Das profunde Verständnis fundamentaler Mathematik von Lehrkräften als Ausgangspunkt für eine Verbesserung der Unterrichtsqualität

- eine empirische Analyse unter Einschluss eines länderübergreifenden Vergleichs

Dem Fachbereich Erziehungswissenschaften der Universität Lüneburg zur Erlangung des Grades

Doktor der Philosophie
- Dr. phil. -

vorgelegte Dissertation von

Christofer Seyd

geb. am 01. Juni 1971 in Hamburg

Eingereicht am: 3.5.2004

Erster Gutachter: Prof. Dr. Kurz Czerwenka

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Michael Neubrand

Dritter Gutachter: Prof. Dr. Günther Roßbach

Tag der Disputation: 15.11.04

Danksagung

Die vergangenen Jahre, in denen diese Arbeit entstanden und gereift ist, wären ohne die Hilfe, den Zuspruch und die Geduld vieler Menschen aus meinem privaten und beruflichen Umfeld niemals erfolgreich verlaufen. Diesen Menschen möchte ich hier meinen besonderen Dank aussprechen.

Herrn Prof. Dr. Kurt Czerwenka danke ich für die Übernahme meiner Arbeit und die damit verbundene Betreuung. In fachwissenschaftlichen und empirischen Fragen hatte ich zudem in Herrn Dr. Martin Wellenreuther stets einen geduldigen, ermutigenden und kritischen Diskussionspartner. Von ihm kamen der Anstoß zu dieser Arbeit und viele unterstützende Worte, die mich oft bestätigten und anspornten.
Ebenso bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Michael Neubrand für die mathematisch-fachwissenschaftliche Betreuung dieser Arbeit sowie bei Herrn Prof. Dr. Günther Roßbach für die konstruktiv-kritischen Hinweise zum Abschluss der Arbeit.

Durch viele Höhen und Tiefen, die einhergingen mit den verschiedenen Stadien der Entstehung dieser Arbeit, begleiteten mich mein Vater und meine Familie, insbesondere aber meine Frau Fabienne Seyd, die mir immer wieder Mut zusprach, mich anspornte und mir auch in den Phasen, in denen mich die Fertigstellung des Manuskriptes an den Schreibtisch band, liebevolles Verständnis entgegenbrachte.
Ebenso danke ich meinen Schwiegereltern für die immerwährende Unterstützung: Prof. Dr. Wolfgang Seyd, der mir stets ein interessierter Gesprächspartner war, und Antje Seyd, die in der Zeit intensivster Arbeit ebenso immer für mich da war. Beiden danke ich besonders für die logistische Hilfe bei der Veröffentlichung dieser Schrift.

Den Hamburger und Züricher Lehrkräften, ihren Schulleitungen und Schülern sowie den Testhelfern der Universität Lüneburg, die durch ihre Bereitschaft zur Mitwirkung die Studie erst ermöglichten, danke ich für ihr Engagement und ihre Hilfsbereitschaft.
Nicht zuletzt möchte ich alle diejenigen ansprechen, die mich in den zurückliegenden vier Jahren ermuntert haben, diesen Qualifizierungsweg weiter zu gehen, und die mir durch ihr Verständnis und ihre Unterstützung jene Rahmenbedingungen geschaffen haben, ohne die eine Promotion nun einmal nicht erfolgreich abgeschlossen werden kann. Ich hoffe sehr, dass Ihnen die Lektüre dieser Schrift ein wenig von dem zurück geben kann, was sie mir in all den Jahren an Hilfe zukommen ließen.

Shanghai, d. 24.01.05

Christofer Seyd

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 7

1.1 Anlass und Problemstellung der Arbeit 7

1.2 Konkretisierung und Begründung der Themenwahl 11

1.3 Entfaltung des Untersuchungsansatzes 12

1.4 Aufbau der Arbeit 15

2 Das Konstrukt „Guter Unterricht“ als unabhängige Variable der Schülerleistung 19

2.1 Die Bedeutung des Lehrers für die Schülerleistung in der wissenschaftlichen Diskussion 22

2.2 Der „gute“ Lehrer als wissenschaftlich definiertes Kategorienbündel 23

2.3 Zusammenfassung 29

3 Begriffsbestimmung: Verständnisorientierter und verfahrensorientierter Unterricht 32

3.1 Lernen 32

3.2 Sinnvolles Lernen und mechanisches Lernen 37

3.3 „Verständniskern“ nach Zech 38

3.4 „Conceptual Knowledge“ und „Procedural Knowledge“ 41

3.5 Profound Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM) 43

3.6 Verständnisorientierter Unterricht 50

3.7 Schlussfolgerungen 53

4 Fachwissenschaftliche Grundlagen und Algorithmen 55

4.1 Aspekte des Zahlbegriffs 55

4.2 Rechenoperationen zu Grunde liegende Vorstellungen 57

4.2.1 Subtraktion 57

4.2.2 Multiplikation 59

4.3 Das Dezimalsystem – Systematik der Stellenschreibweise 62

4.4 Einblick in verschiedene Erklärungsansätze der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag 65

4.4.1 Gleichsinniges Ergänzen 66

4.4.2 Auffüllverfahren 67

4.4.3 Eintauschen in höheren Wertebenen 69

4.4.4 Normabweichende Erklärungsansätze 69

4.5 *Einblick in verschiedene Erklärungsansätze der schriftlichen Multiplikation* *71*
4.5.1 Hinführung über einen konkret operationalen Ansatz 71
4.5.2 Ikonische Darstellungen und die "Cognitive Load-Theorie" 72
4.5.3 Hinführung über die halbschriftliche Multiplikation 75
4.5.4 Verschiedene Algorithmen der schriftlichen Multiplikation 75

4.6 *Ein Ausschnitt aus der Elementargeometrie: Der Zusammenhang von Flächeninhalt und Umfang einer geschlossenen geometrischen Figur am Beispiel des „Rechtecks“* *78*
4.6.1 Reflektieren einer bislang unbekannten Theorie - tiefgehendes mathematisches Wissen in Form überlegten mathematischen Handelns 78
4.6.2 Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks 80
4.6.3 Die „Vier Stufen des tieferen Verständnisses“ nach Ma am Beispiel des Zusammenhangs zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks 83

4.7 *Schlussfolgerungen* *91*

5 Ziele, Fragestellungen und Durchführung der eigenen Untersuchung 92

5.1 *Erkenntnisse aus den internationalen Vergleichsstudien* *92*

5.2 *Zielsetzung der eigenen Untersuchung* *93*

5.3 *Das Untersuchungsdesign* *100*

5.4 *Durchführung des Vorhabens/verwendete Forschungsinstrumente* *101*
5.4.1 Auswahl der Schulen/Lehrkräfte 101
5.4.2 Datenerhebung in Hamburg 101
5.4.3 Datenerhebung in Zürich 107
5.4.4 Ein Vergleich der Rahmenbedingungen in Hamburg und Zürich: Beobachtungen während der Datenerhebung. 108
5.4.5 Zeitlicher Rahmen der Datenerhebung 111

6 Darstellung und Interpretation der Ergebnisse 113

6.1 *Das mathematische Verständnis der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation der befragten Lehrkräfte* *113*
6.1.1 Das Verständnis der schriftlichen *Subtraktion* bei den in Hamburg und Zürich interviewten Lehrkräften - eine Gegenüberstellung nach einer vorherigen Zuordnung der Antworten zu verschiedenen Kategorien 114
Kategorie 1 114
Kategorie 2 119
Kategorie 3 119
Kategorie 4 120
Sonderfälle 122
6.1.2 Das Verständnis der schriftlichen *Multiplikation* bei den in Hamburg und Zürich interviewten Lehrkräften - eine Gegenüberstellung nach einer vorherigen Zuordnung der Antworten zu verschiedenen Kategorien 124
Kategorie 1 125
Kategorie 2 126
Kategorie 3 127
Kategorie 4 128
Sonderfälle 128
6.1.3 Zusammenfassung und Interpretation der Gegenüberstellungen - Überprüfung der Hypothese 1 130

6.2 *Besondere Beobachtungen zu den Antworten der Lehrkräfte* *132*

6.2.1 „Vermischung“ von Erklärungsansätzen zur schriftlichen Subtraktion 132
6.2.2 Anteile verschiedener Erklärungsverfahren Zürich/Hamburg 137
6.2.3 Das „Borge“ - Verfahren: Problematik des Begriffs und Kollision einer weit verbreiteten Verfahrensvorstellung mit den zu vermittelnden Algorithmen 139
6.2.4 Die Funktion des Begriffes „Stellenwerttabelle“ in den Erklärungen der Lehrkräfte 140
6.2.5 Schilderungen von Erklärungsansätzen auf konkret-operationaler oder ikonischer Ebene 151
6.2.6 Erklärungsansätze zu Szenario 2: Halbschriftliche Multiplikation gegenüber dem Appell an Größenvorstellungen (Multiplikation mit 100) 153
6.2.7 Antworten mit zwei oder mehr enthaltenen Erklärungsansätzen 156
6.2.8 Nennung von erforderlichen Wissensgrundlagen der Schüler zum Lösen der schriftlichen Subtraktionsaufgaben 157
6.2.9 Nicht bewertbare Antworten 160
6.2.10 Zusammenfassung und Interpretation der besonderen Beobachtungen - Schlussfolgerungen in Bezug auf die Hypothesen 1, 2 und 3 161

6.3 Die Herangehensweise an ein bislang unbekanntes mathematisches Problem im Bereich der Geometrie als Eigenschaft von PUFM 163

6.4 Hamburger Schulleistungstest HST 4/5: Ergebnisse 170
6.4.1 Einfluss des sozialen Umfeldes auf die Schülerleistungen 171
6.4.2 Zusammenhänge zwischen Antworten der Lehrkräfte und Leistungen der Schüler 174

6.5 Zusammenhang zwischen Fakultas Mathematik und Profound Understanding of Fundamental Mathematics. 177

7 Die fachdidaktische Qualität von Lehrerhandbüchern zum Mathematikunterricht 184

7.1 Analyse 186

7.2 Auswertungsergebnisse 187
7.2.1 Verschiedenartigkeit der Verfahrensauswahl 187
7.2.2 Güte der methodisch-didaktischen Kommentare 187
7.2.3 Lehrwerke mit enthaltenen verständnistiefen Erklärungen 188
7.2.4 Beschränkung methodisch-didaktischer Kommentare auf direkte Handlungsanweisungen 190
7.2.5 Betonung der verfahrensorientierten Vermittlung. 191

7.3 Zusammenfassung 192

8 Zusammenfassung der wesentlichen Erkenntnisse und Resumée 193

8.1 Die wesentlichen Erkenntnisse im Überblick 193

8.2 Resumée und Forderungen an eine weiterführende Erforschung des Zusammenhangs zwischen profundem Fachwissen des Lehrers und vertieftem Verständnis des Schülers 198

9 Literaturverzeichnis 202

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Makromodell des Zusammenwirkens aller Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen (vgl. Helmke 2004) 19
Abb. 2: Wirkungsweisen von Unterricht, Helmke 2004 20
Abb. 3: Aufbau einer kognitiven Struktur nach Ausubel 37
Abb. 4: Auszug aus dem *"Zahlenbuch"* (Wittmann et al. 1996) 38
Abb. 5: Auszug aus dem Schulbuch für den Kanton Zürich; Hohl, W. u.a. (2000). „Mathematik 4“. Schülerbuch des Kantons Zürich. Zürich: Lehrbuchverlag des Kantons, S. 43 39
Abb. 6: Auszug aus dem Züricher Lehrerhandbuch (Hohl, W. u.a. 2000) 40
Abb. 7: Profound Understanding of Fundamental Mathematics nach Ma (1999). 44
Abb. 8: Verflechtungen innerhalb des PUFM 47
Abb. 9: A „Knowledge package“ for Subtraction with regrouping nach Ma, L. (1999) 48
Abb. 10: Profound Understanding of Fundamental Mathematics (Ma 1999, S. 120) 49
Abb. 11 a und b: kardinaler Aspekt der Subtraktion 57
Abb. 12 a und b: kardinaler Aspekt der Subtraktion (linear) 58
Abb. 13: Ordinaler Aspekt der Subtraktion 58
Abb. 14: Maßzahlaspekt der Subtraktion in Zusammenhang mit der „Konstanz der Differenz“ 58
Abb. 15: Operatoraspekt der Subtraktion 59
Abb. 16: Kardinaler Aspekt der Multiplikation (I) 60
Abb. 17: Kardinaler Aspekt der Multiplikation (II) 60
Abb. 18: Bündelung von Elementen und Repräsentation durch Ziffern in Stellenschreibweise.. 64
Abb. 19: Funktionsweise des gleichsinnigen Ergänzens 66
Abb. 20: Funktionsweise des Auffüllverfahrens 67
Abb. 21: „Zählermodell“ nach Wittmann et al. 1996. 68
Abb. 22: Funktionsweise des Eintauschverfahrens 69
Abb. 23: Halbschriftliche Multiplikation in ikonischer Darstellung 73
Abb. 24: Füllen eines begrenzten Bereiches mit Hilfe gleich großer Quadrate 81
Abb. 25: Graphische Darstellung der Behauptung der Schülerin bezüglich eines Zusammenhangs zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks 82
Abb. 26: Ein Gegenbeispiel zu der Annahme, der Flächeninhalt eines Rechtecks vergrößere sich mit der Zunahme des Umfangs 82
Abb. 27: Zusammenhang des Umfangs und Flächeninhalts eines Rechtecks bei „gegensinnigem“ Verändern der Variablen a und b 84
Abb. 28a, b, c: Variationen der Fläche und des Umfangs eines Rechtecks in Abhängigkeit von der Veränderung der Seitenlängen 86
Abb. 29d, e: Wenn sich eine Variable verringert, bleibt die Ursprungsfigur nicht bestehen. Ein Zusammenhang ist dann nicht mehr garantiert. 86
Abb. 30: Rechtecke unterschiedlicher Fläche (gestrichelt), deren Umfang gleich 6 ist (Punktepaare (a;b) ergeben immer den Umfang 6, der hier durch die durchgezogene, Diagonale Linie repräsentiert wird) 87

Abb. 31: Die Variablen a und b als Faktoren der Flächenberechnung ergeben immer genau sechs. Die Punktepaare (a;b), für die a mal b = 6 gilt, liegen auf der dargestellten Kurve (durchgezogene, gebogene Linie). Um ein Rechteck mit A = 6 darzustellen, gibt es unendlich viele Rechtecke (gestrichelt) mit jeweils verschiedenen Umfängen 88
Abb. 32: Überschneidung der Graphen zu Flächeninhalt und Umfang 89
Abb. 33: skizzierte Landkarte 90
Abb. 34: Design zur strengen Prüfung eines Zusammenhanges zwischen Lehrkraftwissen und Schülerleistung 98
Abb. 35: Das Design der eigenen Untersuchung 100
Abb. 36: 3 Beispielaufgaben aus dem mathematischen Teil des HST 4/5. Aus: Mietzel/Willenberg (2000). Hamburger Schulleistungstest für vierte und fünfte Klassen. Göttingen: Hogrefe. Testform A, S. 26 ff 107
Abb. 37: Zeitlicher Rahmen der Datenerhebung 112
Abb. 38 :Handskizze der Lehrkraft 05 H 117
Abb. 39: Gegenüberstellung der Anzahl von Antworttypen in Hamburg und Zürich bzgl. des Verfahrens der schriftlichen Subtraktion nach 4 Kategorien + Sonderfällen (in %).... 123
Abb. 40: Gegenüberstellung der Anzahl von Antworttypen in Hamburg und Zürich bezüglich des Verfahrens der schriftlichen Multiplikation nach 4 Kategorien + Sonderfällen (in %). 129
Abb. 41: Vermischen von Erklärungsansätzen 135
Abb. 42: Anteile unterschiedlicher Formen der Vermischung von Erklärungsansätzen zur schriftlichen Subtraktion 137
Abb. 43: Anteile verschiedener Erklärungsansätze und „Vermischung“ Hamburg/Zürich im Vergleich 139
Abb. 44: Anzahl der Lehrkräfte, die das Stellenwertsystem direkt oder indirekt als Schülerwissen-Voraussetzung benennen 147
Abb. 45: Interviewbegleitende, handschriftliche Skizze der Lehrkraft 06 H 148
Abb. 46: Häufig auftretende Ansätze der Lehrkräfte zur Behebung der Schülerfehler in Szenario 2 149
Abb. 47: Verhältnis Schilderung von Erklärungsansätzen auf konkret-operationaler oder ikonischer Ebene Hamburg/Zürich 152
Abb. 48: Handschriftliche Begleitnotiz der Lehrkraft 05 H 154
Abb. 49: Handschriftliche Begleitnotiz der Lehrkraft 18 H 154
Abb. 50: Halbschriftliche Multiplikation bzw. Multiplikation mit 100 im Vergleich Züricher und Hamburger Lehrkräfte 156
Abb. 51: Gegenüberstellung der Antworttypen zur Herangehensweise an die Behauptung der Schülerin, die Fläche eines Rechtecks nehme parallel zum Umfang immer zu........ 167
Abb. 52: Zusammenhang zwischen Einkünften der Erziehungsberechtigten und dem durchschnittlichen Prozentrang einer Klasse 172
Abb. 53: Zusammenhang zwischen durchschnittlichem Ausländeranteil im Einzugsgebiet der Schule und Schülerleistungen 173

Abb. 54: Prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 22, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung) 176
Abb. 55: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 06, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung) 176
Abb. 56: Kreuztabelle zur Analyse der Lehrerbefragung in Bezug auf Alter, Dienstzeit, Fakultas Mathematik, verwendetes Schulbuch und Einstufung der Antworten zu den verschiedenen Szenarien 179
Abb. 57: Verteilung der Lehrkräfte mit Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien 180
Abb. 58: Verteilung der Lehrkräfte mit und ohne Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien in Bezug auf Szenario 1 in % 181
Abb. 59: Verteilung der Lehrkräfte mit und ohne Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien in Bezug auf Szenario 2 in % 181
Abb. 60: Verteilung der Lehrkräfte mit und ohne Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien in Bezug auf Szenario 1 absolut 182
Abb. 61: Anzahl der Lehrkräfte, die ein bestimmtes Schulbuch verwendet haben, im Vergleich zur zugeordneten Kategorie. 183

1 Einleitung

1.1 Anlass und Problemstellung der Arbeit

Als Grundschullehrer unterrichtete der Verfasser von 1998 - 2003 zunächst an einer Grundschule in Niedersachsen, bevor er, nicht zuletzt geleitet von seinen Interessen an unterschiedlichen Bildungssystemen, eine Stelle an der Deutschen Schule in Shanghai/China antrat, an der er bis heute unter anderem das Fach Mathematik unterrichtet. Seine Profession betreffend, verfolgte er in den vergangenen Jahren aufmerksam die Veröffentlichungen zu Evaluationen des deutschen Schulsystems. Die drei wohl bekanntesten Untersuchungen, TIMSS, PISA und IGLU[1] ließen die deutschen Schüler im internationalen Vergleich bekanntlich eher mäßig abschneiden. Das gilt auch für die Leistungen in Mathematik, einem Fach, das gemeinhin für eine der drei grundlegenden Kulturtechniken (Rechnen, Schreiben, Lesen) steht.

Seit der Veröffentlichung insbesondere der PISA-Studie und der damit einhergehenden Ernüchterung („PISA-Schock“) wird in Deutschland intensiv nach Gründen für das enttäuschende Abschneiden gesucht und nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in der an Schule interessierten sogenannten Öffentlichkeit intensiv und ausdauernd diskutiert; die Medien sind gefüllt mit Verbesserungsvorschlägen, Berichten von Reformplänen und mehr oder weniger Ernst zu nehmenden Deutungen der Qualifikation und Leistungsfähigkeit deutscher Lehrer und deutscher Schüler.
Bemerkenswert sind dabei die Vielfalt und Unterschiedlichkeit der Argumente: So werden von einer Gruppe Kritiker die allgemeinen gesellschaftlichen Bedingungen ("Verdummung", "Spaßgesellschaft") als vermeintlicher Hauptgrund genannt (vgl. Wertheimer 2001), andere verlangen nach „mehr Spaß am Lernen“ (Frigelj 2002), was wiederum andere Kritiker als „Kuschelpädagogik“ abtun (Süddeutsche Zeitung 2001a). Weitere Erklärungsansätze richten sich auf die Struktur der Lehranstalten. Diese wird mit der „erfolgreicher“ Länder verglichen und dabei festgestellt, dass unser mehrgliedriges Schulsystem mit seinem Prinzip der frühzeitigen Selektion und Elitenbildung veraltet ist (vgl. e&w 2001), oder es wird im Gegenteil gerade darauf hingewiesen, dass die Schulorganisation für ein gerechtes und leistungsfähiges Bildungssystem nicht entscheidend ist: „Sowohl die gegliederten Schulsysteme der Schweiz und der Niederlande als auch das Gesamtschulsystem Schwedens führen zu besseren Leistungen als das deutsche.“(Kerstan 2000) Die „Ganztagsschule“ wird immer häufiger als Ausweg

[1] TIMSS – Third International Mathematics and Science Study, PISA – Programme for International Student Assessment, IGLU – Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung

aus der Bildungsmisere betrachtet, da sich bei entsprechenden Berechnungen zeigt, dass die Stundenzahlen der deutschen (Halbtags-)Schüler im internationalen Vergleich recht gering ausfallen (vgl. Süddeutsche Zeitung 2001a).
So vielfältig wie die Ursachenzuschreibungen sind auch die Verbesserungsvorschläge. Es kann und soll aber nicht Ziel dieser Arbeit sein, diese „Reformansätze“ zu referieren - zumal sie zumeist keinen ernstzunehmenden Bezug auf die Ergebnisse der Vergleichsstudien nehmen.

Im Gegenteil: Ob dieser Vielfältigkeit in der öffentlichen Diskussion richtet sich der Blick auf differenziertere Beiträge im Rahmen fachwissenschaftlicher Diskussion. Diese richten sich beispielsweise auf identifizierte Erfolgsrezepte der z.B. bei PISA besser abschneidenden Länder (vgl. DIPF 2003). Die Ausführungen betonen vor allem äußere Kontrollen, wie z.B. schulübergreifende Leistungstests oder nationale Bildungsstandards, als Erfolgsmerkmal der „Gewinnerländer“ (vgl. Czerwenka 2004). Äußere Strukturen können aber, oft kulturell bedingt, nicht einfach auf deutsche Verhältnisse übertragen werden.
So zielt die Suche nach möglichen Ansätzen zur Verbesserung schulischer Leistungen zunehmend auf die Qualität des Unterrichts (vgl. ebenda). Und diese hängt von einer Vielfalt von Kontextbedingungen ab, die sich aufgrund ihrer Heterogenität nur schwer systematisieren lassen (vgl. ebenda). Immerhin zielen die Überlegungen stärker als in der ersten Phase nach Veröffentlichung der Vergleichsstudien auf die im Schulsystem, und dort vor allem im Unterricht als letztlich für die Lernerfolge der Schüler entscheidenden agierenden Personen: Lehrer und Schüler. Die „makrosozialen, kulturellen oder bildungspolitischen Bedingungen schulischer Leistungen bzw. Entwicklungen lassen die grundsätzliche Frage der mikrosozialen Beeinflussung im Sinne einer Schulqualitätsverbesserung aufkommen. Ist Lehrerverhalten als Bedingung und Voraussetzung guten Unterrichts änderbar und durch welche Faktoren?“ (ebenda, S. 9) Diese Frage, in der die didaktische Kompetenz von Lehrkräften in den Mittelpunkt der Betrachtung gerückt wird, lenkt unmittelbar auf zwei Anschlussfragen: Wie lässt sich die Kompetenz von Lehrern im Hinblick auf geplante Unterrichtserfolge gültig beschreiben? Und unterscheidet sich die Kompetenz von Lehrkräften in den verschiedenen Kulturkreisen, über die sich in den großen internationalen Vergleichsstudien Aussagen finden, so dass sich Ansatzpunkte für schulreformerische Maßnahmen herauskristallisieren lassen?

Quasi als Vorgriff auf das Kapitel sei in Bezug auf diese Fragestellungen hier erwähnt, dass anstelle von Untersuchungen zum fachbezogenen professionellen Handeln und zur fachlich-didaktischen Expertise der Lehrkräfte sich ein „weißer Fleck“ auf der Landkarte offenbart. Einzig eine amerikanische Studie von Liping Ma, die in dieser Arbeit noch später differenziert dargestellt wird und auf die sich diese Arbeit auch stützt, betrachtet Lehrerhandeln aus der Perspektive des fachlich-didaktischen Professionswissens.

