1$

$A\circ C\circ B(p)(n)=2$

$\Leftrightarrow C\circ B(p)\langle n,0\rangle\neq 0$ und $C\circ B(p)\langle n,1\rangle\neq 0$

$\Leftrightarrow (\forall k)\ B(p)(k)\neq\langle n,0\rangle+1$ und $(\forall k)\ B(p)(k)\neq\langle n,1\rangle+1$

$\Leftrightarrow$ Es gibt kein k, so daß p(k) die n+1-te 1 in p und n gerade oder ungerade ist

$\Leftrightarrow$ Es gibt kein k, so daß p(k) die n+1-te 1 in p ist

$\Leftrightarrow FS(p)(n)=2$

Es gilt somit $FS(p)=A\circ C\circ B(p)$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Da A und B stetig sind, folgt $FS\leq_2 C$.

QED.

<u>Folgerung 3.36</u>: FSP ist C-stetig.

<u>Beweis</u>: Eine Funktion f ist auf jede Fortsetung f' reduzierbar, da für alle $p\in Def(f)$ $f(p)=f'(p)$ gilt. Es gilt also $FSP\leq_2 FS$ und nach Satz 3.35 $FS\leq_2 C$. Aus der Transitivität von $\leq_2$ folgt $FSP\leq_2 C$.

QED.

Satz 3.37: Ω ist auf jede totale Fortsetzung von FSP reduzierbar.

Beweis: Sei $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ eine totale Fortsetzung von FSP. Sei ferner $k:=f(0^\omega)(0)$. Definiere $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$$B(p)(n):=\begin{cases} 0 \text{ falls } p(i)=0 \text{ für alle } i\leq n \\ 1 \text{ falls } (\exists i\leq n)\ p(i)\neq 0 \text{ und } k=0 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ 1 \text{ falls } (\exists i\leq n)\ p(i)\neq 0 \text{ und } k\neq 0 \text{ und } n \text{ gerade} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Definiere $A:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $A\langle p,q\rangle(n):=\begin{cases} 0 \text{ falls } q(0)=k \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$.

Es gilt dann für alle $p\in\mathbb{B}$

$\Omega(p)=0 \Rightarrow (\forall i)\ p(i)=0 \Rightarrow (\forall i)\ B(p)(i)=0 \Rightarrow f\circ B(p)(0)=k \Rightarrow A\langle p,f\circ B(p)\rangle=0$.

Für $\Omega(p)=1$ nehme ich eine Fallunterscheidung vor:

1. Fall: Falls $k=0$, gilt

$\Omega(p)=1 \Rightarrow$ es gibt ein minimales $i\in\mathbb{N}$ $p(i)\neq 0$

$\Rightarrow$ $B(p)$ enthält ab der Stelle i an den ungeraden Positionen Einsen und sonst Nullen

$\Rightarrow f\circ B(p)=1^\omega$

$\Rightarrow f\circ B(p)(0)=1$

$\Rightarrow f\circ B(p)(0)\neq k$

$\Rightarrow A\langle p,f\circ B(p)\rangle=1$.

2. Fall: Falls $k\neq 0$, gilt

$\Omega(p)=1 \Rightarrow$ es gibt ein minimales $i\in\mathbb{N}$ $p(i)\neq 0$

$\Rightarrow$ $B(p)$ enthält ab der Stelle i an den geraden Positionen Einsen und sonst Nullen

$\Rightarrow f\circ B(p)=0^\omega$

$\Rightarrow f\circ B(p)(0)=0$

$\Rightarrow f\circ B(p)(0)\neq k$

$\Rightarrow A\langle p,f\circ B(p)\rangle=1$.

Es gilt also für alle $p\in\mathbb{B}$ $\Omega(p)=A\langle p,f\circ B(p)\rangle$. Da A und B stetig sind, folgt $\Omega\leq_2 f$. Da f eine beliebige totale Fortsetzung von FSP war, ist der Satz bewiesen.

QED.

Satz 3.38: C ist nicht auf FS reduzierbar.

Beweis: Ich vollziehe einen Widerspruchsbeweis. Annahme: $C\leq_2 FS$. Es gibt dann stetige Funktionen $A:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ und $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ mit $C(p)=A\langle p,FS\circ B(p)\rangle$ für alle $p\in\mathbb{B}$. Ich will eine Folge $q_u\in\mathbb{B}$ konstruieren, mit der diese Annahme zum Widerspruch geführt werden kann. Dabei steht der Gedanke im Mittelpunkt, daß $B(q_u)$ unendlich viele Einsen enthalten soll. Diese Folge q_u wird als Grenzwert einer Folge von Worten oder eventuell Folgen w_n definiert.

Sei $p_0:=0^\omega$. Die Funktion $\#_i:\mathbb{B}_0\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ sei definiert durch
$\#_i(p):=\begin{cases} k \text{ falls i k-mal in p vorkommt} \\ \infty \text{ sonst}\end{cases}$. Falls $\#_1(B(p_0))=\infty$ definiere $w_0:=p_0$ und $k_0:=\infty$.
Falls $\#_1(B(p_0))=k_0\in\mathbb{N}$ gibt es wegen der Stetigkeit von B ein $w\in\mathbb{N}^*$, $w\le p_0$, und ein $m\in\mathbb{N}$ mit $[\![B(q)]\!]_m=[\![B(q')]\!]_m$ und $\#_1([\![B(q)]\!]_m)=k_0$ für alle q,q' mit $w\le q$ und $w\le q'$. Definiere dann w_0 als das minimale $w\in\mathbb{N}^*$ mit dieser Eigenschaft. Es gilt $w_0\in\{0\}^*\cup\{0\}^\omega$.

Es seien p_n, w_n und k_n schon definiert.
Falls $\#_1(B(p_n))=\infty$ definiere $w_{n+1}:=p_n$, $p_{n+1}:=p_n$ und $k_{n+1}:=\infty$.
Andernfalls gilt $w_n\in\{0\}^*\{2\}^*...\{2n\}^*$ und $p_n\in\{0\}^*\{2\}^*\{4\}^*...\{2n\}^\omega$, wie sich aus der Konstruktion von w_n und p_n ergeben wird.
Dann gilt $\#_1(B(p_n))=k_n\in\mathbb{N}$. Definiere $p_{n,i}:=w_n(2n)^i(2n+2)^\omega$. Es kann nicht für jedes $i\in\mathbb{N}$ $\#_1(B(p_n))=\#_1(B(p_{n,i}))$ gelten. Denn daraus ergibt sich $FS\circ B(p_{n,i})$ $=[\![FS\circ B(p_n)]\!]_{k_n}2^\omega=FS\circ B(p_n)$. Da A stetig ist, gibt es dann ein endliches Präfix v von p_n mit $[\![A\langle q,FS\circ B(q)\rangle]\!]_{2n+4}=[\![A\langle p_n,FS\circ B(p_n)\rangle]\!]_{2n+4}$ für alle q mit $v\le q$. Insbesondere für $q':=v(2n+2)^\omega$ gilt dann $C(q')(2n+3)=A\langle q',FS\circ B(q')\rangle(2n+3)=A\langle p_n,FS\circ B(p_n)\rangle(2n+3)$ $=C(p_n)(2n+3)=1$, da $p_n\in\{0\}^*\{2\}^*\{4\}^*...\{2n\}^\omega$. Das ist ein Widerspruch, da $C(q')(2n+3)=0$ gelten muß. Also gibt es ein $i\in\mathbb{N}$ mit $\#_1(B(p_{n,i}))>\#_1(B(p_n))$.
Sei $p_{n+1}:=p_{n,i}$ für das kleinste i mit $\#_1(B(p_{n,i}))>\#_1(B(p_n))$. Es gilt dann also $k_{n+1}:=\#_1(B(p_{n+1}))>k_n$. Falls $k_{n+1}=\infty$ definiere $w_{n+1}:=p_{n+1}$.
Sonst gibt es ein $w\in\mathbb{N}^*$ und ein $m\in\mathbb{N}$ mit $[\![B(q)]\!]_m=[\![B(q')]\!]_m$ und $\#_1([\![B(q)]\!]_m)=k_{n+1}$ für alle q,q' mit $w\le q$ und $w\le q'$. Definiere dann w_{n+1} als das minimale $w\in\mathbb{N}^*$ mit dieser Eigenschaft. Es gilt weiter nach Konstruktionsvorschrift $p_{n+1}\in\{0\}^*\{2\}^*\{4\}^*...\{2n+2\}^\omega$ und $w_{n+1}\in\{0\}^*\{2\}^*...\{2n+2\}^*\cup\{0\}^*\{2\}^*...\{2n+2\}^\omega$.

Durch vollständige Induktion erhält man:
$(\forall n\in\mathbb{N})$ $[w_n\le w_{n+1}$ und $[\#_1(B(w_n))=\infty$ oder $\#_1(B(w_n))<\#_1(B(w_{n+1}))]]$.
Definiere mit der so erzeugten Folge von Worten oder Folgen (w_n) die Folge $q_u:=\sup\{w_n|n\in\mathbb{N}\}$. Es gilt $\#_1(B(q_u))=\infty$.

Die Folge $B(q_u)$ hat also unendlich viele Einsen. Dies hat zur Konsequenz, daß sich FS an der Stelle $B(q_u)$ wie eine stetige Funktion verhält: Zu jedem $w\le FS(B(q_u))$ gibt es ein $v\le q_u$, so daß $w\le FS(B(q))$ für alle q mit $v\le q$. Hieraus folgt mit der Stetigkeit von A, daß es auch zu jedem

$w \leq A<q_u, FS \circ B(q_u)>$ ein $v \leq q_u$ gibt, so daß $w \leq A<q, FS \circ B(q)>$ für alle q mit $v \leq q$. Da $C(q_u)(0)=A<q_u, FS \circ B(q_u)>(0)=1$ gilt, gibt es ein $v \leq q_u$, so daß $A<q, FS \circ B(q)>(0)=1$ für alle q mit $v \leq q$. Sei $q^*:=v1^\omega$. Es folgt $C(q^*)(0)=A<q^*, FS \circ B(q^*)>(0)=1$. Aber da 1 in q* vorkommt, muß $C(q^*)(0)=0$ gelten. Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme $C \leq_2 FS$ falsch. Somit ist C nicht auf FS reduzierbar.
QED.

Folgerung 3.39: C ist nicht auf FSP reduzierbar.

Beweis: Es gilt $FSP \leq_2 FS$. Wenn auch $C \leq_2 FSP$ gelten würde, so müßte aus der Transitivität von $\leq_2$ $C \leq_2 FS$ folgen. Das ist aber nach Satz 3.38 nicht möglich.
QED.

Es gibt allerdings kompliziertere Fortsetzungen von FSP, so daß C auf diese reduzierbar ist.

Definition 3.40: Eine Fortsetzung von FSP sei durch $FS2:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ gegeben mit

$$FS2(p)(i):=\begin{cases} 0 & \text{falls die Position der i+1-ten 1 in p gerade ist} \\ & \text{oder die i+1-te 1 in p nicht ex. und } (\exists k)\ p(k)=i+3 \\ 1 & \text{falls die Position der i+1-ten 1 in p ungerade ist} \\ & \text{oder die i+1-te 1 in p nicht ex. und } \neg(\exists k)\ p(k)=i+3 \end{cases}.$$

Satz 3.41: $C \leq_2 FS2$.

Beweis: Für alle $p \in \mathbb{B}$ gilt $C(p)=FS2 \circ INC \circ INC(p)$. $INC:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ ist dabei wieder definiert durch $INC(p)(n):=p(n)+1$ für alle $p \in \mathbb{B}$ und $n \in \mathbb{N}$. Denn die Folge $INC \circ INC(p)$ enthält keine Einsen. Hieraus folgt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$FS2 \circ INC \circ INC(p)(i)=\begin{cases} 0 & \text{falls } (\exists k)\ INC \circ INC(p)(k)=i+3 \\ 1 & \text{falls } \neg(\exists k)\ INC \circ INC(p)(k)=i+3 \end{cases} \text{ und damit}$$

$FS2 \circ INC \circ INC(p)(i)=0 \Rightarrow (\exists k)\ INC \circ INC(p)(k)=i+3 \Rightarrow (\exists k)\ p(k)=i+1 \Rightarrow C(p)(i)=0$ und
$FS2 \circ INC \circ INC(p)(i)=1 \Rightarrow \neg(\exists k)\ INC \circ INC(p)(k)=i+3 \Rightarrow \neg(\exists k)\ p(k)=i+1 \Rightarrow C(p)(i)=1$.
Also gilt $C \leq_2 FS2$.
QED.