In dieser Arbeit wird die These vertreten, dass sich an dieser Stelle ein besonderer „Ansatzpunkt“ findet, Unterricht zu verbessern. Das mag zunächst nur für einen Teilausschnitt aus dem Spektrum von Schule und Unterricht gelten: Für den Mathematikunterricht in der vierten Klasse der Grundschule. Aber aus der Beschäftigung mit diesem Teilausschnitt dürften sich Schlussfolgerungen ziehen lassen, die auch für die von den genannten interkulturellen Vergleichsstudien betrachteten Zusammenhänge durchaus Schlussfolgerungen für Gründe und Verbesserungschancen ermöglichen.
Aus der Sicht der einzelnen Lehrkraft dürften ergiebige Antworten auf die Kernfrage zu finden sein: Wie kann ich meinen Unterricht so gestalten, dass möglichst viele Schüler möglichst viel verstehen? Dieser Frage lassen viele Lehrer die kritische Selbstbetrachtung folgen: Bin ich eigentlich in der Lage, meinen Schülern etwas „verständnistief“ zu vermitteln? Verfüge ich als Lehrer über die dazu nötigen Kompetenzen? Habe ich die zu vermittelnden Lerninhalte selbst so tief durchdrungen, dass ich Zusammenhänge darstellen und neues Wissen mit schon vorhandenem verknüpfen kann?

Aus diesen Fragen ergibt sich die folgende Überlegung: Ist, neben vielen verschiedenen Faktoren und Umständen, ein Grund für unser „schlechtes“ Abschneiden in den genannten großen Vergleichsstudien vielleicht auch in dem zu suchen, was man als „Erklärungskompetenz der Lehrkräfte“ bezeichnen kann? Dabei ist unter „Erklärungskompetenz“ immer zweierlei zu verstehen: das auf den Unterrichtsinhalt gerichtete Sachwissen und die auf die sogenannte Vermittlung dieses Unterrichtsinhalts gerichtete Fähigkeit, für den Lernprozess geeignete Methoden auszuwählen und situationsadäquat einzusetzen.
Auf den zweiten – und für viele Pädagogen offenbar entscheidenden – Aspekt richten sich Befunde in den Ergebnissen einer Studie zur Professionalisierung des Lehrerberufs (vgl. Czerwenka/Nölle 2003), die einen signifikanten Unterschied der Qualität methodischer Kompetenz von Lehrkräften verschiedener Bildungssysteme herausarbeitet: Absolventen praxisintegrierender universitärer Studiengänge, die eher dem Schweizer Ausbildungssystem entsprechen, nehmen selbst im Alltagshandeln differenzierter auf theoretische Konzepte Bezug als Absolventen solcher Studiengänge, die wenig Praxisbezüge aufweisen und die von den Autoren als „konventionell“ bezeichnet werden

(vgl. ebenda, S. 35). Diese Ausbildungsform entspricht leider eher der deutschen universitären Lehrerausbildung. Dieser Befund legt nahe, nach einem Zusammenhang zwischen der didaktischen Kompetenz des Lehrers und dem Leistungsstand der von ihm unterrichteten Schüler zu suchen, immer vor Augen führend, dass Schweizer Schüler in den internationalen Vergleichsstudien im Fach Mathematik erheblich besser als ihre deutschen Altersgenossen abgeschnitten haben.
Die Erkenntnisse der Studie zur Professionalisierung des Lehrerwissens sind aufrüttelnd, zeigen sie doch, dass andere Bildungssysteme offenbar im Stande sind, Lehrkräften eine differenziertere Sicht auf ihr eigenes Handeln zu vermitteln. Die Reflexion des eigenen Handelns, die Befähigung zum sach- und schülergerechten Einsatz geeigneter Unterrichtsmethoden als ein Bestandteil der „didaktischen Kompetenz" ist aber nur die eine - wenn auch möglicherweise gewichtigere (vgl. Helmke 2004, S. 59f.) - Seite der Medaille. Profundes Wissen der zu vermittelnden Unterrichtsinhalte fundiert und ergänzt diese methodische Seite und vervollständigt das Professionswissen der Lehrkräfte.
Allerdings: Mit einem profunden Sachwissen mögen zwar gute Voraussetzungen für guten Unterricht geschaffen werden, diese müssen aber ihre Entsprechung in einem angemessenen Methodeneinsatz und ihren „Nährboden" in Schülervoraussetzungen finden, die sich mit Neugier, Interesse, Aufmerksamkeit, Fleiß und nicht zuletzt „Intelligenz" stichwortartig kennzeichnen lassen. Dabei geht es nicht bloß um ein „Vermitteln" von Unterrichtsinhalten in schlicht funktionalem Sinne, mit dem Schüler instand gesetzt werden, bestimmte Verfahren zur Lösung vorgegebener Aufgaben einzusetzen, sondern – so anspruchsvoll dies zunächst klingen mag – um ein tiefes und umfassendes Verständnis, das sie zur selbstständigen Lösung schwierigerer Probleme befähigt.

Aus diesem Plädoyer erwächst die Frage, die dieser Arbeit in ihrem Kern zu Grunde gelegt wird: Wie gut können Lehrkräfte Inhalte vermitteln, indem sie sowohl von ihrer didaktischen als auch fachlichen Expertise Gebrauch machen? Damit wird zugleich ein Beitrag zu der Frage zu leisten gesucht, ob es Kriterien der didaktischen Kompetenz von Lehrkräften gibt, mit deren Optimierung Schülerleistungen – mindestens im Fach Mathematik – spürbar verbessert werden können.

Um es noch einmal prononciert zusammenzufassen: Die Güte einer Erklärung hängt einerseits vom Inhalt, von der Qualität des Gegenstandes ab, der erklärt oder behandelt werden soll, und andererseits von der Art und Weise, in der die Erklärung vorgetragen oder die Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand angebahnt wird. Insofern müssen methodische Kompetenz und fachliche Kompetenz des Lehrers ineinander greifen. Im Mathematikunterricht geht es um die Fähigkeit, Schülern mathematische Zusammenhänge verständlich zu machen und sie in die Lage zu versetzen, Alltagsaufgaben unter Zuhilfenahme mathematischer Regeln zu lösen. Deshalb lässt sich die folgende Untersuchung von der einfachen wie nahezu selbstverständlichen Erkenntnis leiten, dass der „gute“ Lehrer selbst diese mathematischen Zusammenhänge internalisiert hat: Tiefgreifendes Verständnis bewirkt nur, wer es selbst besitzt!

1.2 Konkretisierung und Begründung der Themenwahl

Der Verfasser wurde von grundsätzlichen Überlegungen geleitet, die hier in einer Art Frage-Antwort-Strang verdeutlicht werden sollen.

1. Unsere Gesellschaft erwartet von der Institution Schule die Vermittlung von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten, welche die Schüler „zum Verhalten in der Welt ausstatten“, wie es Saul B. Robinsohn in seinem Plädoyer für eine „erfahrungswissenschaftliche Wende in der Pädagogik“ (Blankertz 1972) einmal prononciert ausgedrückt hat (1967, S. 47). Sie sollen als selbstständig handelnde, freie und lebensalltagskompetente Gesellschaftsmitglieder ihre Zukunft autonom gestalten können (vgl. Harnach-Beck 2003, S. 49). Das dazu notwendige Wissen wird meistens in der Öffentlichkeit mit dem Begriff „Schülerleistungen“ etikettiert.
2. **„Gute“ Schülerleistungen** setzen **„guten“ Unterricht** voraus. So vielfältig „guter“ Unterricht sein mag, so vielfältig sind auch die Vorstellungen davon, worauf es bei der Bewertung „wirklich ankommt“. Was also ist – an nachvollziehbaren und messbaren Kategorien orientiert - „guter Unterricht“?
3. **„Den“ guten Unterricht gibt es nicht**. Zu abhängig ist die Beurteilung von verschiedenen Kriterien und Beobachtungs- bzw. Beurteilungsinstanzen. Dabei werden die Qualitätsanforderungen der Eltern und Kinder in all ihrer Unterschiedlichkeit denn doch auch historisch und kulturell überformt und sind in hohem Maße gesellschaftlichen Strömungen unterworfen (vgl. Harnach-Beck 2003, S. 47 ff.). Es besteht jedoch sehr wohl ein Set an interindividuell gültigen Qualitätsmerkmalen, die an jeden Unterricht angelegt werden, wenn sie auch unterschiedlich gewichtet und bewertet werden und überdies auch stark voneinander abhängen. Unverzichtbare Grundlage guten Unterrichts ist weithin unbestritten das Fachwissen der Lehrkraft. Wann aber ist eine Lehrkraft „Experte“, **wann ist eine Lehrkraft „gut“?**

4. Das Fachwissen einer Lehrkraft beruht nicht allein auf speziellen Kenntnissen über Begriffe, Sachverhalte, Gesetzmäßigkeiten, Regeln und Theorien (wie es Bloom einmal in der Grundstufe seiner Taxonomie kognitiver Lernziele unterschieden hat), sondern auch auf emotionalen, sozialen und motivationalen Aspekten. Die Ausprägung von und Verfügbarkeit über Fachwissen ist schließlich auch eine Frage der Identifikation mit dem Fachinhalt. Wie sollte aus diesem Blickwinkel **„gutes" Fachwissen** beschaffen sein?
5. Lernpsychologische Erkenntnisse belegen, dass Wissen dann als besonders leicht verstanden und nachhaltig eingeprägt wird, wenn es adressatengerecht in bestehendes Wissen integriert, mit den vorhandenen Kenntnissen vernetzt wird (vgl. Ausubel 1974). Dieses so entwickelte Wissen wird in der fachwissenschaftlichen Diskussion unterschiedlich benannt. Die Begriffsbestimmung im Rahmen dieser Arbeit führt zu dem Begriff des „**konzeptuellen Wissens**" („Conceptual Knowledge"), der im Bereich der Primarmathematik vor allem in der Studie von Liping Ma (1999) in aller Deutlichkeit herausgearbeitet wird.
6. Dem konzeptuellen Wissen steht das sogenannte „**verfahrensorientierte Wissen"** gegenüber. Bestimmte Aufgaben können mit Hilfe passender Verfahren gelöst werden, ohne den Aufgabeninhalt und –kontext tatsächlich zu verstehen. Das Ergebnis ist allerdings im Hinblick auf die oben postulierte „Ausstattung zum Verhalten in der Welt" von fragwürdiger Qualität. Daher ist zu fragen, **wie viele Lehrkräfte** an Grundschulen sich auf dieses Konzept verlegen, weil sie wegen mangelnder fachlicher Grundlegung nicht **in der Lage sind, mathematisches Wissen verständnisorientiert zu vermitteln?**
7. Liegt vielleicht in einem fehlenden Bewusstsein für die Vermittlung konzeptuellen Wissens das **mittelmäßige Abschneiden der deutschen Schüler** im internationalen Vergleich, auch und besonders im Fach Mathematik, begründet?

1.3 Entfaltung des Untersuchungsansatzes

In der pädagogischen, psychologischen und mathematikdidaktischen Fachwelt gilt als gesicherte Erkenntnis, dass sich mathematische Inhalte im Rahmen eines verständnisorientierten Unterrichts am besten und nachhaltigsten vermitteln lassen (Jennings/Dunne 1998, Ma 1999, u.a.).
Verständnisorientierter (oder „konzeptueller") Unterricht wird gemeinhin von einem bloß auf die Anwendung von Rechenregeln zielenden „verfahrensorientierten" Unterricht abgegrenzt. Verständnisorientierter Unterricht hat den Aufbau eines entsprechenden konzeptuellen Wissens zum Ziel. Während man sich dieses am besten als „Netzwerk"

aus Regeln, Prozessen und Begriffen vorstellen kann, vermittelt *verfahrensorientierter Unterricht* nur bestimmte Algorithmen, mit denen spezifische Probleme gelöst werden können (s. auch die eingehende Auseinandersetzung mit den beiden Konzepten in Kap. 3). Diese Algorithmen können im Gedächtnis des Schülers unabhängig voneinander gespeichert sein, sind nicht in einer logischen Struktur miteinander verbunden, werden isoliert voneinander abgerufen und funktionieren auch ohne ein Vorverständnis von dem Gegenstand, den sie betreffen.

An dieser Stelle setzt die vom Verfasser durchgeführte empirische Untersuchung an. Sie erfasst beileibe nicht das gesamte Spektrum der in den interkulturellen Vergleichsstudien untersuchten Zusammenhänge, sondern konzentriert sich erstens auf den Grundschulbereich, zweitens auf das Fach Mathematik und drittens auf einen Ausschnitt der beruflichen Handlungskompetenz des Lehrers: das Sachwissen. Dabei untersucht sie zunächst einmal den Ist-Zustand: Wie viele der Lehrkräfte, die in einer Grundschule Mathematik unterrichten, verfügen überhaupt über ein konzeptuelles Verständnis elementarer Mathematik? Was macht „konzeptuelles Verständnis" im Mathematikunterricht der vierten Grundschulklasse aus? Lässt sich ein Zusammenhang zwischen diesem Bestandteil didaktischer Kompetenz der Lehrkräfte und dem mathematischen Verständnis ihrer Schüler nachweisen, ausgehend von der These, dass nur ein hinreichend methodisch *und* fachlich beschlagener Lehrer, der sich mit den Inhalten des Mathematikunterrichts auskennt und identifiziert, in der Lage ist, bei seinen Schülern – einen verständnisorientierten Unterricht unterstellt – ein vertieftes mathematisches Verständnis zu erreichen. Die Brücke zu PISA, TIMMS und IGLU wird durch die Frage geschlagen, wie es ermöglicht werden kann, den Rückstand, der auch im Fach Mathematik bei deutschen Schülern gegenüber ihren europäischen Altersgenossen aufgedeckt geworden ist, möglichst bald und umfassend zu schließen.

Um Aufschluss über das Fachwissen der Lehrkräfte zu erlangen, wurden diesen fiktive Unterrichtssituationen, „Szenarien", vorgestellt, die sie im Rahmen eines Interviews reflektieren sollten. Diese Situationen sind einer Studie aus den USA entnommen, die zum Ziel hatte, das fachmathematische Wissen chinesischer und US-amerikanischer Lehrkräfte zu vergleichen (vgl. Ma 1999).
Ma entwickelte vier Szenarien, die auf der einen Seite leicht verständlich sind, auf der anderen Seite dem Befragten aber die Möglichkeit geben, das einen mathematischen Begriff umgebende, engmaschig geknüpfte Netz zu referieren – was allerdings nur möglich ist, wenn eine entsprechende Tiefe des inhaltlichen Verständnisses vorliegt,

welches dann in den Ausführungen der Befragten offenbar würde (vgl. auch Kapitel 3.5 und 5.4).
Solche fiktiven, gleichwohl validen Situationen zu entwickeln, bedarf umfangreicher konzeptionell-empirischer Untersuchung, selbst alternative und zugleich optimale Fragestellungen zu entwickeln wäre für den Verfasser kaum möglich und letztlich auch nicht sinnvoll gewesen. Drei der vier Szenarien wurden daher vom Verfasser übernommen, auf das vierte wurde aus organisatorischen Gründen verzichtet.
Die Übernahme der drei Szenarien hatte noch weitere Gründe. Sie erschienen – auch weil ein interkultureller Vergleich angestrebt wurde – sehr geeignet, die Herangehensweise einer Lehrkraft an eine mathematische Problemstellung mit zu erfassen. Schließlich sprach für eine Übernahme der von Ma ausgearbeiteten Szenarien, dass sie sich bereits als untersuchungstauglich erwiesen hatten. Von der ursprünglichen Absicht, „eigene“ Unterrichtsszenarien zu konstruieren und in der Untersuchung einzusetzen, wurde deshalb aus all diesen Gründen Abstand genommen.

Diese Entscheidung brachte zugleich den Vorteil, dass sich die in der eigenen Untersuchung erhobenen Antworten der Lehrkräfte mit den Ergebnissen aus den USA und China, also einem anderen Kulturkreis mit unterschiedlichem Lehrerausbildungssystem, vergleichen ließen. Wie in der Studie von Ma wurde die Befragung der Lehrkräfte über die Landesgrenzen hinaus ausgeweitet: Eine Gruppe von Lehrkräften aus dem Schweizer Kanton Zürich wurde mit den gleichen Unterrichtsszenarien konfrontiert wie ihre Hamburger Kollegen. Diese Erhebung sollte Antworten ermöglichen zu der Frage, ob sich das profunde Wissen elementarer Mathematik von Lehrkräften innerhalb verschiedener Kulturkreise, eventuell sogar innereuropäisch, voneinander unterscheidet (und damit auch einen weiteren Grund für das schwache Abschneiden deutscher Schüler in den internationalen Vergleichsstudien beisteuert).

Anschließend an die Befragung der Lehrkräfte wurde in einem nächsten Schritt in 39 der 41 betreffenden Hamburger Klassen[2] ein Schulleistungstest eingesetzt. Wenn auch eingeräumt werden muss, dass die Leistung von Schülern von diversen Faktoren abhängt, die in dieser Untersuchung aus Gründen der Komplexitätsreduktion ceteribus paribus gesetzt werden mussten (gesellschaftliches und soziales Umfeld, Klassenmanagement, Größe der Klasse, methodisches Repertoire der Lehrer etc.), war doch davon auszugehen, dass sich ein – wenn auch schwach ausgeprägter - Zusammenhang

[2] Zwei Lehrkräfte lehnten eine Teilnahme ihrer Schüler an den Schulleistungstests ab. Die ursprünglich ebenfalls vorgesehene Testung der Schweizer Schüler musste aus finanziellen und zeitlichen Gründen entfallen.

zwischen den Leistungen der Schüler[3] und den mathematisch-fachlichen Kenntnissen der Lehrkräfte nachweisen ließe.

Sollte sich bestätigen, dass – wie vermutet – der größere Teil der Lehrkräfte, die an Hamburger Grundschulen Mathematik unterrichten, keine universitäre Ausbildung in diesem Fach erhalten hat, war die Frage aufzuwerfen, ob sie dieses Defizit auf andere Weise – etwa über Fortbildungen oder Selbststudium – zu kompensieren in der Lage waren. Dabei wurde unterstellt, dass Lehrkräfte ihr Wissen und ihre Erklärungsansätze auch den für den Mathematikunterricht verfassten Lehrwerke begleitenden Handbüchern entnehmen. Daher wurde in den Interviews auch danach gefragt, welche Lehrwerke von ihnen eingesetzt werden.

Nun kann man nicht davon ausgehen, dass die Lektüre von Unterrichtsbüchern einschließlich der darin erteilten methodischen Ratschläge ein Äquivalent zu einer grundständigen Ausbildung mit Fakultas Mathematik zu bieten vermag. Bestenfalls dürfte sie einen kleinen, aber nicht unerheblichen Beitrag zur Vertiefung des Sachwissens leisten. Deshalb wurde die Untersuchung der Lehrwerke auf eine angemessene Auswahl und den hier betrachteten Inhaltskomplex beschränkt. Sie richtet sich auf das Thema "Schriftliche Subtraktion", deren Algorithmus auf einen großen Bereich elementarer Mathematik zurückgreift, und legt eine nicht-repräsentative Auswahl von immerhin 11 einschlägigen Lehrwerken zugrunde.

1.4 Aufbau der Arbeit

Die eigene Untersuchung richtet sich auf die Frage, über welches Fachwissen an der Grundschule im Fach Mathematik unterrichtende Lehrer verfügen, auch im Vergleich mit ihren Schweizer Kollegen. Ihrer Begründung, ihrer Anlage, den Durchführungs- und Auswertungsmodalitäten ist das Kapitel 5 gewidmet; ihre Ergebnisse werden in Kapitel 6 dargestellt und interpretiert. Schwerpunkte bilden hierbei die Gegenüberstellung der Antworten der Lehrkräfte aus Hamburg und der Schweiz in Bezug auf drei fiktive Unterrichtssituationen sowie die Auswirkung sogenannten verständnisorientierten Unterrichts auf die mathematische Leistungsfähigkeit der Schüler.

[3] Wenn im Folgenden von Schülern gesprochen wird, soll dieser Begriff für beide Geschlechter gelten. Wenn allerdings die Geschlechtszugehörigkeit Gegenstand der Ausführungen ist, wird auch sprachlich differenziert.

Die eigene Untersuchung stellt fraglos den Kern dieser Arbeit dar. Sie ist in den Kontext der Suche nach Antworten auf die Frage nach den Gründen für das schlechte Abschneiden deutscher Schüler in internationalen Vergleichsstudien eingebettet und sucht nach Möglichkeiten, die Schülerleistungen zu verbessern. Die Kapitel 2 bis 4 verstehen sich mithin als Hinführung auf und Begründung für die eigene Untersuchung.

In den Vergleichsstudien wurde bekanntlich die Ergebnisqualität von Unterricht gemessen. Ergebnisqualität ist einerseits abhängig von der Prozessqualität, der Art und Weise, in der Unterricht gestaltet wird, andererseits auch von der Qualität der Strukturen, in denen und mit denen Unterricht gestaltet werden kann. Es liegt auf der Hand: „Gute“ Rahmenbedingungen ermöglichen und fördern, „guter“ Unterricht ermöglicht und bewirkt „gute“ Schülerleistungen. Was aber konstituiert das Konstrukt „guter Unterricht“? Dieser Frage widmet sich das Kapitel 2. Dazu werden einschlägige empirische Untersuchungen diskutiert.

Erstaunlicherweise betonen die meisten Studien die Notwendigkeit einer guten Wissensbasis der Lehrkräfte, welche neben dem Fachwissen diverse andere Kenntnisse (Unterrichtswissen, Klassenführungswissen, methodisches Wissen, diagnostisches Wissen etc.) umfasst, ein gutes Fachwissen jedoch immer als Basis versteht – ohne dabei diese näher zu spezifizieren.

Eine Ausnahme bildet hier eine Studie von Ma (1999), die sich mit dem tiefgehenden Verständnis elementarer Mathematik von Grundschullehrkräften in China und den USA beschäftigt und anhand einer qualitativen Untersuchung ein "Profound Understanding of Fundamental Mathematics" (PUFM) herausarbeitet. Sie steht im Mittelpunkt des Kapitels 3, das sich dem Konzept des „verständnisorientierten Unterrichts“ zuwendet. Das Kapitel 3 ist insgesamt lerntheoretischen Überlegungen und Erkenntnissen vorbehalten, um daran die Bedeutung des Fachwissens für den Grundschul-Mathematiklehrer herauszuarbeiten. Betrachtet man dieses Fachwissen als wesentliches Merkmal der Strukturqualität – hier wird auf die personale Seite der Strukturqualität unter Ausblendung sachlicher und organisatorischer Voraussetzungen abgehoben und die methodische Kompetenz ebenso wie das Konstrukt „Lehrerpersönlichkeit“ bewusst ausgeblendet – , dann mögen sich in den herangezogenen Lerntheorien Hinweise finden, in welcher Art und Weise Fachwissen in der Unterrichtsgestaltung zur Wirkung gebracht werden kann. Dabei soll dem konzeptionellen Wissen (Conceptual Knowledge), das die Grundlage des PUFM bildet und damit als methodische Basis für einen "guten"

Mathematikunterricht angesehen werden kann, besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Kapitel 4 ist der fachwissenschaftlichen Betrachtung gewidmet. Es wird ein Einblick in verschiedene Erklärungsansätze der schriftlichen Rechenverfahren der Subtraktion und Multiplikation gegeben, Vor- und Nachteile verschiedener Verfahren werden diskutiert; an einem Beispiel aus der Geometrie, Flächeninhaltsberechnung eines Rechtecks, wird die mit „Profound Understanding of Fundamental Mathematics“ einhergehende systematische Herangehensweise an bislang unbekannte Problemstellungen geschildert. Damit wird zugleich die inhaltliche Basis für die Befragung der Lehrer gelegt.

Die Qualität von Erklärungshilfen in lehrwerksbegleitenden methodisch-didaktischen Kommentaren, mit ausschlaggebend für die fachwissenschaftliche Kompetenz der Mathematiklehrer, wird in Kapitel 7 untersucht, sozusagen im Nachgang zur Aufdeckung möglicher Defizite, die aus einer fehlenden Fakultas für das Fach Mathematik resultieren.

Kapitel 8 soll die gesammelten Erkenntnisse noch einmal vor Augen führen; dabei wird es einerseits um eine Differenzierung der in den internationalen Untersuchungen zum Ausdruck gebrachten Befunde im Hinblick auf den Mathematikunterricht an Hamburger Grundschulen gehen; andererseits werden die in den Vergleichserhebungen ermittelten Ergebnisse einer kritischen Analyse anhand der eigenen Befunde unterzogen. Schlussfolgerungen für die Lehreraus- und -weiterbildung werden abschließend diskutiert.

Im Rahmen dieser Arbeit bezieht der Verfasser Forschungsgebiete ein, deren Umfang und Komplexität jeweils für sich genommen eine eigene, auf das jeweilige wissenschaftliche Feld begrenzte Studie rechtfertigte. Andererseits kommt eine Untersuchung wie die hier durchgeführte nicht umhin, der Pädagogik angrenzende wissenschaftliche Gebiete in die theoretische Grundlegung einzubeziehen. Die zur Zeit durch PISA und PIRLS[4] (IGLU) besonders angeregte wissenschaftliche Diskussion ausführlich und detailliert nachzuzeichnen, stellt schon eine für sich genommen ausgesprochen umfängliche Arbeit dar. Auch Bereiche wie die pädagogische Psychologie, Lernpsychologie und die immerwährende fachdidaktische Diskussion um „den guten Lehrer“ werden hier nur insofern ausgeschöpft, als sie eine Basis liefern für den Untersuchungskern:

[4] PIRLS - Progress in International Reading Literacy Study

das „Profound Understanding of Fundamental Mathematics“ von Mathematiklehrern der Grundschule und seine Bedeutung für die Schülerleistungen.