Kapitel IV. C^2-stetige Funktionen

In diesem Kapitel werden einige neue C^2-stetige Funktionen eingeführt. Die Funktionen dienen unter anderem der Vorbereitung auf das nächste Kapitel.

Konvergenz und Maximum

Definition 4.1: Sei KON:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{N}$ definiert durch

$$\mathrm{KON}(p) := \begin{cases} 0 & \text{falls } (p(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\exists l)(\exists k)(\forall m>l)\ p(m)=k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Satz 4.2: KON ist C^2-stetig, aber nicht C-stetig.

Beweis: Ich beweise $U\equiv_2$KON:

Def. P:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch $P(p)(0):=p(0)$ und $P(p)(n+1):=\begin{cases} 0 & \text{falls } p(n+1)\in\{p(i) \mid i\leq n\} \\ p(n+1)+1 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann gilt $U(p)=0 \Leftrightarrow M_p$ ist unendlich $\Leftrightarrow$ P(p) konvergiert nicht $\Leftrightarrow$ KON∘P(p)=1
$\Leftrightarrow$ NEG∘KON∘P(p)=0
und $U(p)=1 \Leftrightarrow M_p$ ist endlich $\Leftrightarrow$ P(p) konvergiert $\Leftrightarrow$ KON∘P(p)=0 $\Leftrightarrow$ NEG∘KON∘P(p)=1, also U=NEG∘KON∘P und somit $U\leq_2$KON.

Def. P:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch $P(p)(0):=p(0)$ und $P(p)(n+1):=\begin{cases} 0 & \text{falls } p(n+1)=p(n) \\ n+1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann gilt KON(p)=0 $\Leftrightarrow$ p konvergiert $\Leftrightarrow$ P(p) ist beschränkt $\Leftrightarrow$ U∘P(p)=1
$\Leftrightarrow$ NEG∘U∘P(p)=0 und
KON(p)=1 $\Leftrightarrow$ p konvergiert nicht $\Leftrightarrow$ P(p) ist nicht beschränkt $\Leftrightarrow$ U∘P(p)=0
$\Leftrightarrow$ NEG∘U∘P(p)=1, also KON=NEG∘U∘P und somit KON$\leq_2$U.

Insgesamt folgt $U\equiv_2$KON. Da U C^2-stetig, aber nicht C-stetig ist, gilt das auch für KON.
QED.

Definition 4.3: Sei KON2:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{N}$ gegeben durch

$$\mathrm{KON2}(p) := \begin{cases} m+1 & \text{falls } (p)_n \text{ gegen m konvergiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} m+1 & \text{falls } (\exists l)(\forall k>l)\ p(k)=m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Satz 4.4: KON2 ist C^2-stetig.

Beweis: KON2$\leq_2$L:

Definiere $P:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $P(p)(0):=0$ und $P(p)(n+1):=\begin{cases} p(n+1)+1 \text{ falls } p(n+1)=p(n) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$.

Definiere weiter $Q:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ durch $Q(q):=\begin{cases} 0 \text{ falls } q(0)=0 \\ \min\{k>0 \mid q(k)=0\} \text{ sonst} \end{cases}$.

Dann gilt KON2(p)=0 $\Leftrightarrow$ p konvergiert nicht $\Leftrightarrow$ P(p) enthält unendlich viele Nullen

$\Leftrightarrow L\circ P(p)(0)=0 \Leftrightarrow Q\circ L\circ P(p)=0$ und

KON2(p)=m+1 $\Leftrightarrow$ p konvergiert gegen m $\Leftrightarrow$ P(p) enthält nur die Zahl m+1 unendlich oft

$\Leftrightarrow L\circ P(p)(0)\neq 0$ und $m+1=\min\{k \mid L\circ P(p)(k)=0\}$

$\Leftrightarrow Q\circ L\circ P(p)=m+1$.

Es gilt also KON2=$Q\circ L\circ P$ mit stetigen Funktionen Q und P, also KON2$\leq_2$L.

QED.

Satz 4.5: KON2 ist nicht C-stetig.

Beweis: U$\leq_2$KON2:

Def. $P:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $P(p)(0):=p(0)$ und $P(p)(n+1):=\begin{cases} 0 \text{ falls } p(n+1)\in\{p(i) \mid i\leq n\} \\ p(n+1)+1 \text{ sonst} \end{cases}$.

Dann gilt U(p)=0 $\Leftrightarrow M_p$ ist unendlich $\Leftrightarrow$ P(p) konvergiert nicht $\Leftrightarrow$ KON2$\circ$P(p)=0

$\Leftrightarrow$ SIGN$\circ$KON2$\circ$P(p)=0.

Analog gilt U(p)=1 $\Leftrightarrow M_p$ ist endlich $\Leftrightarrow$ P(p) konvergiert $\Leftrightarrow$ KON2$\circ$P(p)=m für ein m$\neq$0

$\Leftrightarrow$ SIGN$\circ$KON2$\circ$P(p)=1.

Also gilt U=SIGN$\circ$KON2$\circ$P, also U$\leq_2$KON2. Deshalb kann KON2 nicht C-stetig sein.

QED.

Definition 4.6: Sei MAX:$\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ gegeben durch

$$\text{MAX}(p):=\begin{cases} 0 \text{ falls das Maximum von p existiert} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Satz 4.7: MAX ist C^2-stetig, aber nicht C-stetig.

Beweis:

U $\leq_2$ MAX: Es gilt U=NEG$\circ$MAX.

MAX $\leq_2$ U: Es gilt MAX=NEG$\circ$U.

QED.

<u>Definition 4.8</u>: Sei $MAX2:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ gegeben durch

$$MAX2(p):=\begin{cases}\max\{p(i)\mid i\in\mathbb{N}\}+1 & \text{falls das Maximum von } p \text{ existiert}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

<u>Satz 4.9</u>: MAX2 ist C^2-stetig, aber nicht C-stetig.

<u>Beweis</u>: $MAX2\equiv_2 KON2$:

Mit $M:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, definiert durch $M(p)(n):=\max\{p(i)\mid i\le n\}$, gilt $MAX2(p)=m+1$

$\Leftrightarrow$ $M(p)$ konvergiert gegen m $\Leftrightarrow$ $KON2\circ M(p)=m+1$ und

$MAX2(p)=0$ $\Leftrightarrow$ $M(p)$ konvergiert nicht $\Leftrightarrow$ $KON2\circ M(p)=0$. Also gilt $MAX2=KON2\circ M$ und somit $MAX2\le_2 KON2$.

Sei $M':\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ definiert durch $M'(p)(0):=<0,p(0)>$ und

$$M'(p)(n+1):=\begin{cases}M'(p)(n) & \text{falls } p(n)=p(n+1)\\ <n+1,<p(0),p(1),...,p(n+1)>> & \text{sonst}\end{cases}$$ und

$M'':\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $M''(0):=0$ und $M''(<k,<n_0,...,n_k>>+1):=n_k+1$ sonst.

Es gilt dann

$KON2(p)=m+1$ $\Leftrightarrow$ p konvergiert gegen m

$\Leftrightarrow$ $(\exists k)$ $M'(p)$ hat $<k,<p(0),...,p(k)>>$ als Maximum und $p(k)=m$

$\Leftrightarrow$ $MAX2\circ M'(p)=<k,<p(0),...,p(k)>>+1$ und $p(k)=m$

$\Leftrightarrow$ $M''\circ MAX2\circ M'(p)=m+1$ und

$KON2(p)=0$ $\Leftrightarrow$ p konvergiert nicht

$\Leftrightarrow$ $M'(p)$ hat kein Maximum

$\Leftrightarrow$ $MAX2\circ M'(p)=0$

$\Leftrightarrow$ $M''\circ MAX2\circ M'(p)=0$.

Hierbei wird benutzt, daß für alle $k\in\mathbb{N}$ $<k,<p(0),...,p(k)>> \;<\; <k+1,<p(0),...,p(k+1)>>$ gilt.

Dies folgt aus der Definition der Cantorschen Paarungsfunktion: [23]

Es gilt $<p(0),...,p(k+1)> \;>\; <p(0),...,p(k)>$ und für alle $a>x$ und $b>y$ gilt

$$<a,b>=\sum_{i=0}^{a+b} i + b > \sum_{i=0}^{x+y} i + y = <x,y>.$$

Es gilt also $KON2=M''\circ MAX2\circ M'$, also $KON2\le_2 MAX2$.

QED.

<u>Definition 4.10</u>: Sei $KB:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ gegeben durch

$$KB(p):=\begin{cases}\min\{k\mid(\forall n\ge k)\ p(n)=p(k)\}+1 & \text{falls } p \text{ konvergiert}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

---

[23] [Weihrauch] Seite 37.

KB(p) gibt an, ab welcher Stelle p konvergent ist.

<u>Satz 4.11:</u> KB ist C^2-stetig, aber nicht C-stetig.

<u>Beweis:</u>

$KB \leq_2 MAX2$: Definiere $P: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ durch $P(p)(0) := 0$, $P(p)(n+1) := \begin{cases} n+1 \text{ falls } p(n+1) \neq p(n) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$.

Es gilt dann

$KB(p)=0 \Leftrightarrow$ p konvergiert nicht $\Leftrightarrow$ P(p) ist nicht beschränkt $\Leftrightarrow MAX2 \circ P(p)=0$ und

$KB(p)=m+1 \Leftrightarrow$ p konvergiert ab Stelle m $\Leftrightarrow$ P(p) hat m als Maximum $\Leftrightarrow MAX2 \circ P(p)=m+1$.

Also gilt $KB \leq_2 MAX2$. KB ist also C^2-stetig.

$U \leq_2 KB$: Definiere $NEU: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ durch $NEU(p)(0) := p(0)$ und

$NEU(p)(n+1) := \begin{cases} p(n+1) \text{ falls } p(n+1) \notin \{p(i) \mid i \leq n\} \\ p(0) \text{ sonst} \end{cases}$.

Es gilt dann

$U(p)=0 \Leftrightarrow M_p$ unendlich $\Leftrightarrow$ NEU(p) konvergiert nicht $\Leftrightarrow KB \circ NEU(p)=0$

$\Leftrightarrow SIGN \circ KB \circ NEU(p)=0$ und

$U(p)=1 \Leftrightarrow M_p$ endlich $\Leftrightarrow$ NEU(p) konvergiert $\Leftrightarrow KB \circ NEU(p) \neq 0$

$\Leftrightarrow SIGN \circ KB \circ NEU(p)=1$.

Also gilt $U \leq_2 KB$. KB ist also nicht C-stetig.

QED.

Rationalität einer reellen Zahl

<u>Definition 4.12</u>: Sei $RAT: \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ definiert durch $RAT(p) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \rho(p) \text{ rational} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$.

<u>Satz 4.13</u>: RAT ist C^2-stetig. [24]

---

[24] Daß diese Funktion unstetig ist, wurde auch von Martin Davis in [Davis] Seite 172 nachgewiesen. Stetige Funktionen werden dort compact genannt, während berechenbare Typ-II-Funktionen completely computable heißen. Es wird aber von Martin Davis keine Einteilung in Klassen verschiedener Unstetigkeitsgrade vorgenommen.

Beweis: $RAT \leq_2 N$:

Definiere $V:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $V(p)\langle n,m,k,l\rangle := \begin{cases} \langle n,m,k\rangle & \text{falls } \left| \nu_Q(p)(l) - \frac{n-m}{k+1} \right| \geq 2^{-l} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann gilt $RAT(p)=1 \Leftrightarrow \rho(p)$ ist irrational $\Leftrightarrow (\forall n)(\exists l)\ |\nu_Q(n) - \nu_Q(p)(l)| \geq 2^{-l}$

$\Leftrightarrow V(p) = \mathbb{N} \Leftrightarrow N \circ V(p)=0 \Leftrightarrow NEG \circ N \circ V(p)=1$ und

$RAT(p)=0 \Leftrightarrow \rho(p)$ ist rational $\Leftrightarrow (\exists \langle n,m,k\rangle)(\forall l)\ \left|\nu_Q(p)(l) - \frac{n-m}{k+1}\right| < 2^{-l}$

$\Leftrightarrow V(p) \neq \mathbb{N} \Leftrightarrow N \circ V(p)=1 \Leftrightarrow NEG \circ N \circ V(p)=0$.

Also gilt $RAT=NEG \circ N \circ V$. Somit ist RAT C^2-stetig.

QED.

Satz 4.14: RAT ist nicht C-stetig.

Ich will hierfür $U \leq_2 RAT$ beweisen. Dann kann RAT nicht C-stetig sein. Die Grundidee ist folgende: Ich möchte eine Funktion finden, die ein p mit unendlich vielen verschiedenen Elementen in ein q überführt, so daß $\rho(q)$ irrational ist, und ein p mit endlich vielen verschiedenen Elementen in ein q, so daß $\rho(q)$ rational ist. Hierfür ist erst ein Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz 4.15: Sei $x=\sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-i}$ und $a_i \in \{0,1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gilt dann

a) $x=\rho\left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

b) x ist rational $\Leftrightarrow (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist bis auf ein endliches Präfix periodisch, d.h. es gibt $v,w \in \{0,1\}^*$ mit $(a_i)=vw^{\omega}$.

Beweis von 4.15.a:

Für $m>n$ gilt $\left|\sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-i} - \sum_{i=0}^{m} a_i 2^{-i}\right| = \sum_{i=n+1}^{m} a_i 2^{-i} \leq \sum_{i=n+1}^{m} 2^{-i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n}$.

Also gilt $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-i}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in Def(\rho)$. Ferner gilt $x= \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-i} = \rho\left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

QED.

Beweis von 4.15.b:

"$\Leftarrow$": Sei (a_i) periodisch

$\Rightarrow (a_i)=vw^{\omega}$ mit $v=v_0...v_r$ und $w=w_1...w_s$.

Mit $y:=\sum_{i=0}^{r} v_i 2^{-i}$ und $z:=\sum_{i=r+1}^{r+s} w_i 2^{-i}$ gilt

$$x=\sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-i} = \sum_{i=0}^{r} a_i 2^{-i} + \sum_{i=r+1}^{\infty} a_i 2^{-i} = \sum_{i=0}^{r} v_i 2^{-i} + \sum_{i=r+1}^{r+s} w_i 2^{-i} + \sum_{i=r+s+1}^{r+2s} w_i 2^{-i} + \sum_{i=r+2s+1}^{r+3s} w_i 2^{-i} + ...$$

$$= \sum_{i=0}^{r} v_i 2^{-i} + \sum_{i=r+1}^{r+s} w_i 2^{-i-0} + \sum_{i=r+1}^{r+s} w_i 2^{-i-s} + \sum_{i=r+1}^{r+s} w_i 2^{-i-2s} + ...$$

$$= \sum_{i=0}^{r} v_i 2^{-i} + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\cdot s} \sum_{j=r+1}^{r+s} w_i 2^{-j} = y+\sum_{i=0}^{\infty} z\cdot(2^{-s})^i = y+z\cdot\sum_{i=0}^{\infty}(2^{-s})^i = y+z\cdot\frac{1}{1-2^{-s}}\ .$$

Also ist x rational.

"$\Rightarrow$": Sei x rational, also $x=\frac{n}{m}$. Dann kann es in jedem Schritt des Divisionsalgorithmus nur m verschiedene Reste geben, nämlich 0,1,...,m-1. Dann muß nach spätestens m Schritten des Divisionsalgotithmus ein Rest auftauchen, der schon einmal vorkam. Der Divisionsalgorithmus muß sich ab dieser Stelle wiederholen. Also ist (a_i) periodisch. [25]

QED.

Beweis von 4.14: Es soll jetzt jedem p eine Folge q zugeordnet werden, so daß ρ(q) genau dann irrational ist, wenn Bild(p) unendlich ist. Hierfür wird für jede Zahl, die in p zum ersten Mal auftaucht, ein Teilwort von q erzeugt, das den bisherigen Teil der Folge unperiodisch macht.

Definiere $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $g(n):=\sum_{i=0}^{n} i$ und $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(n):=\max\{i|g(i)\le n\}$.

Definiere weiter $h:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $h(p)(0):=0$ und

$$h(p)(n+1):=\begin{cases} 0 \text{ falls } f(n+1)=k \text{ und } p(k)\in\{p(0),...,p(k-1)\} \\ 1 \text{ falls } f(n+1)=k \text{ und } f(n)\neq f(n+1) \text{ und } p(k)\notin\{p(0),...,p(k-1)\} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}\ .$$

Setze weiter $V:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, $V(p)(n):=\nu_Q^{-1}(\sum_{i=0}^{n} p(i)2^{-i})$.

Dann gilt U(p)=0

$\Rightarrow$ Bild(p) ist unendlich

$\Rightarrow (\forall m)(\exists k\ge m)\ p(k)\notin\{p(0),...,p(k-1)\}$

---

[25] Der Beweis orientiert sich am Beweis in [Niven] Seite 351. Er wird dort zwar für die Dezimaldarstellung von reellen Zahlen geführt, ist aber auch für die Dualdarstellung gültig.

$\Rightarrow (\forall m)(\exists k \geq m)\ 10^{k-1}$ kommt in h(p) vor

$\Rightarrow$ h(p) ist nicht periodisch

$\Rightarrow \rho(V \circ h(p))$ ist irrational

$\Rightarrow RAT \circ V \circ h(p)=1$

$\Rightarrow NEG \circ RAT \circ V \circ h(p)=0$ und

U(p)=1

$\Rightarrow$ Bild(p) ist endlich

$\Rightarrow (\exists m)(\forall k \geq m)\ p(k) \in \{p(0),...,p(k-1)\}$

$\Rightarrow (\exists m)(\forall l \geq m)\ h(p)(l)=0$

$\Rightarrow$ h(p) ist periodisch

$\Rightarrow \rho(V \circ h(p))$ ist rational

$\Rightarrow RAT \circ V \circ h(p)=0$

$\Rightarrow NEG \circ RAT \circ V \circ h(p)=1$.

Da $NEG \circ RAT \circ V \circ h$ total ist und nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, gilt $U=NEG \circ RAT \circ V \circ h$ und somit $U \leq_2 RAT$.

QED.

Dichte einer rationalen Folge in $\mathbb{R}$

Definition 4.16: DICHT:$\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$\text{DICHT}(p) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \{v_Q(p(n)) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ dicht in } \mathbb{R} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Satz 4.17: DICHT ist C^2-stetig, aber nicht C-stetig.

Beweis: Es gilt: DICHT(p)=0 $\Leftrightarrow (\forall n,m,k,l)(\exists i) \left| \frac{n-m}{k+1} - v_Q(p(i)) \right| \leq 2^{-l}$.

Definiere V:$\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ durch

$$V(p)\langle n,m,k,l,i\rangle := \begin{cases} \langle n,m,k,l\rangle & \text{falls } \left| \frac{n-m}{k+1} - v_Q(p(i)) \right| \leq 2^{-l} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt DICHT(p)=0 $\Leftrightarrow (\forall n,m,k,l)(\exists i) \left| \frac{n-m}{k+1} - v_Q(p(i)) \right| \leq 2^{-l}$

$\Leftrightarrow V(p)=\mathbb{N} \Leftrightarrow N \circ V(p)=0$

und DICHT(p)=1 $\Leftrightarrow \neg(\forall n,m,k,l)(\exists i) \left| \frac{n-m}{k+1} - v_Q(p(i)) \right| \leq 2^{-l}$

$\Leftrightarrow V(p) \neq \mathbb{N} \Leftrightarrow N \circ V(p)=1$, also DICHT$\leq_2$N. Somit ist DICHT C^2-stetig.

Definiere P:$\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ durch P(p)(0):=0 und

$$P(p)(n+1) := \begin{cases} P(p)(n) \text{ falls } p(n+1) \in \{p(i) | i \leq n\} \\ P(p)(n)+1 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Es gilt dann $U(p)=0 \Rightarrow$ Bild(p) ist unendlich $\Rightarrow P(p)=\mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{DICHT} \circ P(p)=0$ und

$U(p)=1 \Rightarrow$ Bild(p) ist endlich $\Rightarrow$ P(p) ist beschränkt

$\Rightarrow$ P(p) enthält nur die Kodierung endlich vieler rationaler Zahlen $\Rightarrow \mathrm{DICHT} \circ P(p)=1$.

Also gilt $U \leq_2 \mathrm{DICHT}$. Somit ist DICHT nicht C-stetig.

QED.

Kapitel V. C^3-stetige Funktionen

In diesem Kapitel sollen Funktionen untersucht werden, die nicht mehr C^2-stetig sind, sondern C^3-stetig. Unter diesen Funktionen sind auch welche, die aus der Analysis bekannt sind. Es wird in den höheren Klassen immer schwieriger, den Nachweis zu führen. Es ist im allgemeinen noch relativ einfach zu zeigen, daß eine Funktion C^n-stetig ist. Die Hauptschwierigkeit liegt in dem Beweis, daß sie nicht C^{n-1}-stetig ist. Zwar haben wir schon, wie ich gleich zeigen werde, für jedes $n\in\mathbb{N}$ Funktionen, die C^n-stetig und nicht C^{n-1}-stetig sind, nämlich die Varianten des Halte- und des Selbstanwendbarkeitsproblems für χ^{n-1} und ψ^{n-2}. Allerdings sind diese Funktionen sehr maschinenorientiert. Sie beziehen sich auf die Codierung von Typ-II-Maschinen. Es wird nicht immer einfach sein, Funktionen eines gänzlich anderen Charakters, z.B. eben solche aus der Analysis, mit diesen „Maschinenfunktionen“ in Zusammenhang zu bringen. Für C^3 ist mir das noch gelungen, aber bei noch höheren Klassen der C-Hierarchie sehe ich noch große Probleme.

Exkurs über die Funktionen K_χ^n, K_ψ^n, H_χ^n und H_ψ^n

Für den nächsten Abschnitt benötige ich die Aussage, daß K_ψ^1 nicht C^2-stetig ist. Ich nehme deshalb zuerst eine Einordnung der Funktionen K_χ^n, K_ψ^n, H_χ^n und H_ψ^n in die C-Hierarchie vor. Diese Einordnung wurde in [Stein] erst teilweise vorgenommen. Dort wurde bewiesen, daß K_χ^n und H_χ^n höchstens C^{n+1}-stetig und K_ψ^n und H_ψ^n höchstens C^{n+2}-stetig sind. Es soll hier gezeigt werden, daß auch folgendes gilt: K_χ^n und H_χ^n sind nicht C^n-stetig und K_ψ^n und H_ψ^n sind nicht C^{n+1}-stetig.

<u>Satz 5.1</u>: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: K_χ^n ist nicht C^n-stetig.

<u>Beweis</u>: Annahme: K_χ^n ist C^n-stetig. Definiere $f:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ durch $f(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } K_\chi^n(p)=1\\ \text{div sonst}\end{cases}$ für alle $p\in\mathbb{B}$. f ist ebenfalls C^n-stetig. Es gibt dann ein $q\in\mathbb{B}$ mit $f=\chi_q^n$. Dann gilt mit diesem q:

$f(q)=0 \Rightarrow K_\chi^n(q)=1 \Rightarrow \chi_q^n(q)$ existiert nicht $\Rightarrow f(q)$ existiert nicht

und $f(q)=\text{div} \Rightarrow K_\chi^n(q)=0 \Rightarrow \chi_q^n(q)$ existiert $\Rightarrow f(q)$ existiert.

Es ergibt sich also in beiden Fällen ein Widerspruch. Also ist K_χ^n mindestens C^{n+1}-stetig.

QED.

<u>Satz 5.2</u>: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: H^n_ψ ist nicht C^{n+1}-stetig.

<u>Beweis</u>: Ich zeige, daß $K^{n+1}_\chi \leq_2 H^n_\psi$ gilt. Da K^{n+1}_χ nach Satz 5.1 nicht C^{n+1}-stetig ist, kann das dann auch nicht für H^n_ψ gelten.

Definiere $\overline{C}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $\overline{C}(q)\langle i,j\rangle := \begin{cases} 0 \text{ falls } i+1\in\{q(k)\mid k\leq j\} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$. Definiere weiter $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$

durch $\Sigma\langle p,q\rangle(j) := \begin{cases} 0 \text{ falls } \overline{U}_\chi\langle [\![p]\!]_j,(q\langle 0,j\rangle,q\langle 1,j\rangle,\ldots,q\langle j,j\rangle)\rangle \text{ existiert} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$

und $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $\Gamma(q)(n) := \begin{cases} 0 \text{ falls es mindestens n Nullen in q gibt} \\ \text{div sonst} \end{cases}$.

Es gilt dann $\chi^{n+1}_q(q)$ existiert $\Leftrightarrow U^n_\psi \circ \Theta(q)$ existiert mit einer stetigen Funktion $\Theta:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$.