2 Das Konstrukt „Guter Unterricht“ als unabhängige Variable der Schülerleistung

In seinen Ausführungen über Unterrichtsqualität resümiert Helmke, dass es „den“ guten Unterricht nicht gibt und nicht geben kann (vgl. Helmke 2004, S. 46ff). Zu unterschiedlich sind allein die möglichen Lernziele verschiedener Fachdisziplinen oder Unterrichtsschwerpunkte: Soll spezifisches Fachwissen vermittelt, soziales Lernen verfolgt oder sollen Lernstrategien vermittelt werden? Ist die Lerngruppe intrinsisch motiviert und mutig-progressiv oder eher zurückhaltend und bedarf konkreter Handlungsanleitungen und -anweisungen? Und wie ist die „Tagesform“ der Lerngruppe? Was an einem Tag als „richtig“ erscheint und „gut“ funktioniert, kann schon zu einem späteren Zeitpunkt keine wirksame Lösung mehr sein. Darüber hinaus stellt sich die Frage, von wem Unterricht eigentlich valide beurteilt werden kann. Seminarleiter orientieren sich an anderen Beurteilungskriterien und Maßstäben als z.B. Eltern oder Schüler.
Unterricht stellt immer nur einen Ausschnitt aus einem Set pädagogischer Einwirkungen auf die Schüler dar. Es ist bekannt, dass außerschulische Faktoren wie Elternhaus, soziales Umfeld, Fördermöglichkeiten außerhalb der Schule und anderes eine wesentliche Rolle für das Lernverhalten spielen (Harnach-Beck 2003, S. 61ff) und deshalb einen starken Einfluss auf den Unterrichtserfolg ausüben. Helmke skizziert das Zusammenwirken aller Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen in einem „Makromodell“ (Helmke 2004, S. 34):

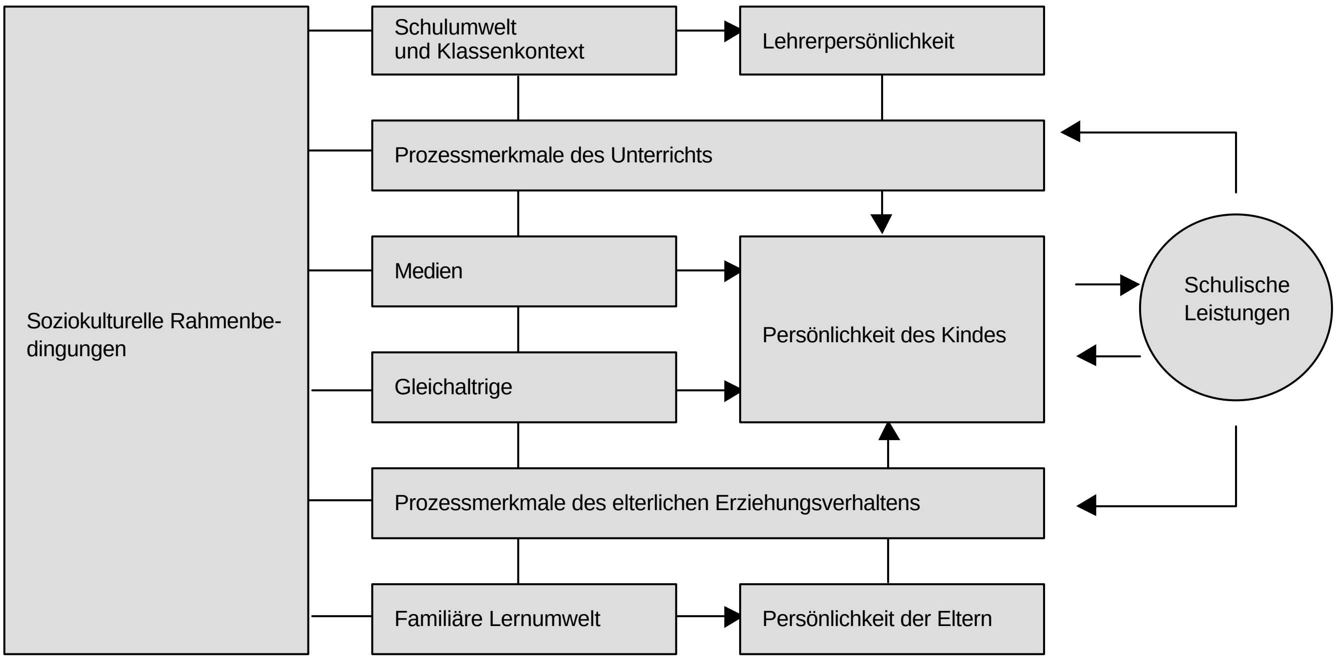


Abb. 1: Makromodell des Zusammenwirkens aller Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen (vgl. Helmke 2004, S. 34)

Insofern ist es nicht vertretbar, die Verantwortung für die schulischen Leistungen samt und sonders der Schule und ihren Lehrern zuzuschreiben.

Doch ist nicht zu übersehen, welch gewichtigen Anteil „Unterricht“ an schulischen Leistungen hat. Eng mit den genutzten Medien, der Lehrerpersönlichkeit, der Schulumwelt und dem Klassenkontext verknüpft, stellt er quasi eine Hälfte der von Helmke skizzierten Bedingungsfaktoren dar: die Basis schulischen Lernens. Hängt dieses schulische Lernen auch von - wie im Makromodell erkennbar - diversen außerschulischen und motivationalen Faktoren ab, so wird gleichermaßen deutlich, dass nur ein „gut angebotener“ Unterricht von den Schülern effizient genutzt werden kann. Auch hierzu sei ein Modell Helmkes referiert, das Wirkungsweisen von Unterricht umfassend darstellt:

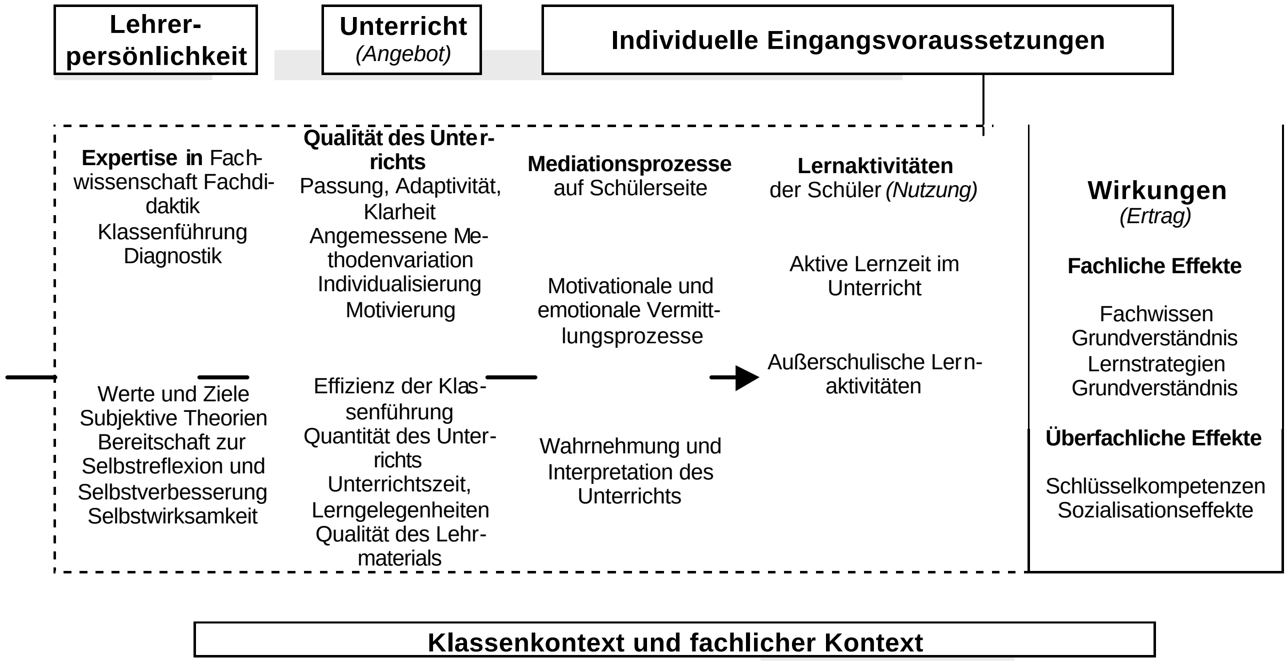


Abb. 2: Wirkungsweisen von Unterricht, Helmke 2004, S. 42

„Der von der Lehrperson durchgeführte Unterricht repräsentiert in seiner Gesamtheit ein Angebot, das nicht notwendigerweise direkt zu den Wirkungen ... führt, sondern dessen Wirksamkeit von zweierlei Typen von vermittelnden Prozessen auf Schülerseite abhängt: (1) davon, ob und wie Erwartungen der Lehrkraft und unterrichtliche Maßnahmen von den Schülerinnen und Schülern überhaupt wahrgenommen und wie sie interpretiert werden und (2) ob und zu welchen motivationalen,

> *emotionalen und volitionalen Prozessen sie auf Schülerseite führen. ... Mit anderen Worten: Unterricht ist lediglich ein Angebot; ob und wie effizient dieses Angebot genutzt wird, hängt von einer Vielzahl dazwischenliegender Faktoren ab.“ (Helmke 2004, S. 41)*

Modell und Ausführungen Helmkes führen die Wirkungsrichtung der Faktoren, die „Unterricht“ bestimmen, deutlich vor Augen. So steht „am Anfang“ des Wirkungsflechtwerks die Lehrerpersönlichkeit.

> *„Von primärer Bedeutung ist die unterrichtsrelevante Expertise, d.h. die fachwissenschaftliche und fachdidaktische Expertise, ergänzt um die Expertise in den Bereichen Klassenführung und Diagnostik.“ (ebenda, S. 42)*

Von der Lehrkraft unmittelbar beeinflusst, da entschieden und ausgewählt, sind

> *„...diejenigen Prinzipien und Merkmale, die für den Unterrichtserfolg ausschlaggebend sind, d.h. neben dem übergeordneten Universalprinzip der Passung: Klarheit, schüler-, fach- und situationsangemessene Variation, didaktische Methoden, sensibler Umgang mit Heterogenität und Individualisierung und Motivierung. Den zweiten Block bildet die Effizienz der Klassenführung, gefolgt von der Unterrichtsquantität und der oft übersehenen und unterschätzten Qualität des Lehrmaterials.“ (ebenda, S. 40)*

Betrachtet man den Unterricht und die vorangestellte Lehrerexpertise in Hinblick auf das dargestellte Wirkungsmodell, in dem schulische Leistungen zwar von diversen äußeren Einflüssen abhängen, jedoch auf dem Kernbestandteil - Unterricht - aufbauen, so wird auch deutlich, warum die Lehrkraft so oft in den Mittelpunkt von Veränderungsbestrebungen, Verbesserungsvorschlägen oder Reformen unseres Schulwesens rückt. Sie ist zentraler Bestandteil und „Lenker“ dessen, was im Klassenraum geschieht. Da liegt es nahe, die Einstellung und den Erfahrungshintergrund der Lehrer zum Ansatzpunkt einer eigenen Untersuchung zu nehmen, um sozusagen aus der Selbstbeschreibung der handelnden Person Tendenzen ihrer Erfahrungskompetenz als Gütemerkmal der Prozessqualität von Unterricht ablesen zu können.

2.1 *Die Bedeutung des Lehrers für die Schülerleistung in der wissenschaftlichen Diskussion*

Die Rolle der Lehrkraft für ein erfolgreiches Lernen der Schüler wird in einer schon lange anhaltenden wissenschaftlichen Kontroverse diskutiert. Ist auch, wie im Vorangegangenen dargestellt, eine unkomplizierte, allgemein gültige Definition des „richtigen", „guten" Unterrichts nicht möglich, so wird doch sehr wohl deutlich, dass es Qualitätsprinzipien des Unterrichts gibt, die „unbedingt und fraglos gültig sind" (Helmke 2004, S. 47). Eben damit verbunden sind „wohlbegründete Standards des Lehrerverhaltens und es gibt wichtige Merkmale von Expertise, über die man sich weitestgehend einig ist." (ebenda, S. 47)

Diese detailliert darzustellen soll und kann aber nicht das Ziel dieser Arbeit sein. Es gibt eine Reihe von Werken, die sich hiermit beschäftigen und deren Fokussierung allein schon ein eigenständiges und aufwändiges Projekt bedeutete. Es sei daher an dieser Stelle auf entsprechende Schriften verwiesen, mit deren Hilfe man einen ausführlichen, detaillierten, objektiven und metaanalytischen Überblick über den „state of the art" gewinnt. (Wellenreuther 2004, Helmke 2004, Weinert/Helmke 1996, Brophy & Good in: Wittrock 1986, Ditton In: Helmke u.a. 2000, Haenisch 2000 u.a.)

Im Folgenden soll dem Leser nur grob und aufrissartig verdeutlicht und der Leser dafür sensibilisiert werden, (1) welche Rolle die Lehrkraft in der fachwissenschaftlichen Diskussion für das Produkt „gute Schülerleistungen" spielt und (2) wie im Rahmen dieser Diskussion die fachliche Qualifikation von Lehrkräften zwar genannt, jedoch meistens nicht explizit definiert wird.

Dass im Mittelpunkt von Unterricht stets die Lehrkraft steht - sei es nun in der Auswahl der geeigneten Medien, der „richtigen" Lernarrangements oder der passenden Methodik - bringt Grell (2000, S. 45) in zwei Sätzen auf den Punkt: „Unterrichtskonzeptionen und didaktische Modelle können leider nicht selbst unterrichten. Das können nur kompetente Lehrerinnen und Lehrer."

Wiechmann (2000, S. 17) vermerkt, dass ein ausschließlich belehrender Unterricht in der Schulrealität ebenso wenig denkbar ist wie ein rein entdeckender. Ein völlig gelenkter Unterricht sei ebenso unrealistisch wie das völlig autonome Lernen. Effektiver Unterricht hängt ab von der didaktisch begründeten Wahl der jeweils besten Unterrichtsmethode - diese Wahl wiederum erfordert eine Kenntnis der spezifischen Leistungsfähigkeit der verschiedenen Unterrichtsmethoden. Schon länger ist bekannt, dass die Fokussierung auf eine bestimmte, als besonders ergiebig eingeschätzte Methode (beispielsweise der Fallmethode (vgl. Kaiser 1972) oder der Projektmethode (vgl. Frey 1991, Gudjons 1994) unter Ausschluss oder Vernachlässigung anderer Methoden nur

über eine kurze Distanz Erfolg haben können, eine vernünftige, der Lerngruppe angemessene Mischform langfristig die größten Lernerfolge verspricht (vgl. Wellenreuther 2004, S. 330). Jede Betrachtung von Unterricht, die Methodenvielfalt und die richtige Wahl einer geeigneten Methode zur Mitbedingung von „effektivem“ Unterricht macht, fokussiert automatisch auch die Notwendigkeit einer fachlichen und didaktischen Expertise von Lehrkräften, die ja die Methodik gemäß dem zu unterrichtenden Stoff und der Lerngruppe auswählen müssen.
Andere Autoren sehen Zusammenhänge zwischen erfolgreichem Lernen und systematischem Erwerb des notwendigen Wissens und Könnens, führen also vor allem extrinsische Gründe in Hinblick auf die sogenannte „Paukschule“ an (Ericsson/Charness 1994). Doch auch innerhalb dieses Begründungsansatzes nimmt die *Lehrkraft* einen wesentlichen und zentralen Platz ein.

Es bleibt die Frage, ob ein effektives System von didaktischen Strategien, Unterrichtsmethoden und einzelnen Lernsteuerungen oder die Person des Lehrers (s.o.) einen stärkeren Einfluss auf den Schüler ausüben. Keine dieser Fragen ist bisher in wissenschaftlich befriedigender Weise entschieden (vgl. Weinert/Helmke 1996). Doch sieht man einmal von Ausnahmen wie z.B. Gardner (1993) ab, der eine Abhängigkeit der Wirksamkeit des Lernens von den spontanen Interessen der Schüler und den davon abhängigen Einfällen, Ansichten und Verständnisleistungen konstruiert, so ist die zentrale Bedeutung der Lehrkraft als Schlüssel zu „gutem“ oder „qualitativ hochwertigem“ Unterricht nicht zu übersehen.

Gleich, welcher Ansatz gewählt wird, der Fokus auf „Unterricht“ und „Lehrkraft“ bleibt bestehen, ebenso eine offensichtliche Untrennbarkeit dieser beiden Kriterien. In allen dem Verfasser bekannten Abhandlungen, Forschungsberichten und Artikeln geht „guter Unterricht“ einher mit der Figur des „guten Lehrers“ (vgl. hier vor allem Weinert/Helmke 1996 und die darin enthaltene Literatur). Diese zentrale Position von Unterricht soll daher im folgenden Kapitel näher betrachtet werden.

2.2 *Der „gute“ Lehrer als wissenschaftlich definiertes Kategorienbündel*

In den vorangegangenen Abschnitten wurde aufgezeigt, dass die Qualität von Unterricht von verschiedensten Faktoren abhängig ist, in besonderer Weise jedoch von der den Unterricht gestaltenden Person, der Lehrkraft. Es ist deutlich geworden, dass guter Unterricht zu einem solchen erklärt wird, wenn die vorher festgelegten Lernziele effektiv erreicht worden sind. Dies zu organisieren, ist Aufgabe der Lehrkraft. Von ihrem

Expertenwissen und ihrer Persönlichkeit hängt ab, ob und wie eine Lerngruppe ein Ziel erreicht. Wenn sie „gut" ist, werden die Ziele schnell und effektiv erreicht und somit auch im Nachhinein ihr Unterricht als qualitativ hochwertig bezeichnet. Doch über welches Wissen und welche Eigenschaften muss eine Lehrkraft nun tatsächlich verfügen, um „guten" Unterricht gestalten zu können?

„Was unter einem guten oder schlechten Lehrer zu verstehen ist, kann im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden", bemerkt Prange (in Schwarz/Prange 1997, S. 14f). Dies ist von ihm jedoch nicht ohne eine Spur Kritik gedacht: Jeder von uns „kennt" „gute" und „schlechte" Lehrer, schließlich ist jeder von uns einmal zur Schule gegangen. Spezifische Merkmale zu nennen, wird jedoch schon schwieriger.
Kriterien zur Beurteilung von Lehrerleistungen liegen zwar vor, sind aber meistens abhängig vom subjektiven Urteilsvermögen eines Einzelnen (z.B. Regierungsschuldirektor oder Schulleiter). Ein Beispiel findet sich bei Haenisch (1983, S. 17f.), der Verhaltensweisen von Lehrern im Unterricht, die sich als „effektiv" gezeigt haben, zusammenfasst. Ein Auszug mag das belegen:

- *„auf Ideen der Schüler einzugehen und sie beispielsweise durch Wiederholen, Aufgreifen oder Umformulieren für den Unterricht fruchtbar zu machen;*
- *eher stimulierend, lebhaft, begeisternd, engagiert und interessiert zu sein;*
- *bei der Präsentation von Stoffen stets Klarheit als oberstes Prinzip gelten zu lassen und dabei auf klare Erklärungen, leichte Verständlichkeit der Äußerungen sowie auf das richtige Anforderungsniveau zu achten; ..."*

Die Beurteilung, ob eine Idee eines Schülers durch eine Umformulierung für den Unterricht fruchtbar gemacht worden ist, ob der Lehrer eher stimulierend wirkt u.s.w. obliegt dem persönlichen Eindruck des Beurteilenden. Kriterien dieser Art dürften denn auch eher zu Beurteilungen „aus dem Bauch heraus" (ver)führen: Wann ist eine Erklärung klar und leicht verständlich? Wenn die Schüler alles oder nur einen Teil verstanden haben? Wie groß müsste dieser Teil sein? Und wie überprüfe ich in der Kürze der Zeit, ob, was und wie viel verstanden worden ist? Was bedeutet „*eher*" lebhaft?

Nach einer Megaanalyse von Fraser u.a. handelt es sich bei einem erfolgreichen Pädagogen um einen

> *„gut ausgebildeten Lehrer mit geschickter Fragetechnik und hoher Leistungserwartung, der einen wohlgeplanten und streng organisierten Unterricht hält, das aufgabenbezogene Verhalten der Schüler sicherstellt, viel bekräf-*

tigt, das zielerreichende Lernen betont, tutorielle Hilfen gibt und diagnostisches Feedback anbietet." (Fraser/Walberg/Welch/Hattie 1987)

Weinert und Helmke (1996) entwerfen ein Bild vom „guten" Lehrer, das sich durch verschiedene Qualitätsmerkmale auszeichnet. Diese sind stärker auf die zielgerichtete Orientierung, Steuerung und Unterstützung der Lernenden und weniger auf den emotionalen Gehalt der sozialen Interaktion im Klassenzimmer gerichtet. Diese Erkenntnis entnehmen Weinert und Helmke den Ergebnissen der von ihnen durchgeführten SCHOLASTIK[5]-Studie. In dieser Studie betrachten sie fünf Zieldimensionen des Unterrichts: (1) die durchschnittlichen Leistungszuwächse der Klassen in arithmetischen Fertigkeiten und (2) im mathematischen Problemlösen, (3) die Verringerung der Leistungsunterschiede zwischen den Schülern einer Klasse, (4) die Veränderung der Lernfreude in Mathematik und (5) das Selbstbild eigener Fähigkeit für dieses Fachgebiet (vgl. Weinert/Helmke 1996).

In einer die SCHOLASTIK-Studie ergänzenden Untersuchung von Lingelbach (1995) wurden bei einem Teil der erfolgreichen Lehrkräfte zusätzliche Informationen über ihr pädagogisches Expertenwissen und über spezielle unterrichtliche Kompetenzen erhoben. Eine Analyse der gewonnenen Daten spricht dafür, dass starke Ausprägungen der Wissens- und Handlungskompetenz von Lehrkräften günstige Voraussetzungen für hohe Leistungssteigerungen in Arithmetik und im mathematischen Problemlösen sind. Weinert und Helmke resümieren entsprechend,

„ dass der gute Lehrer deshalb so erfolgreich ist, weil er über eine besondere Qualität professionellen Wissens und Könnens verfügt. Es spricht vieles gegen die traditionelle, auch heute noch oft vertretene Auffassung, dass „der Lehrer mehr durch das (erzieht), was er ist, als durch das, was er weiß und tut" (Lange, 1895, S. 17. In: Weinert/Helmke 1996, S. 232)

1994 führte Bessoth eine Befragung von Schülern an 251 Klassen aller Schularten durch (1994). Er entwickelte hierfür ein „Unterrichts-Klima-Instrument", mit Hilfe dessen sich zehn verschiedene Aspekte des Unterrichts erfassen ließen. Dazu zählten sechs sogenannte „Lehrerfaktoren": Unterstützung des Lernens der Schüler, Konzentration auf das Lernen, Ordnung und Organisation, Klarheit der Regeln, Wertschätzung der Schüler durch den Lehrer, Abwechslung und Mitwirkung der Schüler im Unterricht.

[5] Schulorganisierte Lernangebote und Sozialisation von Talenten, Interessen und Kompetenzen

Die Reihe von Umschreibungen, Definitionsversuchen und Aufzählungen wichtiger Erkenntnisse der pädagogisch-psychologischen Forschung zu Merkmalen „des“ guten Lehrers ließe sich noch lange fortführen[6]. Wie jedoch schon zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt, wäre eine detaillierte Darstellung aller Untersuchungen unter dem Aspekt „guter“ Lehrer dem Rahmen dieser Arbeit nicht angemessen. Die Schriften und Untersuchungen auf diesem Gebiet sind so umfangreich, dass schon längst Meta- und sogar Megaanalysen (Meta-Meta-Analysen, s.o. Fraser u.a.) bestehen. Waxman und Walberg (1982) z.B. ordnen die Befunde einer Art Metaanalyse nach den zentralen Kategorien „cognitive cues“, „student engagement“, „reinforcement“ und „management and climate“.
Als übereinstimmende Merkmale schälen sich in den untersuchten Studien heraus: Die Bedeutung der Stimulation des Lernens durch die Lehrkraft, die Zeit, die die Schüler aktiv im Unterricht mitarbeiten, die Verstärkung der Schüler durch Rückmeldungen und wertende Stellungnahmen des Lehrers und schließlich die Art und Weise, wie ein Lehrer die Klasse führt, und die „klimatischen“ Rahmenbedingungen, die sich daraus ergeben.