Beweis:

$\chi^{n+1}_q(q)$ existiert

$\Leftrightarrow\ \chi_{\pi_2(q)} \circ C \circ \psi^n_{\pi_1(q)}(q)$ existiert

$\Leftrightarrow \overline{U}_\chi\langle [\![\pi_2(q)]\!]_j,(\overline{C}\circ\psi^n_{\pi_1(q)}(q)\langle 0,j\rangle,\ldots,\overline{C}\circ\psi^n_{\pi_1(q)}(q)\langle j,j\rangle)\rangle$ existiert für unendlich viele j

$\Leftrightarrow \Sigma\langle \pi_2(q),\overline{C}\circ\psi^n_{\pi_1(q)}(q)\rangle$ hat unendlich viele Nullen

$\Leftrightarrow \Gamma\circ\Sigma\langle \pi_2(q),\overline{C}\circ\psi^n_{\pi_1(q)}(q)\rangle$ existiert

$\Leftrightarrow\ \psi_r\langle \pi_2(q),\overline{C}\circ\psi^n_{\pi_1(q)}(q)\rangle$ existiert (mit $\Gamma\circ\Sigma=\psi_r$, $r\in\mathbb{B}$)

$\Leftrightarrow\ \psi_{g\langle r,\pi_2(q)\rangle}\circ\overline{C}\circ\psi^n_{\pi_1(q)}(q)$ existiert ($g:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ stetig) [26]

$\Leftrightarrow\ \psi_{g\langle r,\pi_2(q)\rangle}\circ\psi_p\circ\psi^n_{\pi_1(q)}(q)$ existiert (solch ein $p\in\mathbb{B}$ existiert, da $\overline{C}$ stetig ist)

$\Leftrightarrow \psi^n_{\Delta\langle g\langle r,\pi_2(q)\rangle,p,\pi_1(q)\rangle}(q)$ existiert [27]

$\Leftrightarrow U^n_\psi\langle \Delta\langle g\langle r,\pi_2(q)\rangle,p,\pi_1(q)\rangle,q\rangle$ existiert

$\Leftrightarrow U^n_\psi\circ\Theta(q)$ existiert.

Dabei ist $\Theta:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ definiert durch $\Theta(q) := \langle \Delta\langle g\langle r,\pi_2(q)\rangle,p,\pi_1(q)\rangle,q\rangle$ für alle $q\in\mathbb{B}$.

Hieraus folgt $K^{n+1}_\chi(q)=0$

$\Leftrightarrow \chi^{n+1}_q(q)$ existiert

$\Leftrightarrow U^n_\psi\circ\Theta(q)$ existiert

[26] Eine solche stetige Funktion g existiert nach dem smn-Theorem [Weihrauch] Seite 359 Satz 16(2c).

[27] Die Existenz einer solchen Funktion $\Delta:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ folgt aus den Bemerkungen zur Komposition von stetigen Funktionen in [Weihrauch] Seite 359,360.

$\Leftrightarrow H_\psi^n \circ \Theta(q)=0$

und $K_\chi^{n+1}(q)=1$

$\Leftrightarrow \chi_q^{n+1}(q)$ existiert nicht

$\Leftrightarrow U_\psi^n \circ \Theta(q)$ existiert nicht

$\Leftrightarrow H_\psi^n \circ \Theta(q)=1.$

Also gilt $K_\chi^{n+1}=H_\psi^n \circ \Theta$ und damit $K_\chi^{n+1} \leq_2 H_\psi^n$. Also kann H_ψ^n nicht C^{n+1}-stetig sein.

QED.

<u>Satz 5.3</u>: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: K_ψ^n ist nicht C^{n+1}-stetig.

Beweis: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $H^n_\psi \leq_2 K^n_\psi$. Die Behauptung folgt dann direkt aus Satz 5.2.

$H^n_\psi\langle p,q\rangle=0$

$\Leftrightarrow \psi^n_p(q)$ existiert

$\Leftrightarrow \psi^n_p \circ \pi_1\langle q,q\rangle$ existiert

$\Leftrightarrow \psi^n_p \circ \psi_r\langle q,q\rangle$ existiert (mit $\pi_1=\psi_r$, $r \in \mathbb{B}$)

$\Leftrightarrow \psi^n_{g\langle p,r\rangle}\langle q,q\rangle$ existiert [28]

$\Leftrightarrow \psi^n_{\Delta\langle g\langle p,r\rangle,q\rangle}(q)$ existiert (ein stetiges $\Delta:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ existiert nach dem smn-Theorem)

$\Leftrightarrow \psi^n_{\Delta\langle g\langle p,r\rangle,q\rangle}(\Delta\langle g\langle p,r\rangle,q\rangle)$ existiert

(da $\psi^n_{\Delta\langle g\langle p,r\rangle,q\rangle}(q)=\psi^n_{\Delta\langle g\langle p,r\rangle,q\rangle}(q')$ für alle $q,q' \in \mathbb{B}$)

$\Leftrightarrow K^n_\psi \circ \Theta\langle p,q\rangle=0$ mit $\Theta\langle p,q\rangle:=\Delta\langle g\langle p,r\rangle,q\rangle$ für alle $p,q \in \mathbb{B}$.

Analog gilt $H^n_\psi\langle p,q\rangle=1 \Leftrightarrow K^n_\psi \circ \Theta\langle p,q\rangle=1$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $H^n_\psi \leq_2 K^n_\psi$. Somit kann K^n_ψ nicht C^{n+1}-stetig sein.

QED.

Der Vollständigkeit halber folgt noch der

Satz 5.4: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: H^n_χ ist nicht C^n-stetig.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $K^n_\chi \leq_2 H^n_\chi$. Denn definiere $DUP:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $DUP(p):=\langle p,p\rangle$. DUP ist stetig und es gilt

$K^n_\chi(q)=0$

$\Leftrightarrow \chi^n_q(q)$ existiert

$\Leftrightarrow H^n_\chi\langle q,q\rangle=0$

$\Leftrightarrow H^n_\chi \circ DUP(q)=0$

und $K^n_\chi(q)=1$

$\Leftrightarrow \chi^n_q(q)$ existiert nicht

$\Leftrightarrow H^n_\chi\langle q,q\rangle=1$

$\Leftrightarrow H^n_\chi \circ DUP(q)=1$.

---

[28] Die Existenz einer solchen Funktion $g:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ folgt ebenfalls aus den Bemerkungen zur Komposition von stetigen Funktionen in [Weihrauch] Seite 359,360.

Also gilt $K^n_\chi \leq_2 H^n_\chi$. Wenn nun H^n_χ C^n-stetig wäre, so müßte auch K^n_χ C^n-stetig sein. Das ist aber nach Satz 5.1 nicht der Fall. Also ist H^n_χ nicht C^n-stetig.
QED.

Konvergente Teilfolgen natürlicher Zahlen

Nach diesem Exkurs kommen wir nun zu dem eigentlichen Thema dieses Kapitels, zur Untersuchung C^3-stetiger Funktionen. Die erste Funktion testet, ob eine Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Definition 5.5: $T:\mathbb{B}\to\{0,1\}$ sei gegeben durch

$$T(p):=\begin{cases}0 & \text{falls es eine konstante Teilfolge in p gibt}\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{falls } (\exists n)(\forall m)(\exists k)\ k>m \text{ und } p(k)=n\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Satz 5.6: T ist C^3-stetig.

Beweis: Es gilt für alle $p\in\mathbb{B}$

$T(p)=0 \Leftrightarrow$ Es gibt eine konstante Teilfolge in p
$\Leftrightarrow (\exists n)\ L(p)(n)=0$
$\Leftrightarrow \neg(\forall n)\ L(p)(n)\neq 0$
$\Leftrightarrow \neg(\forall n)\ INV\circ L(p)(n)=0$
$\Leftrightarrow \neg\ \Omega\circ INV\circ L(p)=0$
$\Leftrightarrow \Omega\circ INV\circ L(p)=1$
$\Leftrightarrow NEG\circ\Omega\circ INV\circ L(p)=0$ und
$T(p)=1 \Leftrightarrow$ Es gibt keine konstante Teilfolge in p
$\Leftrightarrow (\forall n)\ L(p)(n)\neq 0$
$\Leftrightarrow (\forall n)\ INV\circ L(p)(n)=0$
$\Leftrightarrow \Omega\circ INV\circ L(p)=0$
$\Leftrightarrow NEG\circ\Omega\circ INV\circ L(p)=1$.

Es gilt also $T=NEG\circ\Omega\circ INV\circ L$, also ist T C^3-stetig.
QED.

Satz 5.7: T ist nicht C^2-stetig.

<u>Beweis</u>: Es soll $K^1_\psi \leq_2 T$ bewiesen werden. Da K^1_ψ nach Satz 5.3 nicht C^2-stetig ist, folgt dann die Behauptung. Ich werde genauer beweisen:
$\psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle$ existiert $\Leftrightarrow$ $NEG \circ T \circ \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle=0$ und $\psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle$ existiert nicht $\Leftrightarrow$ $NEG \circ T \circ \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle=1$ mit geeigneten stetigen Funktionen ψ'', C' und ψ'. Die Beweisidee besteht darin, die Funktionen ψ_{p_2}, C und ψ_{p_1} durch stetige Funktionen ψ'', C' und ψ' zu ersetzen, die die Originalfunktionen simulieren. Es soll dann gezeigt werden, daß $\psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle(i)$ genau dann existiert, wenn $\langle i,0\rangle$ in $\psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle$ nicht unendlich oft vorkommt. $\psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle$ wird also genau dann existieren, wenn es keine konstante unendliche Teilfolge von $\psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle$ gibt.

Nun zum formalen Teil des Beweises:
Definiere $\psi':\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$$\psi'\langle p_1,p_2\rangle\langle n,t\rangle:=\begin{cases}\bar{U}_\psi\langle [\![p_1]\!]_t,[\![\langle p_1,p_2\rangle]\!]_t\rangle(n), \text{ falls existent}\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Definiere weiter $C':\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$$C'(q)\langle i,j\rangle:=\begin{cases}0 \text{ falls } i+1\in \{q(k) \mid k\leq j\}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

$\psi'':\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ wird definiert durch

$$\psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle,q\rangle\langle i,t\rangle:=\begin{cases}\langle i,t\rangle \text{ falls } \bar{U}_\psi\langle [\![p_2]\!]_t,(q\langle 0,t\rangle,\ldots,q\langle t,t\rangle)\rangle(i) \text{ existiert}\\ \langle i,0\rangle \text{ sonst}\end{cases}.$$

ψ'', C' und ψ' sind stetige Funktionen. Es gilt: $K^1_\psi\langle p_1,p_2\rangle$ nimmt nur die Werte 0 und 1 an.
Weiter gilt für alle $p_1,p_2\in\mathbb{B}$

$K^1_\psi\langle p_1,p_2\rangle=0 \Rightarrow \psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle$ existiert
$\Rightarrow \psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle(n)$ existiert für alle $n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow \psi_{p_2} \circ C \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle(n)$ existiert für alle $n\in\mathbb{N}$,
denn für alle $\langle p_1,p_2\rangle\in\mathbb{B}$ gilt
$\mathrm{Bild}(\psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle)/\{0\}=\mathrm{Bild}(\psi'\langle p_1,p_2\rangle)/\{0\}$
$\Rightarrow$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele t mit
$\psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle\langle n,t\rangle=\langle n,0\rangle$
$\Rightarrow \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle$ besitzt keine konvergente Teilfolge
$\Rightarrow T \circ \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle=1$
$\Rightarrow NEG \circ T \circ \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle=0$ und

$K^1_\psi\langle p_1,p_2\rangle=1 \Rightarrow \psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle$ existiert nicht
$\Rightarrow \psi_{p_2} \circ C \circ \psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle(n)=\mathrm{div}$ für ein $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \psi_{p_2} \circ C \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle(n)=div$ für ein $n\in\mathbb{N}$,

denn für alle $\langle p_1,p_2\rangle\in\mathbb{B}$ gilt

$Bild(\psi_{p_1}\langle p_1,p_2\rangle)/\{0\}=Bild(\psi'\langle p_1,p_2\rangle)/\{0\}$

$\Rightarrow$ es gibt ein $n\in\mathbb{N}$, so daß es unendlich viele t gibt mit

$\psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle\langle n,t\rangle=\langle n,0\rangle$

$\Rightarrow \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle$ besitzt eine konvergente Teilfolge

$\Rightarrow T \circ \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle=0$

$\Rightarrow NEG \circ T \circ \psi''\langle\langle p_1,p_2\rangle, C' \circ \psi'\langle p_1,p_2\rangle\rangle=1$.

Also ist K_ψ^1 reduzierbar auf T. T ist somit nicht C^2-stetig.

QED.

Die Funktion T kann benutzt werden, um weitere Funktionen einzuordnen.

Konvergente Folgen rationaler Zahlen

Die nächste Funktion testet, ob eine Folge von rationalen Zahlen konvergiert.

Definition 5.8: Sei $QKON:\mathbb{B}\to\{0,1\}$ definiert durch

$$QKON(p):=\begin{cases}0 & \text{falls } (\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\\ 1 & \text{sonst}\end{cases} \qquad \text{für alle } p\in\mathbb{B}.$$

Satz 5.9: $T\leq_2 QKON$.

Beweis: Sei $p\in\mathbb{B}$ eine beliebige Folge. Wenn es keine konstante Teilfolge von p gibt, dann divergiert p bestimmt gegen unendlich. Dann konvergiert $(\frac{1}{p(n)+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Andernfalls divergiert $(\frac{1}{p(n)+1})_{n\in\mathbb{N}}$ oder konvergiert gegen einen anderen Wert.

Definiere $Q:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $Q(p)(n):=\langle 1,0,p(n)+1\rangle$ und $DIV:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $DIV(p)(2\cdot n):=p(n)$ und $DIV(p)(2\cdot n+1):=n$. Q und DIV sind stetig. Es gilt

$T(p)=1 \Leftrightarrow (\frac{1}{p(n)+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

$\Leftrightarrow \nu_Q(Q(p))$ konvergiert gegen 0

$\Leftrightarrow \nu_Q(Q\circ DIV(p))$ konvergiert

$\Leftrightarrow QKON\circ Q\circ DIV(p)=0$

$\Leftrightarrow NEG\circ QKON\circ Q\circ DIV(p)=1$ und

$T(p)=0 \Leftrightarrow (\frac{1}{p(n)+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0

$\Leftrightarrow \nu_Q(Q(p))$ konvergiert nicht gegen 0

$\Leftrightarrow \nu_Q(Q \circ DIV(p))$ konvergiert nicht

$\Leftrightarrow QKON \circ Q \circ DIV(p)=1$

$\Leftrightarrow NEG \circ QKON \circ Q \circ DIV(p)=0$.

Also folgt $T=NEG \circ QKON \circ Q \circ DIV$, also $T \leq_2 QKON$.

QED.

Satz 5.10: $QKON \leq_2 T$.

Beweis:

$(\nu_Q(p(n)))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\Leftrightarrow (\forall l)(\exists n)(\forall m>n)\ \ | \nu_Q(p(n)) - \nu_Q(p(m)) | < 2^{-l}$.

Also gilt $(\nu_Q(p(n)))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht

$\Leftrightarrow (\exists l)(\forall n)(\exists m>n)\ \ | \nu_Q(p(n)) - \nu_Q(p(m)) | \geq 2^{-l}$.

Definiere $V:\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch

$$V(p)<l,n,m>:=\begin{cases} l \text{ falls } m>n \text{ und } | \nu_Q(p(n)) - \nu_Q(p(m)) | \geq 2^{-l} \text{ und} \\ \quad (\forall <l,n,k> < <l,n,m>)\ V(p)<l,n,k>\neq l \\ <l,n,m> \text{ sonst} \end{cases}.$$

Es gilt für alle $p\in \mathbb{B}$

$QKON(p)=1$

$\Rightarrow (\nu_Q(p(n)))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht

$\Rightarrow (\exists l)(\forall n)(\exists m>n)\ \ | \nu_Q(p(n)) - \nu_Q(p(m)) | \geq 2^{-l}$

$\Rightarrow$ es gibt ein $l\in \mathbb{N}$, das in $V(p)$ unendlich oft vorkommt

$\Rightarrow T \circ V(p)=0$

$\Rightarrow NEG \circ T \circ V(p)=1$ und

$QKON(p)=0$

$\Rightarrow (\nu_Q(p(n)))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\Rightarrow (\forall l)(\exists n)(\forall m>n)\ \ | \nu_Q(p(n)) - \nu_Q(p(m)) | < 2^{-l}$

$\Rightarrow$ es gibt kein $l\in \mathbb{N}$, das in $V(p)$ unendlich oft vorkommt

$\Rightarrow T \circ V(p)=1$

$\Rightarrow NEG \circ T \circ V(p)=0$.

Also gilt $QKON=NEG \circ T \circ V$ und damit $QKON \leq_2 T$.

QED.

QKON ist also C^3-stetig, aber nicht C^2-stetig.

Konvergente Teilfolgen rationaler Zahlen

Da das Konvergenzproblem für natürliche Zahlen C^2-stetig ist und das zugehörige Problem, ob eine konvergente Teilfolge existiert, C^3-stetig, könnte man aus der Tatsache, daß das Konvergenzproblem für rationale Zahlen C^3-stetig ist, darauf schließen, daß das dazu gehörende Teilfolgenproblem C^4-stetig sein müßte. Das ist aber nicht der Fall.

Definition 5.11: Sei $TQKON:\mathbb{B}\to\{0,1\}$ definiert durch

$$TQKON(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } (\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}} \text{ hat eine konvergente Teilfolge}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0 \text{ falls } (\exists n)(\exists m)(\forall k)(\exists i>k)\ \nu_Q(n)\le\nu_Q(p(i))\le\nu_Q(m)\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

Diese Identität ist richtig, da eine rationale Folge genau dann eine konvergente Teilfolge besitzt, wenn es ein beschränktes Intervall gibt, in dem unendlich viele Folgenglieder liegen. Diese Aussage ist eine Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

Satz 5.12: $QKON\le_2 TQKON$.

Beweis: Im Beweis von Satz 5.10 ist schon gezeigt worden, daß $QKON=NEG\circ T\circ V$ gilt. Man kann jetzt $V(p)$ durch eine weitere Funktion QN so umformen, daß $\nu_Q(QN\circ V(p(n)))\in\mathbb{N}$ für jedes n erfüllt ist. Dann läßt sich der Beweis leicht auf TQKON übertragen.
Definiere hierzu die Funktion $QN:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $QN(q)(i):=\langle\langle n,m,k\rangle,0,0\rangle$, falls $q(i)=\langle n,m,k\rangle$. Es gilt dann für alle $i\in\mathbb{N}$ $\nu_Q(QN(p)(i)):=p(i)$, denn aus $p(i)=\langle n,m,k\rangle$ folgt $QN(p)(i)=\langle\langle n,m,k\rangle,0,0\rangle$, also $\nu_Q(QN(p)(i))=\nu_Q\langle\langle n,m,k\rangle,0,0\rangle=\langle n,m,k\rangle=p(i)$.
Damit gilt $QKON(p)=1$

$\Leftrightarrow T\circ V(p)=0$ (Beweis von Satz 5.10)
$\Leftrightarrow TQKON\circ QN\circ V(p)=0$ (wegen $\nu_Q(QN\circ V(p)(i))=V(p)(i)$ für alle $i\in\mathbb{N}$)
$\Leftrightarrow NEG\circ TQKON\circ QN\circ V(p)=1$ und

$QKON(p)=0$ $\Leftrightarrow T\circ V(p)=1$ (Beweis von Satz 5.10)
$\Leftrightarrow TQKON\circ QN\circ V(p)=1$ (wegen $\nu_Q(QN\circ V(p)(i))=V(p)(i)$ für alle $i\in\mathbb{N}$)
$\Leftrightarrow NEG\circ TQKON\circ QN\circ V(p)=0$.

Also gilt $QKON\le_2 TQKON$.
QED.

Satz 5.13: $TQKON\le_2 QKON$.

<u>Beweis</u>: Sei $h:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ definiert durch $h(p)(n):=\dfrac{1}{|\nu_Q(p(n))|+1}$ und $DIV2:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$DIV2(p)(2\cdot n):=p(n)$ und $DIV2(p)(2\cdot n+1):=\langle n,0,0\rangle$.

Definiere $KEHRW:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $KEHRW(p)(i):=\langle k+1,0,|n-m|+k\rangle$ für $p(i)=\langle n,m,k\rangle$.

Es gilt dann $h(p)(i)=\nu_Q(KEHRW(p(i)))$ für alle $i\in\mathbb{N}$, denn für $p(i)=\langle n,m,k\rangle$ gilt

$$\nu_Q(KEHRW(p(i)))=\nu_Q\langle k+1,0,|n-m|+k\rangle=\frac{k+1}{|n-m|+k+1}=\frac{1}{\frac{|n-m|+k+1}{k+1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{|n-m|}{k+1}+1}=\frac{1}{\left|\frac{n-m}{k+1}\right|+1}=\frac{1}{\left|\nu_Q\langle n,m,k\rangle\right|+1}=\frac{1}{\left|\nu_Q(p(i))\right|+1}=h(p(i)).$$

Für alle $p\in\mathbb{B}$ gilt dann

$TQKON(p)=1 \Leftrightarrow$ Es gibt keine konvergente Teilfolge in $(\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$

$\Leftrightarrow |\nu_Q(p(n))|$ konvergiert bestimmt gegen ∞

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{|\nu_Q(p(n))|+1}$ konvergiert gegen 0

$\Leftrightarrow$ $h(p)$ konvergiert gegen 0

$\Leftrightarrow$ $\nu_Q(KEHRW(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

$\Leftrightarrow$ $\nu_Q(KEHRW\circ DIV2(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

$\Leftrightarrow$ $QKON\circ KEHRW\circ DIV2(p)=0$

$\Leftrightarrow$ $NEG\circ QKON\circ KEHRW\circ DIV2(p)=1$ und

$TQKON(p)=0 \Leftrightarrow$ Es gibt eine konvergente Teilfolge in $(\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$

$\Leftrightarrow |\nu_Q(p(n))|$ konvergiert nicht bestimmt gegen ∞

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{|\nu_Q(p(n))|+1}$ konvergiert nicht gegen 0

$\Leftrightarrow$ $h(p)$ konvergiert nicht gegen 0

$\Leftrightarrow$ $\nu_Q(KEHRW(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0

$\Leftrightarrow$ $\nu_Q(KEHRW\circ DIV2(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0

$\Leftrightarrow$ $QKON\circ KEHRW\circ DIV2(p)=1$

$\Leftrightarrow$ $NEG\circ QKON\circ KEHRW\circ DIV2(p)=0$.

Also gilt $TQKON\leq_2 QKON$.

QED.

Das Vorhandensein einer rationalen konvergenten Teilfolge ist also genauso schwer zu bestimmen wie die Konvergenz der Folge.

Konvergente Folgen reeller Zahlen

Auch das Konvergenzproblem für reelle Zahlen ist C^3-stetig:

Definition 5.14: RKON:$\mathbb{B}\to\{0,1\}$ sei definiert durch

$$\mathrm{RKON}\langle p_n\rangle_n := \begin{cases} 0 \text{ falls } (\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Satz 5.15: QKON$\leq_2$RKON.

Beweis: Eine Folge von reellen Zahlen wird repräsentiert durch eine Folge $\langle p_n\rangle_n$ mit $\langle p_n\rangle_n\langle n,i\rangle := p_n(i)$. Definiere QR:$\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $QR(p)\langle n,i\rangle := p(n)$. Die Folge p von rationalen Zahlen wird durch QR in eine Folge von konstanten Folgen übersetzt. Es gilt dann
QKON(p)=0 $\Leftrightarrow$ $(\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ RKON$\circ$QR=0 und
QKON(p)=1 $\Leftrightarrow$ $(\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht $\Leftrightarrow$ RKON$\circ$QR=1.
Also folgt QKON$\leq_2$RKON.
QED.

Satz 5.16: RKON$\leq_2$QKON.

Beweis: Ich beweise zunächst: $(\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $(\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$(\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)\ |\rho(p_n)-\rho(p_m)| < 2^{-k}$

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)\ |\rho(p_n)-\rho(p_m)| < 2^{-k}$ und $|\nu_Q(p\langle n,n\rangle)-\rho(p_n)| < 2^{-k}$ und $|\rho(p_m)-\nu_Q(p\langle m,m\rangle)| < 2^{-k}$

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)\ |\rho(p_n)-\rho(p_m)+\nu_Q(p\langle n,n\rangle)-\rho(p_n)+\rho(p_m)-\nu_Q(p\langle m,m\rangle)|<3\cdot 2^{-k}$

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)\ |\nu_Q(p\langle n,n\rangle)-\nu_Q(p\langle m,m\rangle)| < 3\cdot 2^{-k}$

$\Rightarrow (\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$(\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)\ |\nu_Q(p\langle n,n\rangle)-\nu_Q(p\langle m,m\rangle)| < 2^{-k}$

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)\ |\nu_Q(p\langle n,n\rangle)-\nu_Q(p\langle m,m\rangle)| < 2^{-k}$ und $|\rho(p_n)-\nu_Q(p\langle n,n\rangle)| < 2^{-k}$ und $|\nu_Q(p\langle m,m\rangle)-\rho(p_m)| < 2^{-k}$

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)$ $|\nu_Q(p\langle n,n\rangle)-\nu_Q(p\langle m,m\rangle)+\rho(p_n)-\nu_Q(p\langle n,n\rangle)+\nu_Q(p\langle m,m\rangle)-\rho(p_m)|<3\cdot 2^{-k}$

$\Rightarrow (\forall k)(\exists m\geq k)(\forall n\geq m)\ |\rho(p_n)-\rho(p_m)| < 3\cdot 2^{-k}$

$\Rightarrow (\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Sei $p:=\langle p_n\rangle_n$. Definiere DIA:$\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $DIA(q)(n):=q\langle n,n\rangle$. DIA ist stetig. Es gilt

RKON(p)=0

$\Leftrightarrow (\rho(p_n))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\Leftrightarrow (\nu_Q(p<n,n>))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\Leftrightarrow$ QKON∘DIA(p)=0 und

RKON(p)=1

$\Leftrightarrow (\rho(p_n))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht

$\Leftrightarrow (\nu_Q(p<n,n>))_{n\in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht

$\Leftrightarrow$ QKON∘DIA(p)=1.