Als „state of the art“ (Helmke 2004, S. 62) gilt noch immer die von Brophy & Good (1986) erstellte 23 Punkte umfassende Zusammenfassung des Ertrags der internationalen Forschung zur Lehrerwirksamkeit. Eine Aufteilung der 23 Punkte in vier Kategorien (Quantity and Pacing of Instruction, Active Teaching, Questioning the Students, Reaction to Students Reponses) lässt die in allen Untersuchungen und Schriften erkennbare Schwerpunktsetzung klar erkennen: Es erscheint bemerkenswert, dass sich keine der bis hierhin genannten Evaluationen mit dem Fachwissen der Lehrkräfte beschäftigt hat, sondern sich alle weitestgehend auf **Verhaltensweisen** beschränken:

> *„In their necessary simplification of the complexities of classroom teaching, investigators ignored one central aspect of classroom life: the subject matter.” (*Shulman 1986, S. 6)

[6] vgl. auch Weinert/Schrader/Helmke 1989 und 1990, Helmke 2003, Wellenreuther 2004, Bromme 1992, Gage/Needles 1989, Shulman 1986 und 1987, Doyle 1977, Gage 1984, Fraser/Walberg/Welch/Hattie 1987, Brophy/Evertson 1974, Rutter 1983, Lesgold 1984, Kounin 1976, Evertson/Emmer/Sanford/Clements 1983, u.a.

Dies steht in erheblichem Kontrast zur Ausbildung der Lehrer, in der der fachwissenschaftliche Anteil eher überdimensioniert ist.[7] Mit Recht kritisiert deshalb Schwarz (1997, S. 86f.):

> *„Grundlegende Voraussetzung jeder Lehrerbeurteilung ist, dass für Lehrer genauso wie für Inhaber eines anderen Berufs und jeder anderen Tätigkeit gewisse Standards vorausgesetzt, bestimmte Fähigkeiten und Fertigkeiten, Minimalkompetenzen angenommen werden können, die für die Erfüllung grundlegender Anforderungen oder allgemeiner für berufliche Bewährung überhaupt wenn nicht hinreichende, so doch wenigstens notwendige Bedingung sind."*

In einer von Czerwenka u.a. 1990 durchgeführten Schülerbefragung haben die Autoren die Aussagen von Schülern unter Fragestellungen festgehalten, die diesmal auch das fachliche Wissen der Lehrkräfte mit einschließen und somit über die bloße Betrachtung der methodischen Fähigkeiten hinausgehen:

- *„Wird etwas über das fachliche* Wissen *der Lehrkräfte gesagt?*
- *Wird über die* Gerechtigkeit *von Lehrerinnen und Lehrern gesprochen?*
- *Gibt es Äußerungen über den* Fleiß *von Lehrkräften?*
- *Schreiben die Schülerinnen und Schüler etwas über das* methodische Können *ihrer Lehrer und Lehrerinnen?*
- *Gibt es schließlich Äußerungen zum* Unterrichts- und Erziehungsstil *der Lehrkräfte?" (Czerwenka u.a. 1990, S. 125)*

Die Untersuchung betrachtet mit der ersten Fragestellung das „fachliche Wissen", zeigt aber auch, dass die Schüler bei der Bewertung ihrer Lehrkräfte ihren Fokus nicht auf das fachliche Wissen richten: Von insgesamt 1212 Aufsätzen befragter Schüler fanden sich nur in 65 Aussagen zum fachlichen Wissen, davon 40 positive und 21 negative, sowie vier, die sowohl positive als auch negative Anmerkungen enthielten. Die meisten Aussagen bezogen sich auf den Unterrichts- und Erziehungsstil (509), gefolgt von 227 Aussagen zum methodischen Können.

Wie schon von Schwarz (1997) angedeutet, ist das Wissen über den Unterrichtsgegenstand eine „Eigenschaft" von „guten" Lehrern, die schlicht und einfach als selbst-

[7] So legte beispielsweise die Kultusministerkonferenz im Jahre 1973 fest, dass die Anteile Fachwissenschaft zu Fachdidaktik und Erziehungswissenschaft im Lehrerstudium sich wie 2:1:1 verhalten sollen.

verständlich vorausgesetzt wird. Eine Ausnahme: Brookhart und Loadman (1992) sehen die folgenden Fähigkeiten als wesentliche, durch entsprechende Verfahren abzuklärende Voraussetzungen der Lehrertätigkeit an:

- Beherrschen und Verstehen des Unterrichtsgegenstandes,
- ausreichendes Repertoire verschiedener Verfahren der Darstellung und Erklärung unterrichtlicher Gegenstände,
- angemessene Nutzung derselben für unterschiedliche Schüler in unterschiedlichen Zusammenhängen,
- Kenntnis und effektive Nutzung unterschiedlicher Unterrichtsmittel,
- die Fähigkeit, im besten Interesse anderer tätig zu sein, sowie andere gute, zwischenmenschlich bedeutsame Fähigkeiten und angemessene Überzeugungen bezüglich der Aufgaben und Verantwortung eines Lehrers. (Brookhart/Loadman 1992)

Sie liegen damit in einer Argumentationslinie mit Shulman:

> *"Thus, teaching necessarily begins with a teacher's understanding of what is to be learned and how it is to be taught." (Shulman 1987, S. 7)*

Shulman spezifiziert dies an anderer Stelle:

> *„The teacher need not only understand that something is so; the teacher must further understand why it is so, …" (Shulman 1986, S. 9)*

Damit betont Shulman die Unerlässlichkeit des Beherrschens von Fachwissen, geht sogar noch darüber hinaus und benennt eine zweite Form von Fachwissen, das sogenannte "pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding.“ (Shulman 1987, S. 8). In einer Übersicht über das von Lehrkräften zu erwartende Basiswissen (dazu zählen auch Fach-, generelles pädagogisches und curriculares Wissen, Kenntnis von den zu Unterrichtenden, dem sozialen Umfeld und erzieherischen Werten und Normen (vgl. ebenda, S. 8)) nimmt das pädagogische Fachwissen für Shulman eine zentrale Stellung ein.

> *„Pedagogical content knowledge is of special interest because it identifies the distinctive bodies of knowledge for teaching. It represents the blending of content and pedagogy into an understanding of how par-*

ticular topics, problems or issues are organised, represented and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction. Pedagogical content knowledge is the category most likely to distinguish the understanding of the content specialist from that of the pedagogue." (ebenda, S. 8)

Shulman beklagt, dass in den meisten Staaten der USA der Abschlusstest für Lehrkräfte ein Wissen in ihrer Fachdisziplin erfordert, das man eher bei einem Studien-Eingangstest vermuten würde. Dahingegen betonen sämtliche Prüfungen den Bereich der „Fähigkeit zu unterrichten" („capacity to teach") (Shulman 1986, S. 5). In starkem Gegensatz zu dieser Gewichtung in Prüfungen steht die Wichtigkeit eines fundierten (pädagogischen) Fachwissens:

"Reinforcement and conditioning guarantee behaviour, and training produces predictable outcomes; knowledge guarantees only freedom, only the flexibility to judge, to weigh alternatives, to reason about both ends and means, and then to act while reflecting upon one's actions." (ebenda, S. 13)

Zusammenfassend lässt sich also erkennen, dass der Versuch, den Idealtypus eines guten Lehrers, "den" Lehrer, zu definieren, bislang zu keinem Ergebnis geführt hat, das eine einheitliche Sichtweise erlaubt. Es gibt nicht den „Musterpädagogen" oder die „Meisterpädagogin", jedoch eine Vielzahl von - wichtigen - Merkmalen, die man in bestimmten Kontexten einem guten Lehrer zuordnen würde.
Eine fast naiv anmutende Feststellung bei einer Evaluation der bis heute bekannten Studien ist, dass die Basis guter Lehrerschaft, guten Unterrichts, die Beherrschung des Unterrichtsgegenstandes ist, das besondere (pädagogische) Verständnis dessen, was andere (Schüler) begreifen sollen. Ein verständnisorientiertes und damit flexibles und den Bedürfnissen der Lerner anpassbares Wissen: Konzeptuelles Wissen.

"Those who can, do. Those who understand, teach." (ebenda, S. 14)

2.3 *Zusammenfassung*

Erkenntnisse empirischer und qualitativer Unterrichtsforschung zeigen, dass zwischen internationalen Bildungssystemen teilweise gravierende Unterschiede in Bezug auf die Unterrichtserfolge, gemessen an Schülerleistungen, bestehen.

Bevor die Frage, wie "unser" Unterricht entscheidend qualitativ verbessert werden kann, zu beantworten ist, stellt sich allerdings die Vorfrage, was "guten" Unterricht eigentlich ausmacht.

Eine Vielzahl qualitativer wie quantitativer Studien hat versucht, ein Bild des "guten" Lehrers zu entwickeln, der qualitativ hochwertigen Unterricht erteilt.

Qualitative Studien, die z.B. über Schülerbefragungen oder Lehrexpertennominierungen mit anschließender Profilbildung versuchen, *den* guten Lehrer zu beschreiben, überschneiden sich teilweise, bieten jedoch in ihrer Gesamtheit kein einheitliches Bild oder gar eine Schablone, die es erlaubt, z.B. auch Modifikationen in der Lehrerausbildung vorzunehmen, um eventuellen Schwächen entgegenzuwirken.

Empirische Forschungen, die sich am Prozess-Produkt-Paradigma orientieren, liefern „einen großen Schatz empirisch begründeten Wissens über lern- und leistungsrelevante Merkmale des Unterrichtens, was in den großen Handbuchartikeln und Übersichtsdarstellungen sowie in Meta-Analysen seinen Niederschlag findet... “ (Helmke 2003, S. 30). Gemessen an anderen Fachdisziplinen, wie z.B. der Genforschung, ist die zur Verfügung stehende Basis an empirisch gesichertem Wissen jedoch vergleichsweise klein (vgl. Gage/Needels 1989, S. 295). Zu viele Faktoren (kulturelles Umfeld, verschiedene Klassenstufen, Fächerkanon etc.) sind noch nicht auf mögliche Zusammenhänge im Hinblick auf Schülerleistungen untersucht worden (vgl. ebenda, S. 295).
Doch auch die schon erhebliche Basis des bereits vorhandenen gesicherten Wissens lässt einen Fokus auf die Beschaffenheit des Fachwissens weitestgehend vermissen. Dieses wird zwar oft vorausgesetzt, doch selten dessen *Struktur* in die Untersuchung einbezogen.

Insgesamt bemerkenswert ist, dass sich nur wenige Studien eingehender mit dem Sachwissen als solchem beschäftigen. Es wird zwar versucht, in diversen Studien eine Verbindung zwischen Sachwissen der Lehrkräfte und Sachwissen der Schüler herzustellen, doch wird dieses beim Lehrer nicht genauer definiert, sondern als selbstverständlich vorausgesetzt. Verschiedene Formen des Sachwissens werden nicht näher betrachtet, ebenso wenig die Auswirkungen verschiedener Wissensformen der Lehrkräfte auf die der Schüler. Eine Ausnahme bildet hier die Studie von Liping Ma (1999).

Diese defizitäre Forschungslage ist Ausgangspunkt einer eigenen Untersuchung. Dabei wird unterstellt, dass der Zusammenhang zwischen profundem Lehrerfachwissen und dem Aufbau differenzierter Wissensstrukturen beim Schüler nicht nur nachgewiesen werden kann, sondern ihm hohe Bedeutung für die Erklärung des schlechten Abschneidens deutscher Schüler in den Mathematikanforderungen internationaler Vergleichsstudien zukommt. Dabei soll es nicht um die Kenntnis von Fakten, Regeln und Zusammenhängen gehen, wie sie Bloom (1973) in seiner kognitiven Taxonomie als Grundstufe ausweist, oder um einfache geistige Leistungen, wie sie der Deutsche Bildungsrat seinerzeit als „Reproduktion" bezeichnet hat (Deutscher Bildungsrat 1970), sondern um Wissen, das den Umgang mit sich selbst einschließt, von Verständnis durchdrungen ist und quasi elementaren Bestandteil der Schülerpersönlichkeit darstellt.

3 Begriffsbestimmung: Verständnisorientierter und verfahrensorientierter Unterrichts

Die vorhergehenden Kapitel haben die Komplexität und die Vielfalt der wissenschaftlichen Untersuchungen vor Augen geführt, mit deren Hilfe versucht wurde, Merkmale „guten“ Unterrichts und „guter“ Lehrer zu bestimmen.
Doch wie der Überblick über verschiedene Forschungsergebnisse zeigt und auch Shulman (vgl. Abschnitt 2.2) bemängelt, vernachlässigen die meisten Untersuchungen den Aspekt des Fachwissens. Es besteht jedoch ein breiter Konsens, dass Lehrkräfte die von ihnen zu vermittelnden Inhalte zunächst einmal selbst *verstanden* haben müssen und erst dadurch in der Lage sind, flexibel auf Unterrichtsgeschehnisse zu reagieren und in der Methoden- und Lehrmittelauswahl die richtige Entscheidung zu treffen. Vor allem aber - dieses sei trotz tautologisch anmutender Argumentation noch einmal erwähnt - können Lehrkräfte ihren Schülern fachwissenschaftlich determiniertes Wissen erst dann *verständlich* machen, wenn sie die entsprechenden Sachverhalte, Regeln und Gesetzmäßigkeiten auch selbst verstanden haben.

Allerdings schlägt sich dieser Aspekt der Strukturqualität nicht unmittelbar in der Ergebnisqualität beim Schüler nieder. Es ist zu unterstellen, dass vertieftes Lehrerwissen seinen Ausdruck in einer verständnisorientierten Gestaltung von Lernsituationen findet. Das Konzept „verständnisorientierten Unterrichts“ stellt sich insofern als Pendant zum Lehrer dar, dessen Fachkenntnisse von tiefem Sachverstand getragen sind. Es soll in den folgenden Abschnitten eingehend betrachtet werden.
Um die Bedeutung dieser Form des Wissens hervorzuheben, wird zunächst - hinführend über die klassischen Lerntheorien - der Begriff des Lernens bedacht. Verfahrensorientiertes Lernen wird vom „sinnvollen“ Lernen abgegrenzt; auf letzterem schließlich beruht die Definition des „verständnisorientierten Wissens“ und des, im mathematik-fachwissenschaftlichen Bereich, „Profound Understanding of Fundamental Mathematics“ .

3.1 Lernen

Konzeptuellem oder prozeduralem Wissen geht Lernen voraus. Die psychologische Fachliteratur bietet eine Vielzahl von Definitionen des Lernbegriffs an, die Gage und Berliner wie folgt zusammenfassen:

> *„Lernen ist der Prozess, durch den ein Organismus sein Verhalten als Resultat von Erfahrung ändert.“ (Gage/Berliner 1996, S. 230)*

Noch etwas präziser wird dies von Skowronek formuliert:

> *„Lernen ist der Prozess, durch den Verhalten aufgrund von Interaktionen mit der Umwelt oder Reaktionen auf eine Situation relativ dauerhaft entsteht oder verändert wird, wobei auszuschließen ist, dass diese Änderungen durch angeborene Reaktionsweisen, Reifungsvorgänge oder vorübergehende Zustände des Organismus (Ermüdung, Rausch oder ähnliches) bedingt sind ...“ (Skowronek 1969, S. 11)*

In der Verhaltenspsychologie sind drei relativ eigenständige Theorien entwickelt worden, um zu beschreiben, wie wir lernen.

Zu den besten Beispielen des „**klassischen Konditionierens**“ zählen die Experimente des berühmten russischen Physiologen Iwan Pawlow. Einem Hund wird ein Stück Fleisch (*unkonditionierter Stimulus*) gegeben: seine Speicheldrüsen beginnen zu arbeiten (*unkonditionierte Reaktion*), während er frisst. Das Auftreten dieser Reaktion auf die Darbietung des Fleisches ist nicht erlernt, es erfolgt instinktiv. Wird in Anwesenheit des Hundes eine Glocke geläutet, hat dies keine oder nur unwesentliche Auswirkungen auf den Speichelfluss des Hundes. Wenn jedoch häufiger hintereinander die Glocke geläutet und jeweils sofort darauf das Fleisch an den Hund verfüttert wird, reicht nach einigen Versuchsdurchgängen das Läuten der Glocke (zuvor *neutraler*, nun *konditionierter Stimulus)* aus, um eine Speicheldrüsenreaktion (*konditionierte Reaktion*) beim Hund festzustellen.

Kontinguitätslernen (Verknüpfungslernen) beschreibt, wie etwas gelernt wird, weil Ereignisse oder Stimuli zeitlich sehr eng aufeinander folgen.
Im Unterricht findet man diesen Lerntyp beim mechanischen Auswendiglernen. Wenn der Lehrer sagt, „Zwei plus zwei ist gleich?“ und eine Antwortkarte mit der Zahl 4 hochhält, lernen die Schüler, dass die Antwort 4 ist.
Die Wirksamkeit und Allgegenwärtigkeit von Kontinguitätslernen kann man leicht erfahren, versucht man die folgenden Lücken zu füllen:
Aus einer Mücke einen .... machen.
Er lügt wie ....
Zwei plus zwei ist ....
Die Beispiele, bei denen man sofort „Elefant“, „gedruckt“ und „4“ einsetzt, zeigen, wie wir etwas einfach deshalb lernen, weil Ereignisse oder Stimuli zeitlich sehr eng aufeinander folgen.

Operantes Konditionieren (Lernen als Ergebnis von Verstärkung): Gegenüber dem klassischen Konditionieren ist hier die Konsequenz des Verhaltens die entscheidende Variable. Das Verhalten wird nicht durch einen Reiz ausgelöst, sondern auf ein spontan auftretendes Verhalten folgt eine „Belohnung“ oder „Bestrafung“, die bekräftigend wirkt oder eine Löschung zur Folge hat. Die Versuche mit einer Ratte in der sogenannten „Skinner-Box“ sind die wohl bekanntesten Beispiele für operantes Konditionieren. Die Ratte drückt zunächst rein zufällig, vielleicht sogar mehrmals auf einen Hebel innerhalb einer Box. Bekommt sie parallel zu der Hebeldruckreaktion jeweils noch etwas Futter in den Napf neben dem Hebel, so erfolgt durch den räumlich und zeitlich fixierten Zusammenhang eine Verstärkung der Hebeldruckreaktion.
Im Unterricht könnte eine Verstärkung der bekräftigende Kommentar („Richtig! Stimmt!“) des Lehrers auf eine richtige Schülerantwort sein.

Für das **schulische Lernen** reichen die Definitionen aus der Verhaltenspsychologie jedoch nur bedingt aus. Die Verhaltensänderungen, die ein Lernprozess bewirkt, beziehen sich in der Unterrichtspädagogik daher auch darauf, verschiedene Dinge zu verstehen, in Erinnerung zu rufen oder anzuwenden (vgl. Gage/Berliner 1996, S. 230). Kock/Ott fügen ihrer Definition von Lernen einen entsprechen Zusatz bei, der zusätzlich zum Lernprozess auch den Erkenntnisprozess betont:

> *„Jeder Lernprozess stellt ein Lernen dar, das in seinem Ablauf Erkennen, Entwickeln, Festhalten einbezieht und Verhaltensänderungen verursacht, die nicht allein durch angeborene Merkmale erklärt werden können. Der reine Wissenserwerb wird durch einen Erkenntnisprozess ergänzt.“ (Kock/Ott (1997, S. 441)*

Lernen im schulischen Kontext fokussiert Ziele, die oft in den Richtlinien oder sogenannten Lehrplänen der zuständigen Regierungsapparate als sogenannte Lernziele fixiert sind.
Um an amerikanischen Colleges erzielte Leistungen präziser beschreiben zu können, suchte Bloom zusammen mit seinen Mitarbeitern nach Ordnungsmöglichkeiten (Bloom et al. 1956). Sie ordneten die Lernziele zunächst in drei Verhaltensdimensionen:

1. Kognitiver Bereich
Hier wird berücksichtigt, dass sich bei Schülern nach geeigneten Erfahrungen z.B. verändern kann, wie sie eine Gegebenheit wahrnehmen, wie sie ein Problem verstehen, eine Sache beurteilen u.s.w.. Der kognitive Bereich umfasst also die Lernziele, die es

mit Wissen und Denken zu tun haben. (vgl. Mietzel 1986, S. 204f. sowie Zech 1996, S. 66f.)

2. Affektiver Bereich
Dieser umfasst die Veränderungen der Lernenden, die sich auf Gefühle und Wertschätzungen beziehen.

3. Psychomotorischer Bereich
Veränderungen der Lernenden, die den Bewegungsapparat bzw. dessen Kontrolle betreffen.

Mietzel (1986) bemerkt, dass die drei Bereiche bis zu einem gewissen Grad miteinander verzahnt sind:

> *„Wenn ein Grundschüler z.B. am Schreibunterricht teilnimmt, muss er zum einen lernen, wie er den Stift zu halten hat und auf dem Papier zu bewegen hat, um bestimmte Buchstaben zu formen (psychomotorischer Aspekt). Zugleich besteht das Ziel, das Wissen bezüglich der Schriftform eines Buchstabens und seiner Aussprache in den Kenntnisspeicher des Lernenden zu bringen (kognitiver Aspekt). Schließlich ist davon auszugehen, dass das Erlernen des Schreibens bzw. dessen Beherrschung mit bestimmten Begleitgefühlen verbunden ist; der Schüler schreibt z.B. gerne oder hat große Abneigungen dagegen entwickelt (affektiver Aspekt).“ (Mietzel 1986, S. 204f.)*

Bloom et al. (1973) unterscheiden im kognitiven Bereich sechs Kategorien. Diese sind hierarchisch aufeinander aufgebaut und lassen erkennen, in welchem Maße schulisches Lernen vom „Verstehen“ abhängt. Diese Kategorie bildet unter anderem die Grundlage für wesentlich komplexere Lernziele:

1. **Kenntnisse**: Erkennen, Speichern und Erinnern von Fakten, Begriffen und Regeln. Ein Verständnis muss nicht vorliegen. In der Grundschulmathematik bedeutete dies z.B., die schriftliche Subtraktion ausführen können.

2. **Verstehen**: Zusammenfassende Wiedergabe des Gelernten mit eigenen Worten. Sachgerechte Aufnahme von Informationen, deren Interpretation, Verallgemeinerung oder Übertragung in eine andere Form. Z.B. mit eigenen Worten erklären können, wie der Algorithmus der schriftlichen Subtraktion funktioniert.

3. **Anwendung**: Zur Lösung eines Problems in einer gegebenen Situation wird eine Methode, Regel oder Idee ausgewählt und angewendet. Z.B. Anwendung der schriftlichen Subtraktion in einer Sachaufgabe.

4. **Analyse**: Eine Information wird in ihre Teile zerlegt; diese werden miteinander in eine Beziehung gebracht bzw. ihre Organisation wird deutlich. In der Grundschulmathematik findet man diese Kategorie kaum. Ein Beispiel könnte die Theorie einer Schülerin sein, dass mit dem Zunehmen des Umfanges einer geschlossenen Figur auch gleichzeitig die Fläche größer wird. In einer Analyse sollte herausgefunden werden, ob das Mädchen Recht hat. Das Ergebnis dabei sollte eine logische Begründung der Ablehnung oder der Zustimmung zu dieser Theorie sein.

5. **Synthese**: Verschiedene Elemente werden identifiziert, neu geordnet und kombiniert, so dass das entstandene Neue eine Klarheit hat, die zuvor nicht bestand. Grundschulmathematisch betrachtet könnte dies bedeuten, einfache Beweise für eine Gesetzmäßigkeit (z.B. Kommutativgesetz) selbst zu finden.

6. **Evaluation**: Material und Methoden, die für bestimmte Zwecke eingesetzt werden, werden bezüglich des Wertes beurteilt. Ein Beispiel hierfür ist in der Grundschulmathematik nicht mehr zu finden. In höheren Schuljahren könnte dies bedeuten, verschiedene Beweise eines Satzes bezüglich der benutzten Beweismittel vergleichen zu können.

Wie schon erwähnt, kommt dem „Verständnis“ im Rahmen dieser Kategorisierung psychologisch eine zentrale Bedeutung zu. Zech geht daher noch weiter, modifiziert das Ordnungsschema und entwirft eine „pragmatische Taxonomie kognitiver Ziele des Mathematikunterrichts“, in der er die von Bloom vorgegebenen Kategorien auf den Mathematikunterricht überträgt (Zech 1996, S. 69ff). Dazu vertauscht er die ersten beiden, wohlwissend, dass diese hierarchisch aufeinander aufgebaut sind:

> *„Hier jedoch wird in pädagogischer Absicht davon ausgegangen, dass am Anfang aller mathematischer Lernprozesse möglichst „Verständnis“ stehen sollte, zu dem im weiteren Lernprozess zusätzlich das Wissen, die Anwendung usw. dazu kommt.“ (ebenda, S. 71)*

Mit den vorgestellten verhaltenspsychologischen Lerntheorien lässt sich "Schulisches Lernen" nur bedingt erklären. Dies war und ist jedoch auch nicht Ziel verhaltenspsychologischer Forschung. Doch helfen die theoretischen Grundlagen zu verstehen, was „mechanisch“ gelernte Wissenselemente bedeuten: relativ isolierte Einheiten in der kognitiven Struktur des Lerners.

3.2 *Sinnvolles Lernen und mechanisches Lernen*

„Sinnvoll“ Gelerntes hingegen ist auf bereits vorhandene, relevante Ideen in der kognitiven Struktur bezogen und in ihr verankert (vgl. Ausubel 1980, S. 48f).

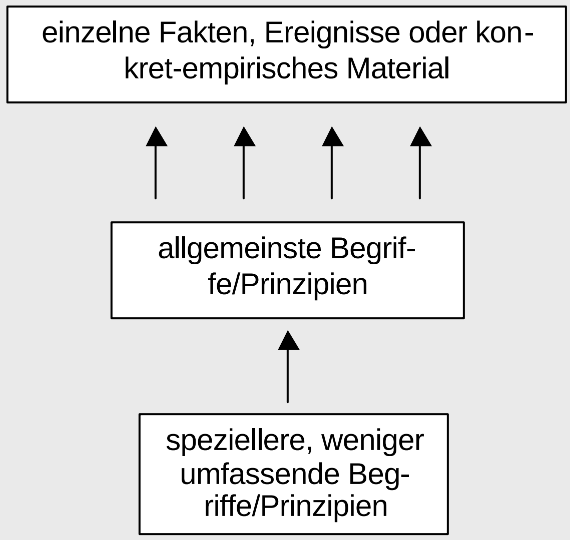


Abb. 3: Aufbau einer kognitiven Struktur nach Ausubel

Unter **kognitiver Struktur** versteht Ausubel Inhalt und Anordnung der Ideen (d.h. Wissenselemente) einer Person. Diese Struktur muss nicht unbedingt genauso aufgebaut sein wie die des entsprechenden Gegenstandsbereichs. Vielmehr ist sie als eine subjektive Hierarchisierung zu verstehen, in der aus Gründen der ökonomischen Speicherung allgemeinste Begriffe bzw. Prinzipien eine Basis stellen, der speziellere, weniger umfassende Prinzipien untergeordnet sind und dieser wiederum einzelne Fakten, Ereignisse oder konkret empirisches Material.

Diesem Aufbau, der als Modell zu sehen ist, entsprechen die Lernprozesse, die von bereits in der kognitiven Struktur vorhandenen Begriffen (Ideen) ausgehen. Durch die zunehmende Differenzierung vom Allgemeinen hin zu feinster Verästelung entsteht ein beziehungsreiches Geflecht von Bedeutungen.

Neue Elemente oder Bedeutungen werden dann sinnvoll erfasst und *verstanden*, wenn sie in der schon bestehenden, kognitiven Struktur verankert werden. Ausubel et al.

formulieren in diesem Sinne das Motto ihrer Unterrichtspsychologie:

> *„Wenn wir die ganze Psychologie des Unterrichts auf ein einziges Prinzip reduzieren müssten, würden wir dies sagen: Der wichtigste Faktor, der das Lernen beeinflusst, ist das, was der Lernende bereits weiß. Dies ermitteln Sie und danach unterrichten Sie Ihren Schüler."* (*Ausubel et al. 1980)*

3.3 *„Verständniskern" nach Zech*

Anknüpfend an Ausubel bildet Zech den Begriff eines „Verständniskerns" eines (mathematischen) Sachverhalts aus. Hiermit ist die Möglichkeit gemeint, die Bedeutung einer Information so tief wie möglich in der kognitiven Struktur des Lernenden zu verankern.

Eine wichtige didaktische Aufgabe sei es, „solche Verständniskerne herauszuarbeiten, explizit zu formulieren und in 'Verständnisaufgaben' gezielt anzusprechen." (Zech 1996, S. 132)

Gemäß der Vorstellung der kognitiven Struktur wird der Verständniskern herausgearbeitet, indem sich die Erklärung möglichst auf bereits in der Struktur vorhandene Grundbegriffe bezieht. Zech betont, dass eine schülergemäße Formulierung hierfür sehr wichtig sein kann. Oft lande man im üblichen Unterricht schnell bei einer fachsprachlichen Formulierung, was zur Folge hat, dass der Verständniskern dann sehr schnell wieder verloren gehe oder vielleicht auch gar nicht richtig bewusst worden sei.

Ein Beispiel aus einem Schülerbuch einer dritten Grundschulklasse mag dies verdeutlichen (s. Abb. 4):

Abb. 4: Auszug aus dem *"Zahlenbuch"* (Wittmann et al. 1996)

In einem Schweizer Schulbuch wird der Verständniskern auf der Basis des vorher erarbeiteten „gleichsinnigen Ergänzens“ explizit ausformuliert (s. Abb. 5).

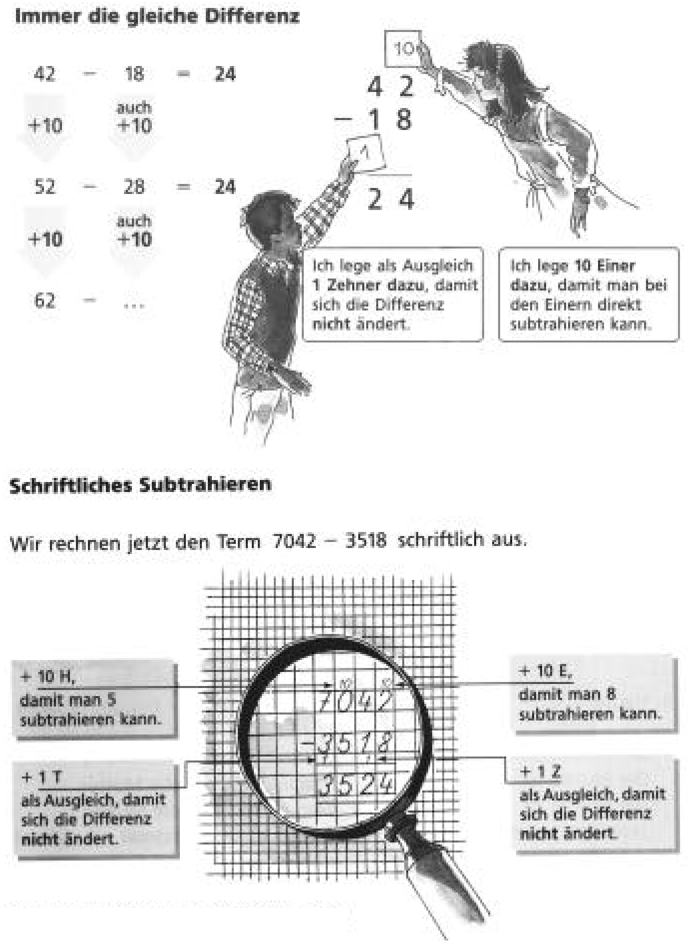


Abb. 5: Auszug aus dem Schulbuch für den Kanton Zürich; Hohl, W. u.a. (2000). „Mathematik 4“. Schülerbuch des Kantons Zürich. Zürich: Lehrbuchverlag des Kantons, S. 43

Dem gleichsinnigen Ergänzen sollten wiederum verständliche, schülergemäße Erklärungen des Stellenwertsystems vorangegangen sein. Diese ließen sich dann wie z.B. in Abb. 6 in die Erklärungen der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag einbinden.

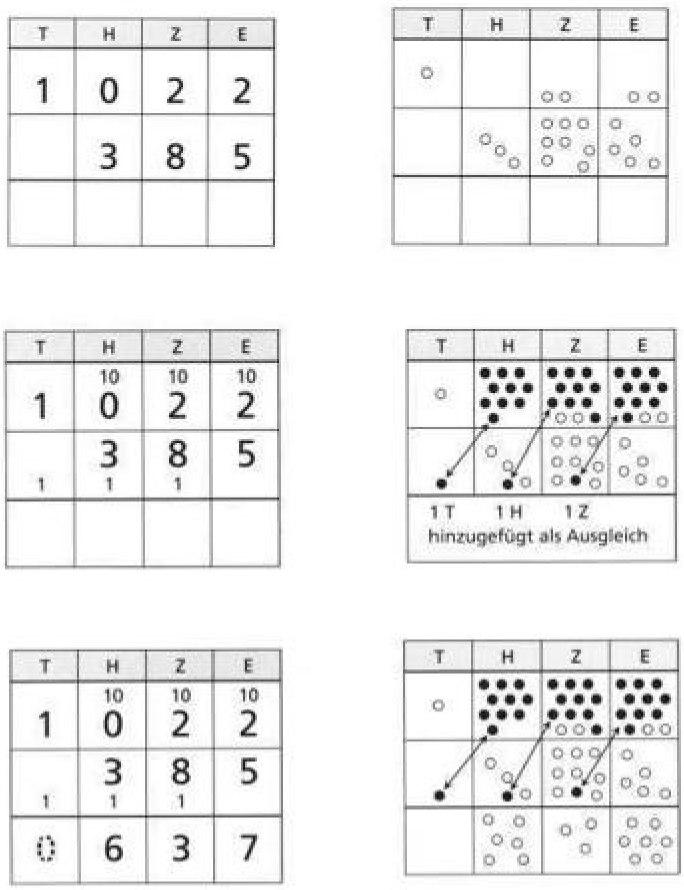


Abb. 6: Auszug aus dem Züricher Lehrerhandbuch (Hohl, W. u.a. 2000)

Eine so konstruierte Erklärung der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag ließe in Hinblick auf den Verständniskern schon eher den Schluss zu, dass bereits erworbenes Vorwissen der Schüler miteinbezogen und somit in der Erklärung fest verankert wird. Während in dem ersten Schulbuchbeispiel der Algorithmus als auszuführende Technik mechanisch erläutert und daher auch nur ebenso gelernt werden kann, macht die Veranschaulichung aus dem zweiten Beispiel ein Verstehen möglich, dem dann die Automatisierung folgen kann.
Was Ausubel et al. in Bezug auf diese Form des Wissenserwerbs, dem sinnvollen Lernen, schreiben, gilt gemeinhin als normativ:

> *„Je sinnvoller etwas gelernt wird, d.h. je besser es auf die kognitive Struktur des Lernenden bezogen wird, desto besser wird es auch behalten.“ (Ausubel et al. 1980, S. 169f.)*

Zusammenfassend lässt sich also festhalten: Verhaltenspsychologische Lerntheorien können schulisches Lernen in seiner Komplexität nicht beschreiben (und sollen dies auch gar nicht). Daher wurde mit Hilfe weiterführender Betrachtungen der Begriff des Lernens in zwei trennscharfe Kategorien, dem „mechanischen“ und dem „sinnvollen“ Lernen, geteilt. Diese münden in zwei unterschiedliche Formen des Wissens, dem „verständnisorientierten“ („konzeptuellen“) und dem „verfahrensorientierten“. Um diese soll es im Folgenden gehen.

3.4 „Conceptual Knowledge“ und „Procedural Knowledge“

Der Begriff des verständnisorientierten oder konzeptuellen Wissens (conceptual knowledge) ist in engem Zusammenhang mit der dargestellten kognitiven Struktur zu sehen. Gegenüber dem prozeduralen oder verfahrensorientierten Wissen (procedural knowledge), das sich meistens auf die Fähigkeit beschränkt, gelernte Algorithmen oder Verfahren zu wiederholen und innerhalb eines ganz bestimmten Aufgabentypus anzuwenden, beinhaltet ein „Konzept“ die Verbindung verschiedener (Wissens-) Elemente miteinander. Ein einziger neuer Wissensbaustein kann innerhalb eines konzeptuell strukturierten Wissens eine Ergänzung darstellen, ähnlich einem Netz, dem eine weitere Masche hinzugefügt wird und das dadurch feiner (differenzierter) wird. Fügte man einem rein prozedural strukturierten Wissen auf ebenso verfahrensorientiertem Weg etwas Neues hinzu, bliebe dieses neue Element isoliert, da keine Verbindungen zu anderen Wissenseinheiten gezogen werden können.

Hiebert und Lefevre heben mit dem Begriff "Conceptual Knowledge" auf eine Art von Wissen ab, das reich an Beziehungen ist:

> *"Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network." (Hiebert/Lefevre 1986, S. 3f.)*

"Procedural Knowledge" wird von den Autoren auf zweierlei Weise gesehen:

> *"One part is composed of the formal language, or symbol representation system, of mathematics. […] The second part of procedural knowledge consists of rules, algorithms, or procedures used to solve mathematical tasks. They are step by step instructions that prescribe how to complete tasks. A key feature of procedures is that they are executed in a predetermined linear sequence." (ebenda, S. 6)*

Der in der Lernpsychologie allgemein verwendete Begriff des „Conceptual Knowledge“ kann in einer isomorphen Form auf den fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Bereich der Mathematik übertragen werden. Die wohl treffendste Formulierung eines solchen Definitionsversuches gelingt Haapasalo und Kadijevich, indem sie das verfahrensorientierte oder prozedurale Wissen miteinschließen:

> *„Conceptual knowledge denotes knowledge of and a skilful „drive“ along particular networks, the elements, of which can be concepts, rules (algorithms, procedures, etc.), and even problems (a solved problem may introduce a new concept or rule) given in various representation forms.“ (Haapasalo/Kadijevich 2001, S. 141)*

In ihrer Zusammenfassung verschiedenster Definitionsversuche konzeptuellen Wissens stellen Haapasalo und Kadijevich zudem fest, dass verfahrensorientiertes Wissen oftmals unbewusst und automatisch angewendet wird, während konzeptuelles Wissen typischerweise bewusstes Denken erfordert (ebenda).

An dieser Stelle sei ein Bogen zu der schon in Kapitel 1 und 2 aufgeworfenen Fragestellung bezüglich der Qualität des Lehrkraftwissens und des Unterrichts gespannt: Nach den vorangegangenen Ausführungen in diesem Kapitel ist deutlich geworden, dass ein auf „Conceptual Knowledge“ basierendes Lehrkraftwissen offensichtlich jenes ist, das für das Gelingen eines „guten“ Unterrichts von entscheidender Bedeutung ist.
Wie jedoch vom Verfasser in Kapitel 2 geschildert, ist die Erforschung des fachlich ausgerichteten Lehrkraftwissens in keiner Weise ein Bereich, in dem auf umfangreiche Forschungsergebnisse zurückgegriffen werden kann. Im Gegenteil offenbart sich dem Interessierten ein nahezu „weißer Fleck“ auf der (Forschungs-)Landkarte. Einzig eine Studie von Liping Ma, einer Amerikanerin chinesischer Herkunft, verfolgt den Ansatz, die Unterschiede im Lehrerwissen an dessen besonderer Beschaffenheit festzumachen. Von den Begrifflichkeiten des Conceptu-

al Knowledge und Procedural Knowledge ausgehend macht sie Unterschiede im Lehrkraftwissen vor allem daran fest, inwieweit ein, wie sie es nennt, „Profound Understanding of Fundamental Mathematics“ (PUFM) vorliegt. Mit diesem innovativen Ansatz verlässt Ma die Ebene des „allgemeinen Lehrkraftwissens“ und fokussiert - ganz bewusst - den mathematik-fachwissenschaftlichen Bereich.
Aufgrund der defizitären Forschungslage rekurriert der Verfasser intensiv auf genau diese Vorarbeiten Ma`s, nicht zuletzt, um gewonnene Daten der eigenen Untersuchung später mit denen der Studie Ma`s vergleichen zu können und so den besagten weißen Fleck ein wenig zu färben.
Vor allem aber sei an dieser Stelle der besondere Verdienst Ma`s hervorgehoben, das mathematische Fachwissen in einer Weise zu definieren und darzustellen, die dessen Komplexität und Vernetztheit gerecht wird, gleichwohl aber dessen logische Struktur und Klarheit hervorhebt.
Der folgende Abschnitt, der sich ausführlich mit dem Konzept Ma`s befasst, ist daher als der wohl zentrale theoretische Teil dieser Arbeit zu sehen, da in ihm die Konzepte erschlossen werden, auf denen die dann nachfolgend geschilderte Untersuchung beruht.

3.5 Profound Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM)

Im Rahmen ihrer in den 90er Jahren durchgeführten Studie „Knowing and Teaching Elementary Mathematics“ (Ma 1999) entwickelte Ma den Begriff des Profound Understanding of Fundamental Mathematics“. Basierend auf den Daten, die sie im Rahmen fokussierender Interviews sammelte, geht sie über die fachspezifische Beschreibung eines allgemeinpsychologischen konzeptuellen Wissens hinaus. Ihre Definition, auf der auch die spätere Analyse des Verfassers beruht, soll im Folgenden erläutert werden.

Eine reine „Übersetzung“ der von Ma geschaffenen Begrifflichkeit reichte nicht aus, um die Komplexität dieser Begrifflichkeit zu veranschaulichen. Unter „profundem Verständnis“ (Profound Understanding) verstünde man zu leicht eine allgemeine Charakterisierung eines gesetzten, gut fundierten Wissens, ebenso würde man „fundamentale Mathematik“ (Fundamental Mathematics) wohl eher mit den „Grundlagen der Mathematik“ als wichtigen Bestandteil und wichtige Basis der späteren verschiedenen mathematischen Teildisziplin verbinden. PUFM geht jedoch über diese Begrifflichkeiten weit hinaus.

Zu fokussieren sind hier zunächst die Begriffe „Profound Understanding" (PU) sowie „Fundamental" (vgl. Abb. 7). Ma identifiziert bei Lehrkräften mit PU zunächst eine bestimmte „Haltung" (Attitudes) gegenüber Mathematik. Sie konstatiert:

> *„Attitudes contribute significantly to the coherence and consistency of a teachers mathematical knowledge." (Ma 1999, S. 120)*

Beispiele:

- to justify a claim with a mathematical argument
- to know how as well as to know why
- to keep the consistency of an idea in various contexts
- to approach a topic in multiple ways (ebenda)

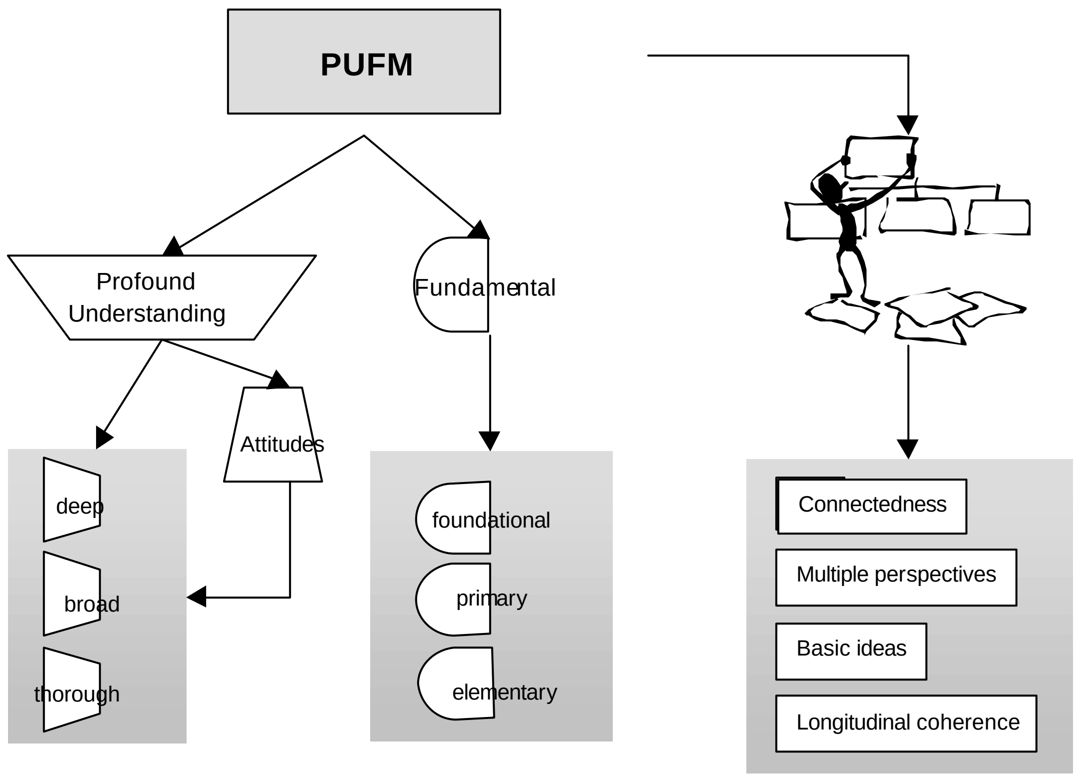


Abb. 7: Profound Understanding of Fundamental Mathematics nach Ma (1999).

Attitudes stellen konstitutiv die Grundvoraussetzung zur Erlangung des PUFM und sind aus diesem Grund in Abb. 7 in einer vorgeordneten Position dargestellt. Tiefgehendes mathematisches Wissen beschränkt sich nicht nur auf die Ergebnisse, sondern schließt auch den Erkenntnisweg über bestimmte, mathematikcharakteristische Tätigkeiten mit ein. Dazu zählen das Herstellen unerwarteter Beziehungen, Verallgemeinern von Teilerkenntnissen, Aufklären von Phänomenen, Ordnen unübersichtlicher Gesamtheiten u.a.m.. Die von Ma ermittelten Attitudes (s.o.) können als Beispiel hierfür gesehen werden.

In die gleiche Richtung – wenn auch in einem anderen Zusammenhang - weist Neubrand (2000), der in das verständnisorientierte Lernen mathematischer Inhalte die „Reflexion“, das Nachdenken über mathematische und Diskutieren von mathematischen Tätigkeiten, als wesentlich bestimmend einschließt.
Der von Neubrand in diesem Zusammenhang benutzte Begriff der „Reflexion“ geht allerdings noch über den der „attitudes“ hinaus. Ist die von Ma beschriebene Grundhaltung wichtige Voraussetzung, um PUFM zu erlangen, bewirkt die Reflexion die Entwicklung eines Metawissens, mit dessen Hilfe man in der Lage ist, die entstandenen Verknüpfungen zu kontrollieren:

> *“This knowledge is organized in several relatively closed units, and is internally structured by a variety of relations and connections. These units must be connected with each other. Then, all these connections have to be controlled. This is the task of metacognition.” (Neubrand 2000, S. 253)*

Auf der einen Seite steuert das durch Reflexion erlangte Metawissen die Komplexität des Lernens, auf der anderen Seite stellt es sicher, dass sich verschiedene Lerner über die gelernten Inhalte unterhalten können. Auf diese Weise werden sich die Lernenden auch über die Bedeutung dieser Inhalte bewusst. Darüber hinaus bedeutet Reflexion nicht nur ein Zurückblicken auf das bereits Gelernte, vielmehr ermöglicht ein in dieser Hinsicht differenzierteres Metawissen ein leichteres und systematischeres Voranschreiten im Lernprozess. Weiterhin ist Metawissen die Voraussetzung für die Erkenntnis, etwas verstanden zu haben. Sich dessen bewusst zu sein, schafft Zufriedenheit und ist - als motivationaler Faktor - unverzichtbarer Bestandteil pädagogischen Handelns. Reflexion sollte aber auch als Vorbereitung auf wissenschaftliches Denken gesehen werden. In einem Umfeld ständig wachsenden Wissens und multimedialer Möglichkeiten des Zugriffs darauf erleichtert sie die Einsicht, wie Fakten entstehen und auf welche Weise und in welcher Form mit welcher Absicht sie bereitgestellt werden. Reflexion befähigt also zu einer freien und selbstständigen Orientierung in der Welt, ist somit ein wichtiger Bestandteil von dem, was die Gesellschaft im Allgemeinen als „Bildung“ bezeichnet.

„The mere facts on the surface are not the focal point; the concern is for the ways „facts“ might be acquired, how they might be evaluated, the connections between them, the methods used to create these facts as facts, and the extend to which these methods were those of the scientific community.” (ebenda, S. 255)

Ma definiert drei weitere Merkmale des PU, die, wie oben ausgeführt, in gewisser Weise von den attitudes abhängen: depth, breadth und thoroughness.
Tiefe (depth) ist hier ähnlich zu verstehen wie ein Verständniskern bei Zech (vgl. Kap. 4.3):

„The closer an idea is to the structure of a discipline, the more powerful it will be, consequently, the more topics it will be able to support.“ (Ma 1999, S. 121)

„Breite“ (breadth) hingegen meint hier die Verbindung eines (mathematischen) Grundbegriffes mit möglichst vielen ebensolchen. Ein Beispiel: Die Verbindung von Addition und Subtraktion mit oder ohne Zehnerübergang ist eine Frage der „Breite“. Eine Verbindung derselben mit Konzepten wie „Entbündelung“ oder Addition und Subtraktion als inverse Operationen wäre dahingegen tiefgehende Verknüpfung.
„Thoroughness“ schließlich beschreibt die feste Verbindung, ein „Zusammenkleben“ der einzelnen Eigenschaften, die PU zu einem Ganzen „zusammenschweißt“:

„Indeed, it is the thoroughness which ‘glues’ knowledge of mathematics into a coherent whole.” (ebenda)

“Fundamental” ist für Ma mit drei Bedeutungen verbunden: foundational, primary und elementary.
Arithmetik und Geometrie, Hauptbestandteile der Grundschulmathematik, gelten bis heute als die Grundlage (foundation) aller mathematischen Teildisziplinen wie z.B. Algebra. Grundschulmathematik enthält demnach Ansätze vieler wichtiger mathematischer Begriffe der sich auf diese Mathematik gründenden Disziplinen. So werden z.B. die drei „Grundgesetze“ (D-, A- und K-Gesetz) zur Lösungsfindung in der Algebra eingesetzt. Die Anfänge (primary) oder die Wurzeln zur Lösung von Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten finden sich also in der Grundschulmathematik. Die gründenden (fundamental) und anfänglichen (primary) Merkmale der Mathematik werden schließlich elementar (elementary) dargeboten, in einer Weise, in der Schüler in diesem Alter in der Lage sind, mathematische Strukturen zu erfassen.