Also gilt RKON$\leq_2$QKON.

QED.

Konvergente Teilfolgen reeller Zahlen

Das Teilfolgenproblem läßt sich ebenfalls auf die reellen Zahlen übertragen und einordnen.

Definition 5.17: Sei TRKON:$\mathbb{B}\rightarrow\{0,1\}$ definiert durch

$$\mathrm{TRKON}\langle p_n\rangle_n := \begin{cases} 0 \text{ falls } (\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ eine konvergente Teilfolge besitzt} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Satz 5.18: TQKON$\leq_2$TRKON.

Beweis: Eine Folge von reellen Zahlen wird repräsentiert durch eine Folge $\langle p_n\rangle_n$ mit $\langle p_n\rangle_n\langle n,i\rangle := p_n(i)$. Definiere wie beim Beweis von Satz 5.15 QR:$\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}$ durch QR(p)$\langle n,i\rangle$:=p(n). Die Folge p von rationalen Zahlen wird durch QR in eine Folge von konstanten Folgen übersetzt. Es gilt dann
TQKON(p)=0
$\Leftrightarrow$ $(\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge
$\Leftrightarrow$ $(\rho(QR(p)_n))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge
$\Leftrightarrow$ TRKON$\circ$QR(p)=0 und
TQKON(p)=1
$\Rightarrow$ $(\nu_Q(p(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge
$\Leftrightarrow$ $(\rho(QR(p)_n))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge
$\Rightarrow$ TRKON$\circ$QR(p)=1.
Also folgt TQKON$\leq_2$TRKON.
QED.

Satz 5.19: TRKON$\leq_2$TQKON.

Beweis: Ich beweise zunächst: $(\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge genau dann, wenn $(\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.
$(\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge
$\Rightarrow$ $(\exists k)(\exists m)$ für unendlich viele n liegt $\rho(p_n)$ im Intervall [k,m]
$\Rightarrow$ $(\exists k)(\exists m)$ für unendlich viele n liegt $\nu_Q(p\langle n,n\rangle)$ im Intervall [k-1,m+1]
$\Rightarrow$ $(\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.
$(\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge
$\Rightarrow$ $(\exists k)(\exists m)$ für unendlich viele n liegt $\nu_Q(p\langle n,n\rangle)$ im Intervall [k,m]
$\Rightarrow$ $(\exists k)(\exists m)$ für unendlich viele n liegt $\rho(p_n)$ im Intervall [k-1,m+1]

$\Rightarrow (\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Sei $p:=\langle p_n\rangle_n$. Definiere DIA:$\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch DIA(q)(n):=q<n,n>. DIA ist stetig. Es gilt

TRKON(p)=0

$\Leftrightarrow (\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge

$\Leftrightarrow (\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge

$\Leftrightarrow$ TQKON$\circ$DIA(p)=0 und

TRKON(p)=1

$\Leftrightarrow (\rho(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge

$\Leftrightarrow (\nu_Q(p\langle n,n\rangle))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge

$\Leftrightarrow$ TQKON$\circ$DIA(p)=1.

Also gilt TRKON$\leq_2$TQKON.

QED.

Kapitel VI. C^{∞}-stetige Funktionen

Die Untersuchung der C-Hierarchie legt die Frage nahe, ob es unstetige Funktionen gibt, die sich in die C-Hierarchie nicht einordnen lassen, und ob man Funktionenklassen oberhalb dieser Hierarchie definieren kann. Die Klassen der C-Hierarchie wurden über die Anzahl der Abfragen des C-Orakels definiert. Sind n Abfragen des Orakels nötig, um die Funktion f zu berechnen, so ist f C^n-stetig. Wenn man über die C-Hierarchie hinauskommen will, so müßte man beliebig viele Abfragen des C-Orakels zulassen.

Definition 6.1: Eine Funktion $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ ($\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$) heißt C^{∞}-stetig, gdw. es stetige Funktionen $A:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ ($A:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$) und $B,B_i:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, $i\geq 1$, und zu jedem $p\in\mathbb{B}$ ein $n\in\mathbb{N}$ gibt mit $\Gamma(p)=A\circ C\circ B_1\circ C\circ\ldots\circ C\circ B_n\circ B(p)$.

Es ist wichtig, daß in dieser Definition die Anzahl der verwendeten Funktionen von p abhängt. Außerdem sind die Funktionen $A,B,B_1,B_2,B_3\ldots$ fest gewählt. Ihre Wahl hängt nur von Γ ab und nicht von p oder n. Die Funktion B dient einer Vorverarbeitung des Arguments. Ohne solch eine Funktion würden sich die Beweise unnötig komplizieren.

Beispiele für C^{∞}-stetige Funktionen lassen sich recht leicht durch Rückgriff auf die schon bekannten Funktionen H^n_{χ}, H^n_{ψ}, K^n_{χ} und K^n_{ψ} konstruieren:

Definition 6.2: Die Funktionen $H^{\infty}_{\chi}, H^{\infty}_{\psi}, K^{\infty}_{\chi}, K^{\infty}_{\psi}:\mathbb{B}\to\{0,1\}$ werden definiert durch

$$H^{\infty}_{\chi}\langle n,p,q\rangle:=H^n_{\chi}\langle p,q\rangle,$$
$$H^{\infty}_{\psi}\langle n,p,q\rangle:=H^n_{\psi}\langle p,q\rangle,$$
$$K^{\infty}_{\chi}\langle n,p\rangle:=K^n_{\chi}(p) \text{ und}$$
$$K^{\infty}_{\psi}\langle n,p\rangle:=K^n_{\psi}(p)$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ und $p,q\in\mathbb{B}$.

Satz 6.3: Für alle $m\in\mathbb{N}$ gilt K^{∞}_{χ} ist nicht C^m-stetig.

<u>Beweis</u>: Annahme: K_χ^∞ ist C^m-stetig für ein $m\in\mathbb{N}$.

Sei $P:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ definiert durch $P(p):=\langle m,p\rangle$. Dann ist auch $K_\chi^\infty \circ P$ C^m-stetig. Definiere K durch

$$K(p):=\begin{cases} 0 \text{ falls } K_\chi^\infty \circ P(p)=1 \\ \text{div sonst} \end{cases}.$$

Es gibt dann ein $q\in\mathbb{B}$ mit $K=\chi_q^m$.

Es folgt für diese Folge q

$$\begin{aligned} K(q) \text{ ex.} \quad & \Leftrightarrow K_\chi^\infty \circ P(q)=1 \\ & \Leftrightarrow K_\chi^\infty \langle m,q\rangle=1 \\ & \Leftrightarrow K_\chi^m(q)=1 \\ & \Leftrightarrow \chi_q^m(q)=\text{div} \\ & \Leftrightarrow K(q)=\text{div}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Also ist K_χ^∞ nicht C^m-stetig.

QED.

<u>Satz 6.4</u>: Auch die Funktionen H_χ^∞, H_ψ^∞ und K_ψ^∞ sind für kein $m\in\mathbb{N}$ C^m-stetig.

<u>Beweis</u>: Der Beweis verläuft analog.

Als nächstes möchte ich beweisen, daß K_χ^∞ C^∞-stetig ist. Dafür brauche ich einige Definitionen und Hilfssätze. Der Satz ist zwar einleuchtend, aber sein Beweis erfordert leider einiges an Schreibarbeit.

<u>Definition 6.5</u>: Sei $CAR:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ definiert durch $CAR\langle n,p\rangle:=n$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$. $CDR:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ sei gegeben durch $CDR\langle n,p\rangle:=p$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.

<u>Hilfssatz 6.6</u>: Es gibt zwei stetige Funktionen $CO:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ und $DE:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ mit der Eigenschaft $DE\circ C\circ CO\circ\langle n,\langle p,q\rangle\rangle=\langle n,\langle p,C(q)\rangle\rangle$ für alle $p,q\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.

<u>Beweis</u>: Definiere CO durch $CO(p)(n):=\begin{cases} 2\langle n,p(n)\rangle+1 \text{ falls } n=0 \text{ oder } n \text{ ungerade} \\ 2\pi_2 CDR(p(n))+2 \text{ sonst} \end{cases}$

und DE durch

$$DE(q)(n):=\begin{cases}\pi_2(\min\{i|i \text{ gerade und } q(i)=0 \text{ und } \pi_1(i/2)=n\}/2) \text{ falls } n=0 \text{ oder } n \text{ ungerade}\\ q(n+1) \text{ sonst}\end{cases}.$$

DE kann auch divergieren.

Es gilt dann $DE\circ C\circ CO<n,<p,q>>=<n,<p,C(q)>>$ für alle $p,q\in \mathbb{B}$ und $n\in \mathbb{N}$.

Denn für $k=0$ oder k ungerade gilt

$DE\circ C\circ CO\circ<n,<p,q>>(k)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(\min\{i|i \text{ gerade und } C\circ CO<n,<p,q>>(i)=0 \text{ und } \pi_1(i/2)=k\}/2)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(\min\{i|i \text{ gerade und } (\exists j)\ CO<n,<p,q>>(j)=i+1 \text{ und } \pi_1(i/2)=k\}/2)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(\min\{i|i \text{ gerade und } (\exists j)\ 2<j,<n,<p,q>>(j)>+1=i+1 \text{ und } \pi_1(i/2)=k\}/2)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(\min\{i|\ (\exists j)\ 2<j,<n,<p,q>>(j)>+1=i+1 \text{ und } \pi_1(i/2)=k\}/2)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(\min\{i|\ (\exists j)\ 2<j,<n,<p,q>>(j)>+1=i+1 \text{ und } j=k\}/2)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(\min\{i|\ 2<k,<n,<p,q>>(k)>+1=i+1\}/2)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(\min\{i|\ 2<k,<n,<p,q>>(k)>=i\}/2)=m$

$\Leftrightarrow \pi_2(2<k,<n,<p,q>>(k)>/2)=m$

$\Leftrightarrow <n,<p,q>>(k)=m$

$\Leftrightarrow <n,<p,C(q)>>(k)=m$, weil die Elemente von $C(q)$ an den Stellen 2,4,6,... sitzen.

Für $k>0$ und k gerade gilt

$DE\circ C\circ CO\circ<n,<p,q>>(k)=0$

$\Leftrightarrow C\circ CO\circ<n,<p,q>>(k+1)=0$

$\Leftrightarrow (\exists j)\ CO\circ<n,<p,q>>(j)=k+2$

$\Leftrightarrow (\exists j)\ 2q(j)+2=k+2$

$\Leftrightarrow (\exists j)\ q(j)=k/2$

$\Leftrightarrow C(q)(k/2-1)=0$

$\Leftrightarrow <n,<p,C\circ(q)>>(k)=0$ und

$DE\circ C\circ CO\circ<n,<p,q>>(k)=1$

$\Leftrightarrow C\circ CO\circ<n,<p,q>>(k+1)=1$

$\Leftrightarrow \neg(\exists j)\ CO\circ<n,<p,q>>(j)=k+2$

$\Leftrightarrow \neg(\exists j)\ 2q(j)+2=k+2$

$\Leftrightarrow \neg(\exists j)\ q(j)=k/2$

$\Leftrightarrow C(q)(k/2-1)=1$

$\Leftrightarrow <n,<p,C\circ(q)>>(k)=1$.

QED.