Einer Lehrkraft (hier dargestellt durch ein Clipart) ordnet Ma dementsprechend vier Eigenschaften zu:

- connectedness
- multiple perspectives
- basic ideas
- longitudinal coherence

Ein Lehrer mit PUFM hat die generelle Intention, Verbindungen zwischen mathematischen Konzepten und Verfahren zu schaffen (connectedness). Dies beginnt bei simplen Verbindungen zwischen einzelnen Bausteinen und endet bei grundlegenden Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Operationen. Ma entwickelt folgendes Netzwerk von Verbindungen zwischen mathematischen Begriffen (ebenda S. 119):

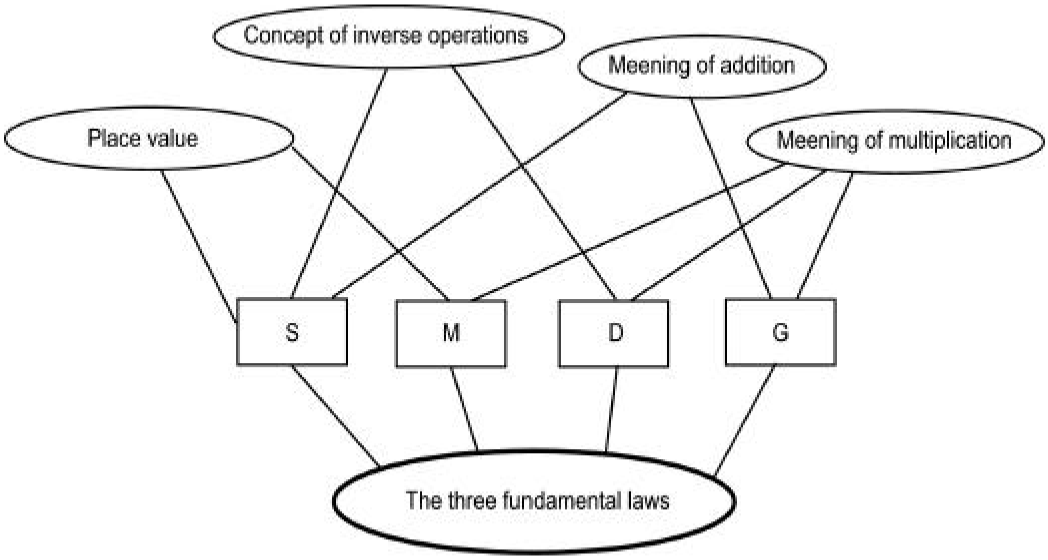


Abb. 8: Verflechtungen innerhalb des PUFM

Wird dies beim Lehren bedacht, werden die Schüler davon abgehalten, isolierte Themenbereiche zu lernen; sie lernen stattdessen einen geschlossenen „Wissenskörper" („unified body of knowledge") (ebenda S. 122).
Lehrer mir PUFM schätzen verschiedene Sichtweisen (multiple perspectives) einer Idee und Herangehensweisen an eine Lösung. Diese verschiedenen Facetten und Herangehensweisen können solche Lehrer auch in mathematischen Erklärungen für ihre Schüler bereitstellen.
Darüber hinaus sind sich diese Lehrkräfte der grundlegenden Ideen (basic ideas) bewusst, greifen oft und führen auch ihre Schüler darauf zurück. Dies wird verstärkt durch

die allgemeine Grundhaltung der Lehrer, die sowohl nach dem „Wie“ als auch nach dem „Warum“ fragen.
Schließlich geht das Wissen von Lehrkräften mit PUFM über das Fachwissen, das zu einem bestimmten Zeitpunkt gerade im Rahmen des Curriculums unterrichtet wird, hinaus. Es erreicht ein grundlegendes Verständnis des gesamten Mathematik-Curriculums (longitudinal coherence). Auf diese Weise kann das von den Schülern gelernte immer neu überdacht und in den Unterricht einbezogen werden, auf der anderen Seite ist sich die entsprechende Lehrkraft dessen bewusst, was die Schüler später einmal lernen müssen, und kann, in Vorausschau, gute Fundamente legen.

Die „Vernetztheit“ einzelner mathematischer Grundbegriffe stellt einen zentralen Punkt des PUFM dar. Die eine Lehrkraft mit PUFM kennzeichnenden Merkmale sind daher auch durchaus ordinal zu sehen: Die „multiple perspectives“, das Zurückgreifen auf „basic ideas“ und die „longitudinal coherence“, hängen in gewisser Weise von dem Grad der Vernetztheit des mathematischen Wissens ab. Ohne dies wären die drei somit untergeordneten Merkmale nicht möglich.
Als Beispiel mögen die Wissensbausteine („knowledge-pieces“) in Bezug auf die schriftliche Subtraktion gelten, die Ma in Ihrer Studie im Gespräch mit den chinesischen Lehrkräften identifizierte.

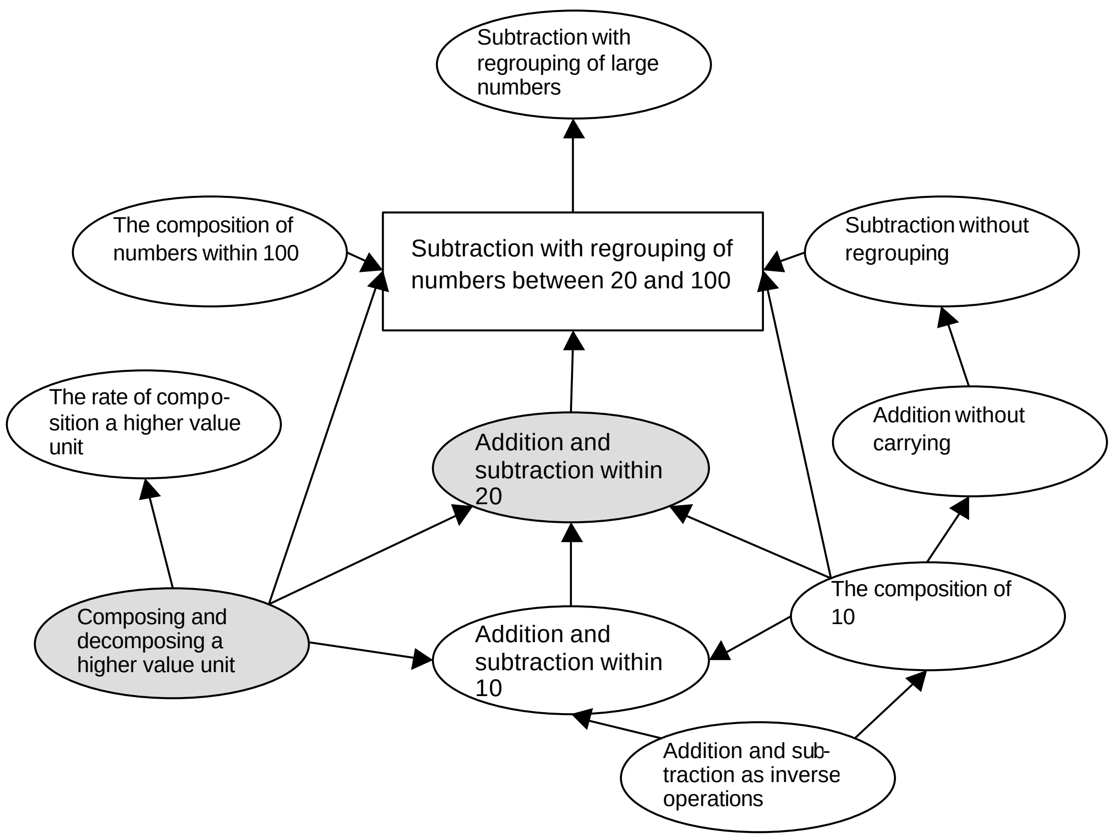


Abb. 9: A „Knowledge package“ for Subtraction with regrouping nach Ma, L. (1999)

Die Ellipsen repräsentieren hier miteinander vernetzte Wissensbausteine, die grau eingefärbten sind als „Schlüssel“ zum Verständnis des von Ma abgefragten Themenbereiches zu sehen. Die Pfeile bedeuten die jeweilige „Unterstützung“ eines Bausteines durch einen anderen. Zu erkennen ist die horizontale („Breite“) genauso wie die vertikale Vernetzung (longitudinal coherence). Letztere wird deutlich durch die vier Bausteine in der Mitte (“sequence”), „addition and subtraction within 10“, „addition and subtraction within 20“, „subtraction with regrouping of numbers between 20 and 100” und “subtraction with regrouping of large numbers”.

> *“…the concept and procedure of subtraction with regrouping develops step-by-step through this sequence, from a primary and simple form to a complex and advanced form.” (ebenda S. 18)*

Dieses Beispiel einer Vernetzung ist allerdings nur als Teil des viel mehr Fachwissen umfassenderen PUFMs zu sehen. Erweitert auf den die Grundschulmathematik umfassenden Bereich wird deutlich, wie tief, breit und gründlich PUFM vernetzt ist (s. Abb. 10).

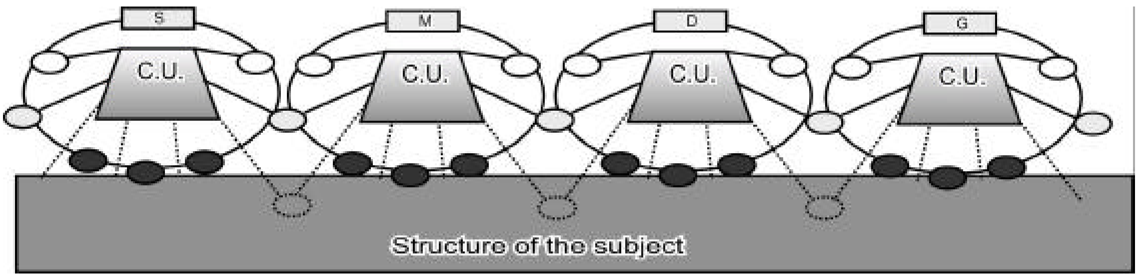


Abb. 10: Profound Understanding of Fundamental Mathematics (Ma 1999, S. 120)

> *"The four rectangles at the top [...] represent the four topics (Subtraction with Regrouping, Multidigit Number Multiplikation, Division by Fractions, Geometry, Anm. des Verf.). The ellipses represent the knowledge pieces in the knowledge packages. White ellipses represent procedural topics, light gray ones represent conceptual topics, dark grey ones represent the basic principles, and ones with dotted outlines represent general attitudes toward mathematics." (Ma 1999, S. 119f.)*

Resümierend lässt sich also feststellen, dass “Profound Understanding of Fundamental Mathematics” nicht nur bloß die „Grundlagen der Mathematik“, die fachwissenschaftlichen Inhalte in Form prozeduraler und konzeptueller Grundbegriffe erfasst, sondern weit darüber hinaus geht: PUFM referiert die engmaschige fachliche und gebrauchsbezogene Vernetztheit der einfachen Begriffe der Elementarmathematik. Diese schließlich bildet in ihrer Ursprünglichkeit die Grundlage für das Verständnis weiterführender mathematischer Teildisziplinen. PUFM schließt auch ein Wissen um den Erkenntnisweg ein, der zu diesen Inhalten führt. Es sei an die Worte Shulmans erinnert („Those who understand, teach.“), die im Rückgriff auf das Konzept PUFM gleichsam in einem neuen Licht zu betrachten sind.

3.6 Verständnisorientierter Unterricht

In ihren Ausführungen über die spezifischen Eigenschaften, über die eine Lehrkraft mit PUFM verfügt, gibt Liping Ma gewissermaßen eine Richtung vor, wie sich „guter“ Mathematikunterricht konstituieren sollte. Diese feine Differenzierung des Begriffs PUFM in den folgenden Ausführungen in jedem Zusammenhang mitzuerwähnen, würde allerdings die eine oder andere Formulierung in ihrem Umfang überdimensionieren.

Der Verfasser bedient sich daher in den weiteren Ausführungen des Begriffs der Verständnisorientierung und beschreibt daher einen Unterricht, der auf der Basis von Profound Understanding of Fundamental Mathematics aufgebaut ist, als verständnisorientierten Unterricht. Dies liegt nahe, da auch im Zentrum der Überlegungen Ma`s das Verständnis steht.
In der Mathematikdidaktik (und nicht nur in dieser Fachdisziplin) ist die Notwendigkeit eines Unterrichts, der vor allem auf das Verständnis seitens der Schüler zielt, schon lange bekannt. Verschiedene Mathematikdidaktiker (Lauter 1995, Radatz/Schipper 1983, Krauthausen/Scherer 2001) formulieren in ihren grundsätzlichen Vorstellungen die Notwendigkeit verständnisorientierten Lernens. Radatz und Schipper betonen den "Mut zur Gründlichkeit":

> *"Was ein Schüler versteht und in Beziehung zu seinen sonstigen Strukturen setzen kann, besitzt den stärksten Übertragungswert und somit auch Bildungswert, nicht aber die vielen verschiedenen Brocken Mathematik, die er oft jede Woche speisen muss und kaum verdauen kann." (Radatz/Schipper 1983, S. 21)*

In dieselbe Richtung argumentieren Krauthausen und Scherer (2001), die darüber hinaus noch eine grundsätzlich forschende Haltung gegenüber dem Fach Mathematik mit einzubringen empfehlen:

"Das entscheidende Unterrichtsprinzip in jedem Fach oder jeder Fächergruppe ist die Vermittlung der Struktur, der 'fundamental ideas', der jeweils zugrunde liegenden Wissenschaften und die entsprechende Wiederholung der Einstellung des Forschers durch den Lernenden, dessen Bemühungen, wie bescheiden sie auch sein mögen, sich nicht der Art, sondern nur dem Niveau nach von der in einer bestimmten Wissenschaft geforderten Forschungshaltung unterscheiden." (Loch: In Bruner 1970, S. 14)

Ebenso beinhalten die meisten mathematikdidaktischen Prinzipien grundsätzlich einen Ansatz, der verlangt, die verschiedenen mathematischen Themen miteinander in Beziehung zu setzen, um so Schüler den "kreativen Aspekt der Mathematik (Überdenken verschiedener Lösungsvermutungen, intelligentes Raten, flexibles und variantenreiches Problemlösen usf.) erfahren zu lassen." (Radatz/Schipper 1983, S. 22)
So verlangt das "Prinzip der Redundanz“ (nach Piaget) die Einbindung des neuen Wissens in bereits vorhandenes, das "Integrationsprinzip" die Integration inhaltlicher Beziehungsnetze (Piaget, Lernen im Zusammenhang), das "Spiralprinzip" (Bruner) die Bearbeitung grundlegender mathematischer Begriffe auf verschieden hohen Niveaustufen und das "Variationsprinzip" schließlich die Erarbeitung eines mathematischen Begriffs nicht nur über ein Modell, sondern über verschiedene didaktische Modelle (Bruner). Radatz und Schipper zitieren noch weitere Prinzipien (Orientierung an Grundideen, Aktiv-entdeckendes Lernen, Exemplarisches Lehren und Lernen u.s.w.) und fügen kritisch hinzu:

"Die Wirkung und Relevanz mathematikdidaktischer Prinzipien sind bislang empirisch kaum untersucht; didaktische Prinzipien sind oft nicht eindeutig, sondern sehr breit interpretierbar, ..."
und:
"Jeder Lehrer entwickelt mehr oder minder unbewusst eigene, subjektive Lehr-Lernprinzipien, durch die die zuvor aufgelisteten Prinzipien relativiert oder ergänzt werden und somit auch eine Reflektionsgrundlage für den eigenen Unterricht bilden." (Radatz/Schipper 1983, S. 26)

Zieht man diese didaktischen Prinzipien zu etwas "Ganzem" zusammen, kristallisiert sich ein Konzept heraus, das, egal welchen Schwerpunkt es auch haben mag, vor allem das Verständnis mathematischer Inhalte (und nicht bloß deren Anwendung) zum Ziel hat. Dass dieses Wissen gegenüber dem verfahrensorientierten Ansatz (vgl. Abschnitt 3.4) entscheidende Vorteile aufweist, vor allem in Hinblick auf die Fähigkeit zum Aufspüren kreativer Lösungen, ist in der heutigen Zeit, in der selbst komplizierte Algorithmen von Maschinen, die für jeden erschwinglich und in jedem Haushalt zu finden sind, bearbeitet werden können, allgemeiner Konsens in der mathematikdidaktischen und mathematischen Fachwelt.

An dieser Stelle sei der Bogen zurück zum Begriff des PUFM gespannt, der ja weitaus differenzierter ist und weiter reicht als die in den vorangegangenen Absätzen dargestellten Ausführungen zum Verständnis. Doch lassen diese deutlich werden, dass verständnisorientierter Unterricht nur auf der Grundlage eines Profound Understanding of Fundamental Mathematics erfolgen kann. Diese Feststellung ist nur scheinbar subtil, bedenkt man, über welches Unterrichts- (vgl. Kap. 2.1 sowie 2.2) und Fachwissen ein "guter" Lehrer verfügen muss, um ihn zu dieser Art von Unterricht zu befähigen.
Um ein Rechenverfahren wie z.B. die schriftliche Subtraktion unterrichten zu können, müssen zunächst einige Grundlagen gesichert sein. Abgesehen von den wirklich elementaren Begriffen der Primarmathematik (Zahlvorstellung, Kardinal- und Ordinalzahlbegriff, Rechnen im Bereich bis 10/bis 20 mit Zehnerübergang) sollten die Schüler das Bündelungsprinzip in unserem Dezimalsystem sowie die damit verbundene Stellenwertschreibweise unserer Zahlen verstanden haben.
Diese Grundlagen, die in Kapitel 4 noch detailliert dargestellt werden, sollten von den Schülern sicher verfüg- und abrufbar sein. Um dies zu überprüfen und ggf. noch zu festigen, sollten wichtige Prozesse noch einmal mit geeignetem Material real handelnd vollzogen sowie zeichnerisch und symbolisch notiert werden. Hierzu eignen sich z.B. Systemblöcke, Spielgeld oder eine Stellentafel und Rechensteine.

Der Aufbau dieser wichtigen Wissensgrundlage erinnert an die Struktur eines Baumes. Im Wurzelbereich befinden sich alle Bestandteile dessen, was zur Schilderung eines Verständniskerns notwendig ist. Hierzu zählt im Grundschulbereich vor allem die Überprüfung primärer Grundlagen, z.B. das Wissen um die Zusammensetzung der Zahl 10 als Voraussetzung für spätere Bündelungsaktivitäten.
Auf dieser Grundlage kann sich dann, im Lauf der Lerngeschichte eines Individuums, ein fein verästeltes, miteinander verbundenes (vernetztes) Faktenwissen (z.B. Algorithmen) oder auch Systemwissen, eben Profound Understanding of Fundamental Mathematics, entwickeln.

3.7 *Schlussfolgerungen*

Verhaltenstheoretische Konzepte (klassische Konditionierung, Kontiguitätslernen, operante Konditionierung) vermögen zwar einfache Lernvorgänge zu erklären, sind aber überfordert, wenn es darum geht, komplexe, anspruchsvolle Lernleistungen – schulisches Lernen – zu begründen.
Das Konzept der Bloomschen Taxonomie hierarchisiert intellektuelle Operationen nach ihrem Komplexitätsgrad und macht sie so einer didaktischen Ordnung zugänglich; das Konzept des "meaningful verbal learning" (Ausubel) betont die Wichtigkeit der Kenntnis um das bereits vorhandene Wissen und dessen strategische Nutzung in dem Sinne, dass Nähe des neu zu Lernenden zur vorhandenen kognitiven Struktur der Schüler bewusst gesucht wird. Das Bild eines „Wissensnetzwerks" liegt dieser Strategie zugrunde, in das hinzukommende Informationen einzufügen sind (die „durchfallen" würden, wäre das Netz nicht „engmaschig" genug).
Sämtliche komplexe, kognitive Lernmodelle haben eine gemeinsame Grundlage: die Notwendigkeit, das zu Erlernende zu verstehen. Steht dies in der Hierarchie Blooms schon an zweiter Stelle, so macht Zech den „Verständniskern" zur Basis jeden sinnvollen Lernens.
Sinnvoll gelernt werden kann nur, wenn der Unterrichtsgegenstand verstanden worden ist. Das legt die These nahe, dass nur derjenige überzeugend zu unterrichten vermag, der den jeweiligen Gegenstand wirklich „durchdrungen" und ein tiefes Verständnis von ihm ausgeprägt hat.
Dieses tiefe, konzeptuelle Wissen - im Rahmen dieser Arbeit bezogen auf die Primarmathematik - ist Bestandteil eines Profound Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM).
Der Begriff des PUFM wird vom Verfasser in der von Ma im Rahmen ihrer Studie „Knowing and teaching elementary mathematics" (Ma 1999) geprägten Form verstanden. Hiermit ist nicht nur das Wissen um mathematische Zusammenhänge und Fakten gemeint, sondern darüber hinausgehend eine engmaschige Verknüpfung mathematischer Wissensbausteine („knowledge packages"), beruhend auf einer besonderen Haltung („attitudes") gegenüber dem Fach Mathematik.
Die Definition des PUFM nach Ma kann durchaus richtungsweisend gesehen werden: Die besondere Struktur des Fachwissens und die Fähigkeit, dieses in bestimmter Art und Weise einzusetzen, konstituiert gewissermaßen einen qualitativ besonders hochwertigen Unterricht. Der feinen Ausdifferenzierung des Begriffs PUFM erwächst jedoch die Schwierigkeit, den auf diesem Wissen basierenden Unterricht in spezifischer Weise zu benennen. Da im Mittelpunkt aller Überlegungen Mas das Verständnis steht, das

sich in der Vernetztheit verschiedener Wissensbausteine und der hinterfragenden Herangehensweise manifestiert, verwendet der Verfasser in den folgenden Ausführungen den Begriff des Verständnisorientierten Unterrichts, der in diesem Zusammenhang zu sehen ist als ein Unterricht, der auf dem von Ma definierten PUFM aufbaut.

4 Fachwissenschaftliche Grundlagen und Algorithmen

Im vorangegangenen Kapitel ist deutlich herausgearbeitet worden, dass „Profound Understanding of Fundamental Mathematics“ (PUFM) die Grundlage „guten“, verständnisorientierten Unterrichts darstellt. Im Rahmen dieser Untersuchung analysiert der Verfasser vor allem das PUFM von Lehrkräften in Zürich und Hamburg in Bezug auf die schriftliche Subtraktion, die Multiplikation und - tangential - Primargeometrie (Flächenberechnung). Die fachwissenschaftlichen Grundlagen, die für ein solches Verständnis der zu vermittelnden Verfahren notwendig sind, sollen im Folgenden referiert werden.

4.1 Aspekte des Zahlbegriffs

Der Begriff "Zahl" kann als komplexes Konstrukt gesehen werden, das aus verschiedenen Teilaspekten besteht, die sich gegenseitig ergänzen (Neubrand/Möller 1999, Freudenthal 1973, Müller/Wittmann 1984, Padberg 1997, u.a.). Diese Teilaspekte sollen im Folgenden kurz referiert werden.

1. Ordinalzahlen
dienen der Beschreibung einer Reihenfolge und geben somit Antwort auf die Frage „der oder die wievielte?“. Die Ordinalzahlen selbst lassen sich wiederum in zwei Arten trennen:

a) Ordnungszahlen
   bestimmen die Reihenfolge innerhalb einer (total geordneten) Reihe, z.B.: "*Fabienne liegt beim Wettlauf an 3. Stelle.*"
b) Zählzahlen
   beschreiben die Reihenfolge (natürlicher) Zahlen innerhalb einer Reihe: "*Eins, zwei, drei,...*". Um diesen Zählprozess zu durchlaufen, ist nicht unbedingt eine reale oder vorgestellte zu zählende Menge notwendig, er kann auch unabhängig davon vollzogen werden.

2. Kardinalzahlen
Diese dienen der Beschreibung von Anzahlen, geben Antwort auf die Frage "wie viele?". Beispiel: "*Du hast 5 Bonbons*"

3. Maßzahlen

Natürliche Zahlen können zusammen mit Einheiten der Quantifizierung von Größen dienen und geben somit Antworten auf die Fragen „*wie lang?*“, „*wie groß?*“, „*wie viel wert?*“ etc.

4. Operatoren

Hier dienen natürliche Zahlen der Beschreibung der Vielfachheit eines Vorgangs. Sie liefern somit Antworten auf die Frage „*wie oft?*“.

5. Rechenzahlen

Hier werden Zahlen als Objekte behandelt, die bestimmten Regeln unterworfen sind. Auch diese können wiederum unter zwei verschiedenen Aspekten betrachtet werden:

a) Algorithmischer Aspekt
   Die natürlichen Zahlen werden als Ziffernreihen in Stellenwertsystemen dargestellt, mit denen man Rechenoperationen mit Hilfe von Algorithmen, z.B. der schriftlichen Subtraktion, durchführen kann.
b) Algebraischer Aspekt
   Beschreibt bestimmte Eigenschaften der natürlichen Zahlen beim Rechnen, z.B. 8+5=5+8

6. Zahlen als Codes

Hier dienen natürliche Zahlen der Kennzeichnung. Sie sind somit Antworten auf die Frage: „welche Nummer?“. Beispiele: "Ich habe die Telefonnummer 46073883"; "Hamburg-Winterhude hat die PLZ 22299"

Eine differenzierte Auseinandersetzung mit der mathematischen Begründung der natürlichen Zahlen (und vor allem der Schwierigkeiten innerhalb verschiedener Zugänge) ist im Hinblick auf das Ziel der Arbeit nicht erforderlich. Es sei an dieser Stelle auf Freudenthal und Wittmann verwiesen, die sich hiermit ausführlich auseinandersetzen und beschreiben, wie sich die natürlichen Zahlen aus der Mengenlehre (Kardinalzahlen), aus Größenbereichen (Operatoren) oder aus axiomatischen Forderungen (Ordinalzahlen) begründen lassen.
Im Gegenteil ist eine zu einseitige Betrachtung des Zahlbegriffs in der Primarstufe auch nicht förderlich. Bezugnehmend auf den Unterricht in der Grundschule resümieren Müller & Wittmann daher:

"Für den Unterricht kommt es darauf an, den Zahlbegriff vielseitig zu entwickeln und insbesondere das Zählen und Rechnen stets mit Sinn und Bedeutung zu füllen."

Und weiter:

"Keine der mathematischen Begründungen ist als Vorbild für die Einführung der natürlichen Zahlen in der Schule geeignet, weil

a) die Methodenreinheit mathematischer Begründungen der Komplexität des Zahlbegriffs nicht Rechnung trägt,

b) *der logische Aufbau für die psychologische Bildung des Zahlbegriffs irrelevant ist."*

4.2 *Rechenoperationen zu Grunde liegende Vorstellungen*

Je nach zugrundeliegendem Zahlaspekt basieren Rechenoperationen auf verschiedenen grundlegenden Vorstellungen. Auf diese Weise erhalten sie unterschiedliche Bedeutungen.

4.2.1 Subtraktion

Die wohl natürlichste und naheliegendste der Subtraktion zugrunde liegende Vorstellung ist die des "Wegnehmens" oder "Abziehens" (**kardinaler Aspekt**). Aus einer vorhandenen Menge an Einheiten wird eine bestimmte *Anzahl* entfernt. In diesem Fall ist die Differenz die Menge, die "übrig bleibt" (s. Abb. 11a). Eine weitere Bedeutungsvariante des Kardinalzahlaspekts im Rahmen der Subtraktion ist die des Ergänzens. Es soll ermittelt werden, wie viele Elemente noch fehlen, um eine Menge einer bestimmten Mächtigkeit zu erhalten (s. Abb. 11b).

Abb. 11 a und b: kardinaler Aspekt der Subtraktion

Eine lineare Veranschaulichung dieser Grundidee wäre demnach folgendermaßen vorstellbar (Abb. 12a und b):

Abb. 12 a und b: kardinaler Aspekt der Subtraktion (linear)

Legt man den **Ordinalzahlaspekt** zugrunde, gründet sich die Idee der Subtraktion in der Ermittlung der Differenz durch Weiterzählen oder Zurückzählen (s. Abb. 13):

Abb. 13: Ordinaler Aspekt der Subtraktion

Eine für das Verfahren der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag unter Umständen (je nach Verfahrensweise) sehr wichtige Idee ist diese, die im **Maßzahlaspekt** begründet liegt: Wie groß ist der Unterschied? Wie in der Abb. 14 gut zu erkennen ist, kann der Unterschied (hier zwischen zwei bestimmten Punkten der Länge zweier Strecken) gleich bleiben, auch wenn sich die Anfangs- oder Endpunkte der Strecke und damit die gesamte Länge verändert hat. Diese Erkenntnis der "Konstanz der Differenz" ist wichtig für das Verständnis der Entstehung des Übertrags unter Zuhilfenahme des "gleichsinnigen Ergänzens".

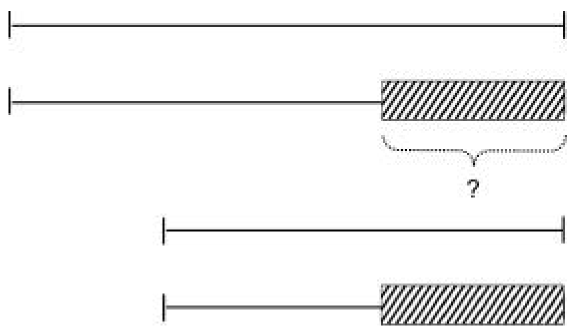


Abb. 14: Maßzahlaspekt der Subtraktion im Zusammenhang mit der „Konstanz der Differenz“

Ebenfalls kann die Subtraktion verstanden werden als Frage danach, wie oft eine bestimmte Menge oder Einheit einer vorhandenen noch hinzugefügt oder von ihr abgezogen werden soll (**Operatoraspekt**):

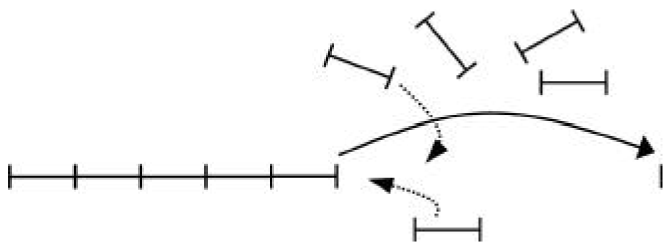


Abb. 15: Operatoraspekt der Subtraktion

Schließlich ist die Subtraktion natürlich vorstellbar als formale Darstellung:

9 – 4 = 5 oder: 9 + ? = 4

Neben diesem **algorithmischen Rechenaspekt** werden im Rahmen bestimmter **algebraischer** Notierungen auch bestimmte Gesetzmäßigkeiten oder Bestimmungen der Subtraktion festgehalten, wie z.B. die Eigenschaft als **Umkehrung der Addition**:

> *"Existiert zu zwei natürlichen Zahlen a und b eine natürliche Zahl x, die die Gleichung $a+b=x$ erfüllt, so heißt $x=b-a$ Differenz von b und a."*
> *(Schäfer/Georgi/Trippler 1999, S. 12)*

Der Codierungsaspekt findet in der Subtraktion keine Beachtung. Es machte wenig Sinn, z.B. Scheckkarten-Codierungen voneinander zu subtrahieren – das Ergebnis hätte keine Bedeutung, es sei denn, dieser Rechenvorgang wäre Teil des Codierungsvorganges. An dieser Stelle ist gut zu erkennen, wie sich zwei Zahlaspekte (Rechenzahlaspekt und Codierungsaspekt) miteinander "mischen" können.

4.2.2 Multiplikation

Wie im Fall der Subtraktion ist auch bei der Multiplikation eine Anwendung im Sinne des Codierungsaspekts sinnlos. Dies betrifft auch eine mögliche Verwendung unter ordinalen Aspekten.

Die Multiplikation im Sinne des **Maßzahlaspekts** erhält hingegen eine besondere Bedeutung. Zwei miteinander multiplizierte Maße können eine neue Maßeinheit determinieren:

$cm \cdot cm = cm^2$ oder auch $A_o = p \cdot r^2$ (Kreisflächen-Berechnung)

Im Verwendungszusammenhang mit dem **Operatoraspekt** antwortet die Multiplikation auf die Frage "wie oft" mit "jeweils". Beispiel:

4 · ? = 12 (viermal jeweils drei ist das Gleiche wie zwölf)

Auch im **kardinalen Aspekt** findet die Multiplikation im Bereich der Primarstufe wohl ihre häufigste Grundlegung und Anwendung. So kann sie dazu dienen, Anzahlen einer Gesamtmenge mit Hilfe gleich großer Teilmengen zu berechnen:

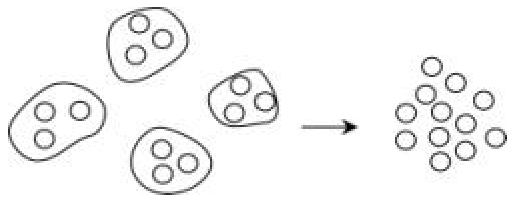


Abb. 16: Kardinaler Aspekt der Multiplikation (I)

In einem rechteckig angeordneten Feld lässt sich die Anzahl von Elementen ebenso mit Hilfe der Multiplikation bestimmen: dreimal vier Kreise, oder: drei Kreise viermal.

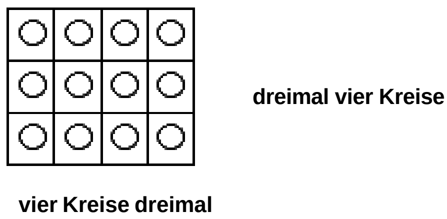


Abb. 17: Kardinaler Aspekt der Multiplikation (II)

Im ersten Moment des Betrachtens lässt sich hier eine gewisse Ähnlichkeit des kardinalen Aspekts mit dem ordinalen vermuten (dreimal jeweils vier Kreise), die Zahlaspekte sind jedoch inhaltlich völlig verschieden. Dies wird ersichtlich, bedenkt man, dass ebenso wie Addition und Subtraktion in enger Verbindung zueinander stehen, auch Multiplikation und Division als "multiplikative Operationen" zusammengehören: Die Division wird oft eingeführt als die Umkehrung der Multiplikation.
Hierbei können aber gewisse Schwierigkeiten auftreten. In der oben als Beispiel angeführten Aufgabe $3 \cdot 4 = 12$ können entweder 3 und 12 als Kardinalzahlen und 4 als Operator oder 4 und 12 als Kardinalzahlen und 3 als Operator gedeutet werden. Genauer:
Die Umkehraufgabe von $3 \cdot 4 = 12$ lautet $12 \cdot ? = 3$

Formal als Divisionsaufgaben bedeutet dies: 12 $\div$ 3 = ?

Je nach Verwendungssituation kann dies bedeuten:

12 *aufgeteilt* in Gruppen zu 3 = 4 Gruppen
oder
12 *verteilt* auf 3 Gruppen = 4 (je Gruppe)

Im ersten Fall ist die Situation im Sinne des Operatorenaspekts zu sehen, im zweiten Fall im Sinne des Kardinalzahlaspekts.
Müller und Wittmann berichten, dass es früher in der Grundschule sogar üblich war, die beiden unterschiedlichen Fälle durch eigene Zeichen zu erfassen (vgl. Müller/Wittmann 1984, S. 189). Dies ist heutzutage nicht mehr der Fall, die Division ist in einer Sprachform (12 $\div$ 3 = 4) festgelegt, die je nach Kontext verschiedene Bedeutungen tragen kann.

Ebenso ist die Multiplikation unter Sichtweise des **Rechenaspekts**, bezogen auf die Division als multiplikative Operation, nicht ganz unproblematisch. Dies offenbart sich bei einer Betrachtung des algebraischen Aspekts als Teil des Rechenzahlaspekts:

$$a \cdot b = c$$

gilt für alle natürlichen Zahlen a, b und c. Ist jedoch b kein Teiler von c, wäre die Frage „Wie viel mal a ist das gleiche wie c?“ nur in bestimmten Fällen beantwortbar. Ein Beispiel: Die Gleichung

$$3 \cdot ? = 17$$

ließe sich nur im Bereich der Natürlichen Zahlen nicht lösen, erst eine Bruchzahl machte eine Lösung möglich ($\frac{17}{3}$).

Es ist also nicht $a \div b$ für alle natürlichen Zahlen definiert. Aber auch in der Primarmathematik müssen Aufgaben bewältigt werden, innerhalb derer "b" nicht der natürliche Teiler von "a" ist. In den meisten Mathematikbüchern der Grundschule wird dieses Problem der fehlenden rationalen Zahlen mit Hilfe der "Rest-Schreibweise" gelöst:

$$17 \div 3 = 5R2$$

Diese Schreibweise kann jedoch einen Widerspruch zum Verständnis der Bedeutung des Gleichheitszeichens darstellen:

$$17 \div 3 = 5R2 \quad \text{und} \quad 42 \div 8 = 5R2 \quad \Rightarrow \; 17 \div 3 = 42 \div 8$$

Diese Unvereinbarkeit ist jedoch nur vorübergehend und wird später mit der Einführung der Brüche und der Bruchschreibweise aufgelöst:

$$17 \div 3 = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

4.3 *Das Dezimalsystem – Systematik der Stellenschreibweise*

Will man Verfahren wie das der schriftlichen Subtraktion verstehen, muss man zunächst den Aufbau unseres Zahlensystems begriffen haben.
Unserem dekadischen Stellenwertsystem liegt eine Bündelung von zehn einzelnen Elementen zu je einem neuen Element einer dann höheren "Wertebene" oder der "Entbündelung" eines Elementes in zehn einzelne einer niedrigeren Wertebene zugrunde. Die Entscheidung, genau *zehn* Elemente zu einem neuen zusammenzufassen, ist historisch begründet.

So wäre vorstellbar, dass sich z.B. anstelle des indisch-arabischen dekadischen Systems, das im Mittelalter angesichts seines "heidnischen" Ursprungs heftig bekämpft wurde, das römische Ziffernsystem durchgesetzt hätte (was aber, wie wir ja heute wissen, nicht der Fall war).

Das Dezimalsystem stellt nur eine von vielen Möglichkeiten dar, dieselbe Zahl zu schreiben. Eine andere Variante wäre z.B. die Notation in einem Zweier- oder Vierersystem.

"Jede natürliche Zahl a lässt sich mittels einer 'Grundzahl' g ($g \in N,\; g \geq 2$) darstellen als

$$a = z_k \cdot g^k + z_{k-1} \cdot g^{k-1} + ... + z_1 \cdot g + z_0 ,$$

wobei die 'Ziffern' $z_0, ... ,\; z_k$ aus {0, 1, ..., g -1} genommen sind." (Neubrand/Möller 1999, S. 157)

Eine auf diese Art und Weise dargestellte Zahl a wird zunächst in z Bündel von je g ("Stufenzahl", im Zehnersystem ist g = 10) zusammengefasst, wobei z_0 übrigbleibt (für $z_0 < 10$). Ein Beispiel: Im Zehnersystem lässt sich die natürliche Zahl 23596 darstellen als $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$.
Die gleiche Zahl im Vierersystem darzustellen, bedeutete
$1 \cdot 4^7 + 1 \cdot 4^6 + 3 \cdot 4^5 + 0 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0$,
in Ziffernschreibweise also 11300230.

Keine der verwendeten Ziffern ist hier größer als 4, was sich in der Stufenzahl g begründet: Die Zahl a (hier 23596) wird zunächst aufgeteilt in Viererbündel, diese Bündel werden dann wieder zusammengefasst zu je 4 u.s.w., bis schließlich weniger als 4 Elemente übrigbleiben. Rechnerisch dargestellt ergibt sich folgendes Bild:

23596	= 5899 x 4 + **0**	(→ 0 mal die Stufenzahl 4^0)
5899	= 1474 x 4 + **3**	(→ 3 mal die Stufenzahl 4^1)
1474	= 368 x 4 + **2**	(→ 2 mal die Stufenzahl 4^2)
368	= 92 x 4 + **0**	(...)
92	= 23 x 4 + **0**	(...)
23	= 5 x 4 + **3**	(...)
5	= 1x 4 + **1**	(...)
1	= 0 x 4 + **1**	(→ 2 mal die Stufenzahl 4^7)

Eine Variante der hier dargestellten Rechnung könnte sein, sich zunächst die größtmögliche in der Zahl vorhandene Stufenzahl zu suchen (4^k), um anschließend gerade so viele wie möglich von dieser Zahl wegzunehmen. Von den übrigbleibenden werden nun entsprechend so viele Elemente der Stufe 4^{k-1} wie möglich abgezogen, u.s.w.

Eine andere Darstellungsform der Stellenwerte ist die mit Hilfe der Stellenwerttabelle; sie findet auch in der Primarstufe Anwendung. In dieser Tabelle steht jede Spalte für einen bestimmten Wert, sodass die Ziffern einer Zahl an einer bestimmten *Stelle* einem bestimmten *Wert* zugeordnet werden können:

ZT (10^4)	T (10^3)	H (10^2)	Z (10^1)	E (10^0)
2	3	5	9	6

entsprechend

(4^7)	(4^6)	(4^5)	(4^4)	(4^3)	(4^2)	(4^1)	(4^0)
1	1	3	0	0	2	3	0

Diese schon verkürzte Stellenwertschreibweise setzt voraus, dass die Bündelung von Elementen zuvor erfolgt ist und erst diese dann durch Ziffern repräsentiert werden (hier am Beispiel der Zahl 258):

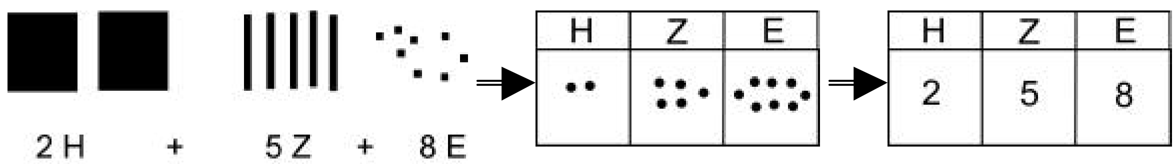


Abb. 18: Bündelung von Elementen und Repräsentation durch Ziffern in Stellenschreibweise

Die Bündelung auf dieser Darstellungsebene erfolgt genauso, wie zuvor algebraisch dargestellt: Man hat zunächst eine bestimmte Anzahl von Elementen (hier: schwarze Kreise, im folgenden "Plopp" (P) genannt), die man immer zu je 10 bündelt. Eventuell bleiben bei dieser Bündelung einige P übrig; dies sind in unserem dekadischen System dann die "Einer" (im oberen Beispiel 8). Die gewonnenen P-Zehnerbündel werden jetzt wieder zu je 10 gebündelt, es entstehen P-Hunderter, einige bleiben übrig (hier: 5) u.s.w..

Addition oder Subtraktion entsprechen in dieser Darstellung dem Hinzufügen oder Wegnehmen eines oder mehrerer Ps. Entscheidend ist hierbei, an welcher Stelle dies geschieht, denn davon hängt der Wert oder die Anzahl der hinzuzufügenden oder wegzunehmenden Elemente ab. Wird zum Beispiel an der Hunderterstelle ein P hinzugefügt, entspricht dies einer Menge von 100 Elementen.
Die Veränderung der Position eines P kann den Wert der Gesamtmenge entscheidend verändern. "Entnimmt" man z.B. der Zehnerspalte eines und legt dies in die Hunderterspalte, so wird die Anzahl der Elemente zunächst um 10 verringert, im gleichen Zuge jedoch um 100 erhöht, was insgesamt eine Erhöhung um 90 Elemente zur Folge hat.

Die grundsätzliche Vorstellung, Zahlen auf diese Art und Weise zu repräsentieren bzw. deren Aufbau so verständlich zu machen, spielt beim Erlernen und dem Verständnis schriftlicher Rechenverfahren eine erhebliche Rolle. Vor allem die Erkenntnis, dass nach dem Hinzufügen von Ps eventuell wieder neu gebündelt werden muss oder, um abziehen zu können, einige Ps einer höheren Wertigkeit zurückgetauscht werden müssen, ist eine wichtige Grundlage für das Verstehen der im Folgenden vorgestellten Algorithmen.

4.4 *Einblick in verschiedene Erklärungsansätze der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag*

Wie in den vorangegangenen Abschnitten dargestellt wurde, gibt es eine Reihe von verschiedenen Situationen, im Rahmen derer die Subtraktion verschiedene Bedeutungen haben kann, die wiederum in den verschiedenen Zahlaspekten begründet sind. In den meisten Fällen machen Kinder jedoch erste Erfahrungen mit der Subtraktion, indem sie diese verstehen als eine Handlung, bei der von einer vorhandenen Menge etwas weggenommen wird.

In der Primarstufe oder den konkret operationalen Handlungen im Vorschul- und Kleinkindalter bedeutet dies z.B. 5 – 3 = 2. Später wird diese Anwendung auch auf zwei- und mehrstellige Zahlen ausgeweitet: 45 – 13 = 32. Um letztere Aufgabe zu rechnen, brauchen die Schüler einfach nur die Einer von den Einern und entsprechend die Zehner voneinander abzuziehen. Wenn jedoch eine Ziffer in der gleichen Wertebene beim Minuenden kleiner ist als beim Subtrahenden (z.B. 67 – 59), können Schüler solch eine Rechnung nicht direkt durchführen. Um sie dennoch lösen zu können, sind verschiedene Strategien denkbar.

Im Folgenden werden zunächst verschiedene Standardverfahren dargestellt, so wie sie auch in Lehrwerken und Lehrerhandbüchern herbei geführt werden. Eine Lehrkraft, die auf der Grundlage des Profound Understanding of Fundamental Mathematics unterrichtet, sollte aber auch darauf eingerichtet sein, dass von den Schülern Lösungen oder Verfahren entwickelt werden, die von diesen Standardzugängen abweichen. Ein Beispiel hierfür wird im Anschluss an die Standardverfahren vorgestellt.

4.4.1 Gleichsinniges Ergänzen

Der Algorithmus des gleichsinnigen Ergänzens folgt dem Verständnis, dass sowohl Minuend als auch Subtrahend um den gleichen Betrag "erweitert" werden, d.h. es wird ein gleichwertiger Betrag addiert. Die Differenz der so erweiterten Zahlen bleibt gleich, das Einfügen der erweiternden Beträge auf unterschiedlichen Wertebenen ermöglicht jedoch erst das stellenweise Subtrahieren.

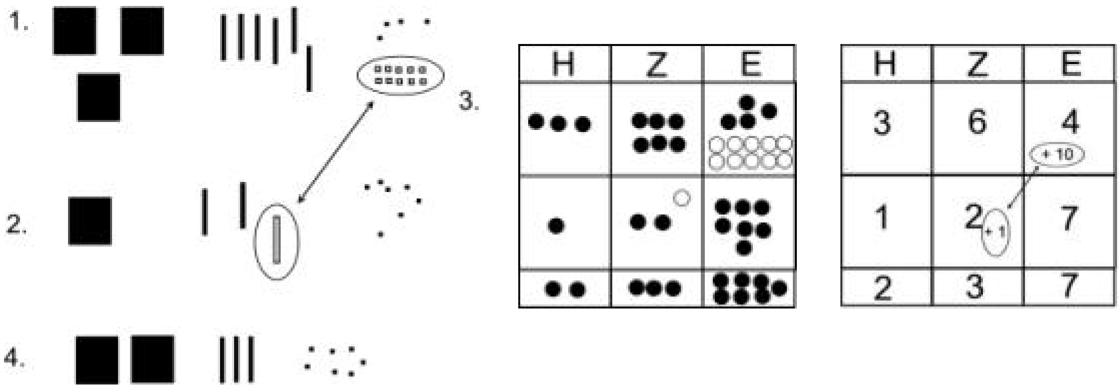


Abb. 19: Funktionsweise des gleichsinnigen Ergänzens

Dieser Vorstellung der schriftlichen Subtraktion liegt die "Konstanz der Differenz" zugrunde (Maßzahlaspekt), d.h. der Wert der Differenz ändert sich nicht, wenn man sowohl beim Minuenden als auch beim Subtrahenden den gleichen Wert hinzufügt oder abzieht.
In der Schematisierung der Subtraktionsaufgabe 364 – 127 (s.o. Abb. 22) ist zu erkennen, wie sowohl dem Minuenden (1.) als auch dem Subtrahenden (2.) der gleiche Wert (3.), nämlich 10 Elemente, hinzugefügt wird. Dadurch, dass dies in verschiedenen Stellenwerten geschieht, wird ein anschließendes "Wegnehmen" erst möglich.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass ikonische Darstellungen zwar dem Verständnis dienen, ohne eine begleitende, treffende Erklärung oftmals jedoch auch irreführend sein können. Dies betrifft vor allem dynamische Prozesse, die zweidimensional dargestellt werden und meistens mit Hilfe von Pfeilen veranschaulicht werden - so wie auch geschehen in Abb. 19, 20 und 22. Vor allem Pfeile können alles mögliche bedeuten, Dynamik, Sinnzuschreibung, Bedeutungswandel u.a. und bedürfen daher, wie hier in den Erklärungen zu den Abbildungen geschehen, einer eindeutigen Definition oder eindeutigen Einbettung in den Gesamtzusammenhang.

Wie in Abschnitt 5.2.1 dargestellt, kann die Subtraktion in einer Anwendungssituation im Rahmen des Kardinalzahlaspekts handelnd gedacht nicht nur "Wegnehmen" bedeuten, sondern auch das Ermitteln der Differenz, als das "Hinzulegen" von dem, was noch fehlt.
Der Algorithmus der schriftlichen Subtraktion mit Hilfe des gleichsinnigen Ergänzens ist also in zwei Richtungen denkbar: als Abziehen ("von oben nach unten") und als Ergänzen ("von unten nach oben").