<u>Definition 6.7</u>: Definiere $f_0:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ durch

$$f_0(q):=\begin{cases} U_\chi^0<\pi_1{\circ}CDR,\pi_2{\circ}CDR>(q) \text{ falls } CAR(q)=0\\ U_\chi^0<\pi_2{\circ}\pi_1{\circ}CDR,\pi_2{\circ}CDR>{\circ}DE(q) \text{ sonst}\end{cases}$$

und für n>0 $f_n:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$$f_n(q):=\begin{cases} CO{\circ}<CAR,<\pi_1{\circ}CDR,U_\psi^0<\pi_1^{n+1}{\circ}CDR,\pi_2{\circ}CDR>>>(q) \text{ falls } CAR(q)=n\\ CO{\circ}<CAR,<\pi_1{\circ}CDR,U_\psi^0<\pi_2{\circ}\pi_1^{n+1}{\circ}CDR,\pi_2{\circ}CDR>>>{\circ}DE(q) \text{ sonst}\end{cases}.$$

<u>Hilfssatz 6.8</u>: Für alle $n\geq 0$ und für alle i mit $0<i\leq n+1$ und $p,q,r\in\mathbb{B}$ gilt

$$f_i{\circ}C{\circ}\ldots{\circ}C{\circ}f_{n+1}<n+1,<<p,q>,r>>=CO{\circ}<n+1,<<p,q>,U_\psi^{n+1-i}<\pi_1^{i-1}(p),r>>>.$$

<u>Beweis</u>: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang (i=n+1):

$f_{n+1}<n+1,<<p,q>,r>>$

$$=CO{\circ}<CAR,<\pi_1{\circ}CDR,U_\psi^0<\pi_1^{n+2}{\circ}CDR,\pi_2{\circ}CDR>>>\ <n+1,<<p,q>,r>>$$

$$=CO{\circ}<n+1,<<p,q>,U_\psi^0<\pi_1^n(p),r>>>$$

Induktionsschluß ($i\to i-1$, aber $i-1>0$):

$f_{i-1}{\circ}C{\circ}f_i{\circ}C{\circ}\ldots{\circ}C{\circ}f_{n+1}<n+1,<<p,q>,r>>$

$$=f_{i-1}{\circ}C{\circ}CO{\circ}<n+1,<<p,q>,U_\psi^{n+1-i}<\pi_1^{i-1}(p),r>>> \text{ (nach Induktionsvoraussetzung)}$$

$$=CO{\circ}<CAR,<\pi_1{\circ}CDR,U_\psi^0<\pi_2{\circ}\pi_1^i{\circ}CDR,\pi_2{\circ}CDR>>>{\circ}DE$$
$$\qquad {\circ}C{\circ}CO{\circ}<n+1,<<p,q>,U_\psi^{n+1-i}<\pi_1^{i-1}(p),r>>>$$

$$=CO{\circ}<CAR,<\pi_1{\circ}CDR,U_\psi^0<\pi_2{\circ}\pi_1^i{\circ}CDR,\pi_2{\circ}CDR>>>$$
$$\qquad <n+1,<<p,q>,C{\circ}U_\psi^{n+1-i}<\pi_1^{i-1}(p),r>>>$$

nach Hilfssatz 6.6

$$=CO{\circ}<n+1,<<p,q>,U_\psi^0<\pi_2\pi_1^{i-2}(p),C{\circ}U_\psi^{n+1-i}<\pi_1^{i-1}(p),r>>>>$$

$$=CO{\circ}<n+1,<<p,q>,U_\psi^{n+2-i}<\pi_1^{i-2}(p),r>>>$$ [29]

$$=CO{\circ}<n+1,<<p,q>,U_\psi^{n+1-(i-1)}<\pi_1^{(i-1)-1}(p),r>>>$$

QED.

<u>Hilfssatz 6.9</u>: Es gilt $U_\chi^n(p)=f_0{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}\ldots{\circ}C{\circ}f_n<n,p>$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.

<u>Beweis</u>: Der Beweis erfolgt durch Fallunterscheidung.

---

[29] Vergleiche mit C-utm-Theorem Satz 9 [Stein] Seite 61,62.

1. Fall (n=0):

$f_0<0,p>=U^0_\chi<\pi_1\circ CDR,\pi_2\circ CDR><0,p>=U^0_\chi<\pi_1(p),\pi_2(p)>=U^0_\chi(p).$

2. Fall (n=m+1, m≥0):

$f_0\circ C\circ f_1\circ C\circ ...\circ C\circ f_n <n,<<p,q>,r>>$

$=f_0\circ C\circ f_1\circ C\circ ...\circ C\circ f_{m+1} <m+1,<<p,q>,r>>$

$=f_0\circ C\circ CO\circ <m+1,<<p,q>,U^m_\psi<p,r>>>$ (nach Satz 6.8)

$=U^0_\chi<\pi_2\circ\pi_1\circ CDR,\pi_2\circ CDR>\circ DE\circ C\circ CO\circ <m+1,<<p,q>,U^m_\psi<p,r>>>$

$=U^0_\chi<\pi_2\circ\pi_1\circ CDR,\pi_2\circ CDR><m+1,<<p,q>,C\circ U^m_\psi<p,r>>>$ (nach Hilfssatz 6.6)

$=U^0_\chi<q,C\circ U^m_\psi<p,r>>$

$=\chi^0_q\circ C\circ\psi^m_p(r)$

$=\chi^{m+1}_{<p,q>}(r)$

$=U^{m+1}_\chi<<p,q>,r>$

$=U^n_\chi<<p,q>,r>.$

QED.

<u>Satz 6.10</u>: K^∞_χ ist C^∞-stetig.

<u>Beweis</u>: Es gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ und $p\in\mathbb{B}$ $K^\infty_\chi<n,p>=K^n_\chi(p)=\begin{cases}0 \text{ falls } \chi^n_p(p) \text{ existiert}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$

$=\begin{cases}0 \text{ falls } U^n_\chi<p,p> \text{ existiert}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$.

Nach Satz 6.9 gilt $U^n_\chi<p,p>=f_0\circ C\circ f_1\circ C\circ ...\circ C\circ f_n<n,<p,p>>$. Definiere $\Sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$\Sigma(q)(t):=\begin{cases}1 \text{ falls } \overline{f}_0([\![q]\!]_t) \text{ existiert}\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$ für alle $q\in\mathbb{B}$ und $t\in\mathbb{N}$. Definiere weiter $\Gamma:\mathbb{B}\to\mathbb{N}$ durch

$\Gamma(q):=\begin{cases}0 \text{ falls } q(0)=0\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ für alle $q\in\mathbb{B}$ und $B:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $B<n,p>:=<n,<p,p>>$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$.

Es gilt dann $K^\infty_\chi<n,p>=\Gamma\circ C\circ\Sigma\circ C\circ f_1\circ C\circ ...\circ C\circ f_n\circ B<n,p>$. Denn

$K^\infty_\chi<n,p>=0$

$\Leftrightarrow K^n_\chi(p)=0$

$\Leftrightarrow \chi^n_p(p)$ existiert

$\Leftrightarrow U^n_\chi<p,p>$ existiert

$\Leftrightarrow f_0{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n\langle n,\langle p,p\rangle\rangle$ existiert

$\Leftrightarrow f_0{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle$ existiert

$\Leftrightarrow (\exists t)\ \bar{f}_0([\![C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle]\!]_t)$ existiert

$\Leftrightarrow (\exists t)\ \Sigma{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle(t)=1$

$\Leftrightarrow C{\circ}\Sigma{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle(0)=0$

$\Leftrightarrow \Gamma{\circ}C{\circ}\Sigma{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle=0$ und

$K^\infty_\chi\langle n,p\rangle=1$

$\Leftrightarrow K^n_\chi(p)=1$

$\Leftrightarrow \chi^n_p(p)$ existiert nicht

$\Leftrightarrow U^n_\chi\langle p,p\rangle$ existiert nicht

$\Leftrightarrow f_0{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n\langle n,\langle p,p\rangle\rangle$ existiert nicht

$\Leftrightarrow f_0{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle$ existiert nicht

$\Leftrightarrow \neg(\exists t)\ \bar{f}_0([\![C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle]\!]_t)$ existiert

$\Leftrightarrow \neg(\exists t)\ \Sigma{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle(t)=1$

$\Leftrightarrow C{\circ}\Sigma{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle(0)=1$

$\Leftrightarrow \Gamma{\circ}C{\circ}\Sigma{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle=1$.

Es gilt also $K^\infty_\chi\langle n,p\rangle=\Gamma{\circ}C{\circ}\Sigma{\circ}C{\circ}f_1{\circ}C{\circ}...{\circ}C{\circ}f_n{\circ}B\langle n,p\rangle$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $p\in\mathbb{B}$. Hierbei sind die Funktionen $\Gamma,\Sigma,B,f_1,f_2,f_3,f_4,...$ festgewählt. Also ist K^∞_χ C^∞-stetig.

QED.

Es läßt sich analog beweisen, daß K^∞_ψ, H^∞_χ und H^∞_ψ C^∞-stetig sind.

Kapitel VII. C-Hierarchie und Prädikatenlogik

Im letzten Kapitel möchte ich eine prädikatenlogische Beschreibung der Funktionen der C-Hierarchie in Angriff nehmen. Ich habe schon an mehreren Stellen die Definitionen von unstetigen Funktionen duch prädikatenlogische Ausdrücke ergänzt. Dabei wird deutlich, daß schwierigere Funktionen die Verwendung einer größeren Anzahl von Quantoren erfordern. Ich gebe hier noch einmal einige Beispiele:

$\Omega(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } (\forall n)\ p(n)=0\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ ist Ω-stetig und die Definition enthält einen Allquantor.

$C(p)(n):=\begin{cases}0 \text{ falls } n\in M_p\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}=\begin{cases}0 \text{ falls } (\exists m)\ p(m)=n+1\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ ist C-stetig und die Beschreibung enthält einen Existenzquantor.

Allerdings ist der Funktionswert von C eine Folge im Unterschied zu Ω.

$KON(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } (p)_n \text{ konvergiert}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}=\begin{cases}0 \text{ falls } (\exists l,k)(\forall m>l)\ p(m)=k\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ ist C^2-stetig, zwei Quantoren.

$T(p):=\begin{cases}0 \text{ falls es eine konstante Teilfolge in p gibt}\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$

$=\begin{cases}0 \text{ falls } (\exists n)(\forall m)(\exists k)\ k>m \text{ und } p(k)=n\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ ist C^3-stetig, drei Quantoren.

Ich möchte im folgenden diese Regelmäßigkeiten untersuchen. Dabei drängt sich der Gedanke an die Kleene-Hierarchie auf, in der nicht berechenbare Funktionen der Typ-I-Theorie nach Schwierigkeit klassifiziert werden. Eine ähnliche Vollständigkeit wird aber hier noch nicht erreicht.

Satz 7.1: Gilt $f(p)(n)=\begin{cases}0 \text{ falls } (\forall m)\ P(p,n,m)\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}$ für alle $p\in\mathbb{B}$ und $n\in\mathbb{N}$ mit einem rekursiven Prädikat P, so ist f C-stetig.

Beweis: Sei $g_1:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ definiert durch $g_1(p)\langle n,m\rangle:=\begin{cases}0 \text{ falls } P(p,n,m)\\ n+1 \text{ sonst}\end{cases}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(p)(n)=0 \quad &\Leftrightarrow (\forall m)\ P(p,n,m)\\ &\Leftrightarrow (\forall m)\ g_1(p)\langle n,m\rangle=0\\ &\Leftrightarrow C\circ g_1(p)(n)=1\\ &\Leftrightarrow INV\circ C\circ g_1(p)(n)=0 \text{ und}\\ f(p)(n)=1 \quad &\Leftrightarrow (\exists m)\ \neg P(p,n,m)\\ &\Leftrightarrow (\exists m)\ g_1(p)\langle n,m\rangle=n+1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow C \circ g_1(p)(n)=0$

$\Leftrightarrow INV \circ C \circ g_1(p)(n)=1.$

Da g_1 und INV stetig sind, ist f C-stetig.

QED.

Satz 7.2: Gilt $f(p)(n)=\begin{cases} 0 \text{ falls } (\exists m)\ P(p,n,m) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$ für alle $p \in \mathbb{B}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit einem rekursiven Prädikat P, so ist f C-stetig.

Beweis: Sei $g_2:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ definiert durch $g_2(p)<n,m>:=\begin{cases} n+1 \text{ falls } P(p,n,m) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$. Dann gilt

$f(p)(n)=0 \quad \Leftrightarrow (\exists m)\ P(p,n,m)$

$\Leftrightarrow (\exists m)\ g_2(p)<n,m>=n+1$

$\Leftrightarrow C \circ g_2(p)(n)=0$ und

$f(p)(n)=1 \quad \Leftrightarrow (\forall m)\ \neg P(p,n,m)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall m)\ g_2(p)<n,m>=0$

$\Leftrightarrow C \circ g_2(p)(n)=1.$

Da g_2 stetig ist, ist f C-stetig.

QED.

Satz 7.3: Gilt

$$f(p)(n)=\begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n_1)(\exists n_2)\dots(Qn_k)\ P(p,n,n_1,n_2,\dots,n_k) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} \text{ für alle } p\in\mathbb{B} \text{ und } n\in\mathbb{N}$$

oder

$$f(p)(n)=\begin{cases} 0 \text{ falls } (\exists n_1)(\forall n_2)\dots(Qn_k)\ P(p,n,n_1,n_2,\dots,n_k) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} \text{ für alle } p\in\mathbb{B} \text{ und } n\in\mathbb{N}$$

mit einem rekursiven Prädikat P, wobei Q der Existenz- oder der Allquantor ist , so ist $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ eine C^k-stetige Funktion.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion.

Induktionsanfang (k=1): Dieser Fall entspricht Satz 7.1 bzw. Satz 7.2.

Induktionsschluß ($k\to k+1$):

1. Fall: $f(p)(n)=\begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n_1)(\exists n_2)\dots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\dots,n_{k+1}) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$. Definiere $g:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $g(p)<n,n_1>:=\begin{cases} 0 \text{ falls } (\exists n_2)\dots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\dots,n_{k+1}) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist g C^k-stetig. Definiere $h_1:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch

$h_1(q)<n,n_1>:=\begin{cases} n+1 \text{ falls } q<n,n_1>=1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$.

Es gilt dann

$f(p)(n)=0 \quad \Leftrightarrow (\forall n_1)(\exists n_2)\ldots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\ldots,n_{k+1})$
$\Leftrightarrow (\forall n_1)\ g(p)<n,n_1>=0$
$\Leftrightarrow \neg(\exists n_1)\ \neg g(p)<n,n_1>=0$
$\Leftrightarrow \neg(\exists n_1)\ g(p)<n,n_1>=1$
$\Leftrightarrow \neg(\exists n_1)\ h_1 \circ g(p)<n,n_1>=n+1$
$\Leftrightarrow \neg C \circ h_1 \circ g(p)(n)=0$
$\Leftrightarrow INV \circ C \circ h_1 \circ g(p)(n)=0$ und

$f(p)(n)=1 \quad \Leftrightarrow \neg(\forall n_1)(\exists n_2)\ldots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\ldots,n_{k+1})$
$\Leftrightarrow \neg(\forall n_1)\ g(p)<n,n_1>=0$
$\Leftrightarrow (\exists n_1)\ \neg g(p)<n,n_1>=0$
$\Leftrightarrow (\exists n_1)\ g(p)<n,n_1>=1$
$\Leftrightarrow (\exists n_1)\ h_1 \circ g(p)<n,n_1>=n+1$
$\Leftrightarrow C \circ h_1 \circ g(p)(n)=0$
$\Leftrightarrow INV \circ C \circ h_1 \circ g(p)(n)=1.$

Da h_1 und INV stetig sind, ist f C^{k+1}-stetig.

2. Fall: $f(p)(n)=\begin{cases} 0 \text{ falls } (\exists n_1)(\forall n_2)\ldots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\ldots,n_{k+1}) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$. Definiere $g:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch $g(p)<n,n_1>:=\begin{cases} 0 \text{ falls } (\forall n_2)\ldots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\ldots,n_{k+1}) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist g C^k-stetig. Definiere $h_2:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ durch
$h_2(q)<n,n1>:=\begin{cases} n+1 \text{ falls } q<n,n_1>=0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$.

Es gilt dann

$f(p)(n)=0 \quad \Leftrightarrow (\exists n_1)(\forall n_2)\ldots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\ldots,n_{k+1})$
$\Leftrightarrow (\exists n_1)\ g(p)<n,n_1>=0$
$\Leftrightarrow (\exists n_1)\ h_2 \circ g(p)<n,n_1>=n+1$
$\Leftrightarrow C \circ h_2 \circ g(p)(n)=0$ und

$f(p)(n)=1 \quad \Leftrightarrow \neg(\exists n_1)(\forall n_2)\ldots(Qn_{k+1})\ P(p,n,n_1,n_2,\ldots,n_{k+1})$
$\Leftrightarrow \neg(\exists n_1)\ g(p)<n,n_1>=0$
$\Leftrightarrow \neg(\exists n_1)\ h_2 \circ g(p)<n,n_1>=n+1$
$\Leftrightarrow C \circ h_2 \circ g(p)(n)=1.$

Da h_2 stetig ist, ist f C^{k+1}-stetig.

QED.

Hiermit ist gezeigt, daß man totale $\{0,1\}$-wertige Funktionen, die durch n Quantoren definiert werden, durch n-fache Anwendung von C beschreiben kann. Es stellt sich die Frage, ob man umgekehrt C^n-stetige Funktionen auch immer mit n Quantoren ausdrücken kann. Dem stellen sich Hindernisse in den Weg. Man betrachte beispielsweise die Funktion $f:\mathbb{B}\to\{0,1\}$, definiert durch

$$f(p):=\begin{cases}0 \text{ falls } [p(0)=0 \text{ und } (\forall i)p(i+1)=0] \text{ oder } [p(0)=1 \text{ und } (\exists i)p(i+1)\neq 0]\\ 1 \text{ sonst}\end{cases}.$$

f ist nicht nur C-stetig, sondern sogar Ω-stetig. Denn es gilt $f(p)=A\langle p,\Omega\circ B(p)\rangle$ mit

$$A\langle p,i\rangle:=\begin{cases}0 \text{ falls } [p(0)=0 \text{ und } i=0] \text{ oder } [p(0)=1 \text{ und } i=1]\\ 1 \text{ sonst}\end{cases} \quad \text{und } B(q)(n):=q(n+1).$$

Es scheint aber nicht möglich, den in der Definition auftretenden Existenz- und Allquantor in Form eines Quantoren an den Anfang des Prädikats zu ziehen.

Ich lasse dieses Problem hier offen. Jedenfalls ist klar geworden, warum einige der bisher definierten Funktionen, die mit n Quantoren beschrieben werden konnten, C^n-stetig sein mußten.

Zusammenfassung

Ich möchte zum Schluß dieser Arbeit die wichtigsten Ergebnisse zusammenfassen und mit der Formulierung einiger noch ungelöster Probleme und neuer Fragen schließen.

Aus dem Komplex von reellen Funktionen und damit zusammenhängender Fragen sind vor allem folgende Ergebnisse erzielt worden:
1) Auch die höheren Ableitungen sind C-stetig.
2) Die Feststellung, ob eine Zahl rational oder reell ist, ist C^2-stetig.
3) Die Feststellung, ob eine rationale Folge dicht in $\mathbb{R}$ liegt, ist C^2-stetig.
4) Die Bestimmung der Konvergenz und des Grenzwertes einer rationalen oder reellen Folge ist C^3-stetig.
5) Die Feststellung, ob eine konvergente Teilfolge einer rationalen oder reellen Folge existiert, ist C^3-stetig.

Zweitens konnte die C-Hierarchie erweitert und verfeinert werden. Es gibt eine unendliche Hierarchie untereinander verschiedener Funktionenklassen unterhalb von C, und es gibt eine Klasse, die über allen bisherigen Funktionen der C-Hierarchie liegt. Eine Abbildung soll alle Ebenen der C-Hierarchie darstellen, die bis jetzt bekannt sind:

$$\boxed{C^\infty}$$
$$\vdots$$
$$\boxed{C^n}$$
$$\vdots$$
$$\boxed{C^2}$$
$$\boxed{C}$$
$$\boxed{C_\infty}$$
$$\vdots$$
$$\boxed{C_n=\Omega_n}$$
$$\vdots$$
$$\boxed{C_2=\Omega_2}$$
$$\boxed{\Omega=C_1=\Omega_1}$$

Außerdem habe ich mich mit der Übersetzung von reellen Zahlen zwischen verschiedenen adischen Systemen und mit einem Fortsetzungsproblem beschäftigt. Hauptergebnis:
1) Die Übersetzung von r-adischer in s-adische Darstellung ist genau dann stetig, wenn alle Primteiler von s auch Primteiler von r sind. (Ergebnis stammt von Klaus Weihrauch)
2) Die Übersetzung von r-adischer in s-adische Darstellung ist höchstens C-stetig.
3) Das Fortsetzungsproblem FSP ist nicht stetig fortsetzbar.
4) Es gibt keine totale Fortsetzung von FSP, die auf Ω reduzierbar ist.
5) Es gibt eine totale Fortsetzung FS von FSP, die C-stetig ist.
6) C ist nicht auf FS reduzierbar.

Es bleiben aber noch manche Fragen offen. Viele Probleme haben sich mir erst während der Arbeit gestellt. Und einige Definitionen und Begriffsbildungen erscheinen mir inzwischen etwas zu unhandlich und unbequem.

Zunächst bietet es sich an, die C-Hierarchie weiter zu vervollständigen. Gibt es auch für $n \geq 1$ zwischen C^n und C^{n+1} eine Hierarchie? Kann man oberhalb von C^∞ weitere Klassen definieren, z.B. durch mehrfache Anwendung von C^∞-stetigen Funktionen?

Zweitens fragt es sich, wo weitere bekannte Funktionen aus der Analysis liegen und ob es welche gibt, die noch höher in der C-Hierarchie liegen. Es war ja schon interessant, daß so grundlegende Funktionen wie QKON und RKON (Konvergenz von rationalen oder reellen Folgen) C^3-stetig sind, während so anspruchsvolle Funktionen wie die Berechnung höherer Ableitungen nur C-stetig sind. Hier ist allerdings zu beachten, daß bei dem Ableitungsproblem recht starke Voraussetzungen gemacht wurden und daß der Funktionswert eine Folge von Näherungen ist und damit nicht so informationshaltig wie z.B. die exakte Information, ob eine Folge konvergiert oder nicht.

Es gibt viele weitere offene Fragen. In welchen Fällen ist $TRANS_{rs}$ auf $TRANS_{r's'}$ reduzierbar (Vergleich von Übersetzungsfunktionen verschiedener adischer Systeme)? Welche Funktionen sind in einer Klasse vollständig? Ich verstehe dabei unter einer f-vollständigen Funktion eine f-stetige Funktion g, auf die alle f-stetigen Funktionen reduzierbar sind. Ω ist natürlich Ω-vollständig und C ist C-vollständig. Aber welche Funktionen sind z.B. C^2- oder C^3-vollständig? Wie schwierig ist die Konvergenzbetrachtung für eine Funktionenfolge? Liegt solch eine Funktion oberhalb der C-Hierarchie und möglicher Erweiterungen? Und wie schwierig ist der Test auf Stetigkeit einer Funktion (wobei sich die Frage nach einer Darstellung von unstetigen Funktion stellt, da die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ nicht mehr kontinuumsmächtig ist)?

Ich habe in dieser Arbeit auch noch keinerlei Vergleich der verschiedenen Reduzierbarkeitsbegriffe vorgenommen. So benutzt Weihrauch eine Reduzierbarkeit für Mengen: $A \leq B :\Leftrightarrow (\exists f \text{ stetig})\ A = f^{-1}B$. [30] Es gibt sicherlich Zusammenhänge mit dem hier erörterten Begriff.

Schließlich fällt mir zur Typ-II-Berechenbarkeit noch die Chaostheorie ein. Die Chaostheorie beschäftigt sich mit Problemen, bei denen eine kleine Veränderung der Parameter zu einer großen Änderung des Ergebnisses führt. Viele numerische Verfahren zeigen in bestimmten Bereichen ein derartiges Verhalten. Das gleiche Phänomen tritt auch bei den hier untersuchten unstetigen Funktionen auf, z.B. bei der Übersetzung zwischen verschiedenen adischen Zahlensystemen. Es stellt sich dann aber die Frage, wie kompliziert bestimmte Probleme der Chaostheorie sind. Ist die Bestimmung der Konvergenz am Rande der Mandelbrotmenge Ω-stetig oder C-stetig? Wie schrierig ist die Voraussage für ein Dreikörperproblem? Das ist sicherlich ein interessanter Themenkomplex für weitere Untersuchungen.

[30] [Weihrauch FU] Seite 4 und [Weihrauch] Seite 363.

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Bronstein] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Thun/Frankfurt am Main 1980

[Davis] Martin Davis
Computability and Unsolvability
Dover Publications Inc., New York 1982

[Niven] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman
Einführung in die Zahlentheorie
Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1972

[Stein] Thorsten von Stein
Vergleich nicht konstruktiv lösbarer Probleme in der Analysis
Diplomarbeit an der Fernuniversität Hagen, 1989

[Weihrauch] Klaus Weihrauch
Computability
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1987

[Weihrauch FU] Klaus Weihrauch
The Lowest Wadge Degrees of Subsets of the Cantor Space
Informatik Berichte Nr. 107 Fernuniversität Hagen, 1991