4.4.2 Auffüllverfahren

Der Name dieser Methode ergibt sich aus der Idee, die betreffende Stelle des Subtrahenden so lange "aufzufüllen", bis die Endziffer dieser Stelle mit der des Minuenden übereinstimmt. Der so erlangte "Überschuss" wird als "Übertrag" in der nächsten Stelle notiert (vgl. Abb. 22).

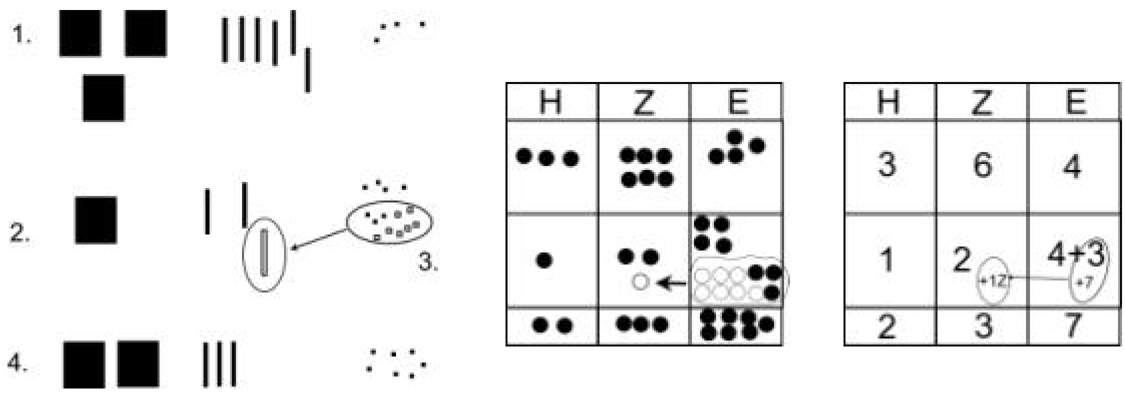


Abb. 20: Funktionsweise des Auffüllverfahrens

Dieses Verfahren bietet auf der einen Seite eine gute Erklärungsmöglichkeit des "Übertrag"-Begriffs, da man unmittelbar erkennen kann, wie zehn Einer aus der entsprechenden Stelle in die Zehnerspalte "übertragen" werden.

Auf der anderen Seite ist es unbedingt nötig, zunächst die dem Verfahren zugrundeliegende Vorstellung durchdrungen zu haben, da sonst leicht der Eindruck entstehen könnte, es handele sich bei dem Ergänzen – in diesem Fall in der Einerspalte – um einen nicht erklärbaren Widerspruch: Es würde von einer größeren zu einer kleineren Zahl ergänzt, was innerhalb der natürlichen Zahlen nicht möglich wäre. Insofern kann eine ikonische Darstellung des Verfahrens, so wie die meisten Schulbücher es beinhalten, recht ungünstig sein, weil es auf diesem Wege für die Schüler nur schwer nachvollziehbar ist. Besser eignet sich hierfür das von Wittmann selbst im Lehrerhandbuch zur Erklärung herangezogene Zählermodell:

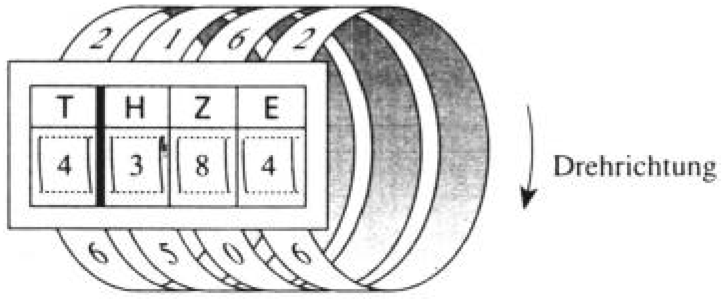


Abb. 21: „Zählermodell“ nach Wittmann et al. 1996

"Als Ausgangspunkt und dauerhafte Verständnisgrundlage dient eine den Kindern bekannte Anwendungssituation für das Ergänzen: der Kilometerzähler (Auto, Fahrrad). Wenn man seine Funktionsweise analysiert, mit Plättchen an der Stellentafel nachlegt und ein Zählermodell mit Papier nachbaut [s. Abb. 24, d. Verf.]*, so ergibt sich völlig einsichtig das von der KMK-Konferenz vorgeschriebene Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Wie schon bei der Einführung des Ergänzens auf Seite 8/9 hervorgehoben, handelt es sich beim Ergänzen um ein `Wegnehmen von unten', also um eine wirkliche Subtraktion, deren Ergebnis additiv berechnet wird.*

Anwendungsbeispiel:

Zählerstand bei der Abfahrt: 378

Zählerstand bei der Ankunft: 634

Man kann das Weiterdrehen des Zählers wie folgt beschreiben:

- *6 Einer dazu, Zwischenstand 384, Zehner um 1 weitergesprungen (Übertrag beim Zehner)*
- *5 Zehner dazu, Zwischenstand 434, Hunderter um 1 weitergesprungen (Übertrag beim Hunderter)*
- *2 Hunderter dazu, Endstand 634.*

Insgesamt hat sich der Zähler um 6 Einer, 5 Zehner und 2 Hunderter, also um 6+50+200=256 weitergedreht." (Wittmann et al. 1996, S. 169f.)

Entscheidende Erkenntnis hierbei ist die Dynamik des Modells, die jeweils *zwei* Stellenwerte fokussiert: Ergänzt man beim Subtrahenden die Einerstelle um 6, so ist *im gleichen Moment* die Zehnerstelle um einen Zehner erhöht worden, so dass schon in der Zehnerspalte der Unterschied automatisch um 1 Z kleiner geworden ist (Übertrag). Diese Gleichzeitigkeit ist in einer ikonischen Darstellung nicht zu vermitteln und kann daher schnell zu Missverständnissen bei den Schülern oder Lehrern führen.

4.4.3 Eintauschen in höheren Wertebenen

Dieses Verfahren geht von der "natürlichen" Rechenrichtung aus. Theoretisch kann zwar auch ergänzend subtrahiert werden, diese Variante wird jedoch in keinem mir bekannten Lehrwerk vorgestellt und würde auch dem Verfahren eben diesen Vorteil der Unterstützung der natürlichen Rechenrichtung nehmen.
Es wird also in den meisten Fällen "von oben nach unten" gerechnet und somit für die Schüler gut nachvollziehbar auch tatsächlich eine Zahl von der anderen abgezogen. Sollte beim stellenweisen Subtrahieren die obere Zahl (s. Abb. 25 die Elemente bei 1.) kleiner sein, wird aus der nächst höheren Wertebene eine Einheit eingetauscht (Zehnerbalken bei 3.). Die Subtraktion von 137 (2.) wird erst jetzt möglich.

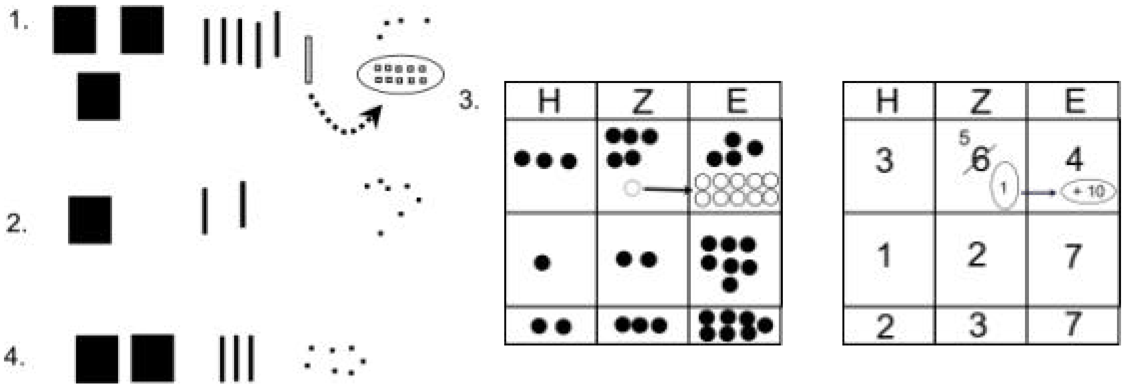


Abb. 22: Funktionsweise des Eintauschverfahrens

4.4.4 Normabweichende Erklärungsansätze

Wie schon weiter oben erwähnt, sollte eine Lehrkraft mit PUFM allerdings auch auf unkonventionelle Erklärungswege eingerichtet sein. Alternative Erklärungen und Lösungsansätze sind auf verschiedenste Art und Weise denkbar und, das ist wohl das wichtigste, nicht vorhersehbar. Gerade das Verständnis für und das Wissen um ganz andere, kreative Herangehensweisen an ein (mathematisches) Problem macht ja eine der „Stärken“ von PUFM aus.
Ein Beispiel für solch eine von den Standardverfahren abweichende Lösung sei das sogenannte "Funny-Counting", das Jennings (1998) in ihrem Lehrbuch im Zusammenhang mit dem Eintauschverfahren propagiert. Hierbei verzichtet sie auf die Einführung des Verfahrens auf ikonischer Ebene. Anstatt jeweils zehn Einer immer wieder neu zu bündeln und dies auch sprachlich zum Ausdruck zu bringen (10, 20, 30, 40, ...), zählt sie weiter. In einer Lehrerhandanweisung legt sie den unterrichtenden Lehrern Folgendes in den Mund:

"Zero; one; two, ..., thirty-eight. After eight is nine. No problem. Thirty-nine; thirty-ten; thirty-eleven; thirty-twelve; thirty-thirteen; thirty-fourteen; thirty-fifteen.
This [point to 40] is thirty-ten. It is thirty and ten. This [point to 41] is thirty-eleven. This …" (Jennings/Dunne 1998, S. 39f.)

Mit dieser Erklärung umgeht sie geschickt eine Entbündelung, macht aber im gleichen Moment deutlich, dass in der Einerspalte zehn zusätzliche Einer erforderlich sind, um die Aufgabe zu lösen.

Wie dieses Beispiel auch zeigt, dürften sich viele alternative Erklärungen auf die Art und Weise beziehen, wie der Minuend umgeformt wird, um den Subtrahenden möglichst geschickt abzuziehen. Die Standardverfahren sehen in diesem Zusammenhang eine „Rechenrichtung“ von rechts nach links vor, d.h. das Verfahren „beginnt“ bei den Einern und wird über die nächsthöheren Dezimalstellen fortgeführt. Dies entspricht allerdings überhaupt nicht der „natürlichen“ Lese- und Rechenrichtung.
Ein Beispiel: Wird im Mathematikunterricht der Grundschule die Subtraktion mit zwei Zehnerzahlen eingeführt, werden oftmals zunächst die Zehner und dann die Einer subtrahiert:

$$45 - 29 = 45 - 20 - 9 = 16$$

Dementsprechend liegt es nahe, dass Schüler, sollten sie dieses Können auf ein Verfahren in Spalten anwenden, ebenfalls zunächst mit den Zehnern beginnen - was grundsätzlich möglich und richtig ist. Auf diese Weise erhielte man zunächst die Differenz von 2 Zehnern,

$$\begin{array}{ccc} & 4 & 5 \\ - & 2 & 9 \\ & 2 & \\ \hline \end{array}$$

hätte jedoch zugleich das Problem, nun die Einer nicht mehr voneinander abziehen zu können. Nun müsste von den 2 Zehnern also einer „eingetauscht“ werden (25 = 10 + 15), somit wäre das Verfahren fortführbar:

$$\begin{array}{ccc} & 4 & {}_{1}5 \\ - & 2 & 9 \\ & \underset{1}{\cancel{2}} & 6 \\ \hline \end{array}$$

Der Nachteil dieses Verfahrens gegenüber einem Standardverfahren liegt freilich auf der Hand. Der Ausführende muss, bei der Berechnung der Einer „angekommen", wieder zur Zehnerspalte „springen" und zurück, die Rechenrichtung also während des Verfahrens zweimal ändern. Dennoch beweist ein Schüler, der eine solche Herangehensweise entwickeln und erklären kann, ein weitaus tieferes Verständnis als einer, der bloß eines der Standardverfahren nachvollziehen und ausführen kann. Eine Lehrkraft mit PUFM würde dies erkennen, ihm als Alternative vermutlich eines der Standardverfahren anbieten, welches von diesem wiederum aufgrund seiner Vorteile eher angenommen würde.

Zusammenfassend ergeben sich also 5 Standardvarianten. Je nachdem, von welcher grundsätzlichen Anwendungssituationen der Subtraktion

$$x + a = b \text{ (Abziehen, Subtrahieren)}$$

$$a + x = b \text{ (Ergänzen)}$$

man ausgeht und mit welcher Idee (gleichsinniges Ergänzen, Eintauschen, Auffüllen) man den Übertrag erstellt.
Darüber hinaus sind jedoch eine Vielzahl alternativer Herangehensweisen, Entbündelungsverfahren und -vorstellungen und Lösungsansätze denkbar, die sich spontan in unterschiedlichen Situationen und verschiedenen Kontexten heraus bilden können, wie die in Abschnitt 4.4 vorgestellten Varianten zeigen.

4.5 Einblick in verschiedene Erklärungsansätze der schriftlichen Multiplikation

4.5.1 Hinführung über einen konkret operationalen Ansatz

Ähnlich der schriftlichen Subtraktion richtet sich auch bei der schriftlichen Multiplikation der Fokus auf einzelne Stellenwerte.
Üblicherweise wird die schriftliche Multiplikation mit einem einstelligen Multiplikator eingeführt. Dies kann konkret-operational erfolgen und auf der ikonischen Ebene im formal-abstrakten Verfahren schließen.
Eine Beispielaufgabe:

„Sechs Freunde spielen im gleichen Verein Fußball und wollen sich ein neues Trikot kaufen. Ein Trikot kostet 135,- €. Einer von ihnen, Theo, bekommt den Auftrag, in den Laden zu gehen und die sechs Trikots zu besorgen. Mit wie viel Geld in der Tasche ist er unterwegs?“

Um die Aufgabe zu lösen und die Multiplikation der verschiedenen Stellen (Wertebenen) zu verdeutlichen, könnte man die „Tasche von Theo“ zunächst als Stellenwerttabelle darstellen:

				H	Z	E						
		6	·	1	3	5						
				6	18	30						
			=	6	21	0						
			=	8	1	0						

Die einzelnen Stellen werden mit Spielgeld belegt und mit der Anzahl der Kinder multipliziert. Schließlich werden die einzelnen Geldstücke oder Geldscheine schrittweise, beginnend mit den Einern, immer in die größtmögliche Wertebene eingetauscht: 30 E werden zu 3 Z, die so entstandenen 21 Z werden zu 2 H und 1 Z u.s.w.

4.5.2 Ikonische Darstellungen und die "Cognitive Load-Theorie"

Es wäre denkbar, dieses auch mit mathematikdidaktischem Material zu "legen" und die einzelnen "realen" Schritte ikonisch nachzuvollziehen:

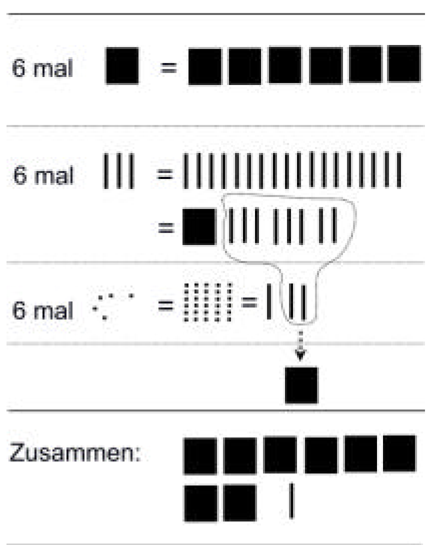


Abb. 23: Halbschriftliche Multiplikation in ikonischer Darstellung

Anhand der Darstellung wird allerdings schnell deutlich, wie komplex solche Erklärungen im Rahmen der Wissensvermittlung bei der schriftlichen Multiplikation verlaufen würden. Was zum Verständnis der schriftlichen Subtraktion noch wichtig und hilfreich war, sollte nun besser als Handlungsmuster internalisiert und in einem Stück sicher abrufbar sein. Die Schüler sollten mit den Ziffern des Algorithmus bestimmte Zahlvorstellungen automatisch verknüpfen und anwenden können sowie ein Verständnis über die Wertigkeit der Stellen erlangt haben, das eine ikonische Darstellung nicht mehr unbedingt nötig macht.

Sind bestimmte Muster gewisser Komplexität vom Schüler noch nicht verstanden, gelernt und jederzeit abrufbar, kann es bei dem Versuch, schriftliche Rechenverfahren (oder andere mathematische Muster) zu verstehen und zu erlernen, zu erheblichen Schwierigkeiten kommen. Dies hängt mit der Kapazität unseres Arbeitszeitgedächtnisses zusammen. Hierhin gelangen neue Informationen zunächst und bleiben etwa zwei Sekunden erhalten, sozusagen in Form einer "in neuronalen Systemen kreisenden Erregung" (Wellenreuther 2001, S. 75). Soll die Information nicht vergessen werden, muss sie innerhalb dieser Zeit aufgefrischt werden.
Die maximale Kapazität des Arbeitszeitgedächtnisses umfasst etwa sieben Einheiten ("Chunks"), wobei zu bedenken ist, dass hiervon wiederum höchstens zwei bis drei Chunks *gleichzeitig* bearbeitet werden können.

Chunks können durch eine entsprechend vernetzte Abspeicherung im Langzeitgedächtnis unterschiedlich groß sein. Umgekehrt bedeutet dies: Wer in einem bestimmten Wissensbereich "Anfänger" ist, also noch keine umfangreichen Informationen sammeln konnte, verfügt über entsprechend kleine oder noch gar nicht ausgeprägte Einheiten in diesem Bereich. Ein Beispiel: Einem Tänzer der Sonderklasse wird es nicht schwer fallen, eine einmal gesehene Choreographie gewisser Länge quasi "aus dem Stand" nachzuvollziehen, die enthaltenen Teilfiguren zu benennen und nachzutanzen. Aufgrund seiner langjährigen Erfahrung hat er die einzelnen Figurenteile oder sogar gesamte Abschnitte bereits als ein zusammenhängendes Muster gespeichert. Entsprechend große Chunks wird er in seinem Arbeitszeitgedächtnis speichern und anschließend wiedergeben können. Ein "Anfänger" hingegen hat diese Wisseneinheiten noch nicht aufgebaut und ist darauf angewiesen, jeden einzelnen Schritt und jede einzelne Bewegung nachzuvollziehen. Geht man davon aus, dass jeder Schritt eine Stelle seines Arbeitszeitgedächtnisses belegt, wird er nur maximal sieben Schritte weit tanzen können. Noch schwieriger wird es für ihn sogar, wenn parallel zu den mit den Füßen gesetzten "Schritten" noch verschiedenartige Bewegungen mit dem Oberkörper und dem Kopf hinzukommen. Dies hätte schon nach dem ersten Schritt, der noch mit Mühe getan werden könnte, eine Überlastung des Arbeitszeitgedächtnisses zur Folge (vgl. Sweller /van Marrienboer/Paas 1998).

Zusammenfassend lässt sich also festhalten: Die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses, in dem wir bewusst Wahrgenommenes verarbeiten oder "bewusst denken", ist auf höchstens sieben Elemente begrenzt, nur so viele Elemente können im Arbeitsgedächtnis behalten werden. In den meisten Fällen werden die Informationen im Arbeitsgedächtnis jedoch nicht nur aufgenommen, sondern verarbeitet. In diesem Fall ist die maximale Kapazität bei zwei bis drei gleichzeitigen Elementen, die parallel verarbeitet werden können, erschöpft. Dies erklärt sich daraus, dass auch die Bearbeitung selbst, das "In-Beziehung-Setzen" der einzelnen Elemente, einige Einheiten im Arbeitsgedächtnis benötigt, die dann für andere Einheiten nicht mehr zur Verfügung stehen.

An dieser Stelle spannt sich der Bogen zur Begrifflichkeit des PUFM: Hat ein Schüler verschiedene "Elemente" wie Bündelung, Aufbau des Stellenwertsystems oder bestimmte Grundvorstellungen der Multiplikation noch nicht als Muster (Chunk) abgespeichert, stehen ihm diese auch nicht zum Aufbau eines Verständnisses vom Algorithmus zur Verfügung. In diesem Fall sind zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder scheitert der Schüler beim Erlernen des Algorithmus, weil er sich bemüht, ein tiefergehendes Verständnis zu erlangen, aber dies nicht erreicht, weil ihm nicht genügend komplexe Wissensbausteine zur Verfügung stehen, oder er zieht sich auf die Ebene des "einfachen Ausführens" zurück, indem er das Schema der Multiplikation schlicht "nachmacht" oder mit Hilfe von "Merksätzen" anwendet.

Eine Erklärung des Algorithmus auf ikonischer Ebene scheint also nur dann sinnvoll, wenn bestimmte Grundlagen nachgearbeitet werden müssen. Sonst würde die Menge an Informationen und durchzuführenden virtuellen Handlungen innerhalb des Algorithmus zu viele freie Plätze innerhalb des Arbeitsgedächtnisses belegen.

In den folgenden Darstellungen wird daher auf eine Ausführung auf ikonischer Ebene verzichtet. Gleichwohl sei aber bemerkt, dass der Lehrer jederzeit entsprechende Darstellungen parat haben muss, wenn auch nur in einer "virtuellen", mündlichen oder gestikutiven Form. In Situationen, in denen Schüler auf Verständnisschwierigkeiten stoßen, muss die Lehrkraft in der Lage sein, entsprechende Muster im Langzeitgedächtnis des Schülers durch einen "Hinweis" (eine Geste, kleine Skizze o.ä.) zu aktivieren und ihn so auf den "richtigen Weg" zu bringen - was ohne PUFM schlechterdings möglich ist. Auch Lücken in der Wissensbasis des Schülers können von der Lehrkraft erst dann erfasst werden, wenn sie eine "virtuelle, ikonische Ebene" stets verfügbar hat.

4.5.3 Hinführung über die halbschriftliche Multiplikation

An Stelle einer konkret-operationalen Phase mit Spielgeld kann eine Erklärung des Verfahrens auch auf Basis der halbschriftlichen Multiplikation erfolgen. Angewendet auf die im vorherigen Absatz genannte Beispielaufgabe ergeben sich folgende Erklärungsschritte:

6	·	1	3	5	=							
6	·	1	0	0	=	6	0	0				
6	·		3	0	=	1	8	0				
6				5	=		3	0				
						8	1	0				

In Hinblick auf das zu vermittelnde Verständnis sollte bei der Erklärung dieser Schritte gesichert sein oder darauf geachtet werden, dass die Schüler die „Nullen“ nicht nur als algorithmisches Hilfsmittel verstehen („Lass einfach die Nullen weg, rechne sechs mal eins und hänge die Nullen zum Schluss wieder dran!“). Es wäre sicher keinem tiefgehenden Verständnis dienlich, würden die Schüler „Nullen“ und die Ziffer 1 separat voneinander betrachten, ohne sich bewusst zu sein, wie groß die Menge der Elemente von „100“ ist, welchen Wert diese Zahl hat u.s.w.

4.5.4 Verschiedene Algorithmen der schriftlichen Multiplikation

Ist das Verfahren mit einem einstelligen Multiplikator verstanden worden, kann es auf eines mit einem mehrstelligen Multiplikator übertragen werden. Verschiedene formal-abstrakte Multiplikationsverfahren sind denkbar:

1. "Normalverfahren" laut KMK-Beschluss vom 3.12.1976

	1	2	3	.	6	4	5					
			7	3	8							
				4	9	2						
					6	1	5					
			7	9	3	3	5					

- Der zweite Faktor ist Multiplikator,
- die Teilprodukte sind nach den Stellenwerten des zweiten Faktors geordnet,
- die Rechnung beginnt beim höchsten Stellenwert des zweiten Faktors.

2. Wie Normalverfahren, Beginn beim niedrigsten Stellenwert des Multiplikators

	1	2	3	.	6	4	5					
					6	1	5					
				4	9	2						
			7	3	8							
			7	9	3	3	5					

3. Wie Normalverfahren, jedoch Anordnung der Teilprodukte unter dem ersten Faktor, aber nicht den Stellenwerten desselben entsprechend (verbreitet in Jugoslawien):

	1	2	3	.	6	4	5					
	7	3	8									
		4	9	2								
			6	1	5							
			7	9	3	3	5					

4. Verbreitet in den USA, Großbritannien, Türkei, Griechenland und Spanien:

		1	2	3
	.	6	4	5
		6	1	5
	4	9	2	
7	3	8		
7	9	3	3	5

- Der untere Faktor ist Multiplikator,
- beide Faktoren und die Teilprodukte stehen stellengleich untereinander,
- die Rechnung beginnt mit dem niedrigsten Stellenwert des Multiplikators.

5. Gittermethode

						1		2		3	.	
					0		1		1			
						6		2		8	6	
					0		0		1			
						4		8		2	4	
					0		1		1			
						5		0		5	5	
			2									
7		9		3		3		5				

Diese, heute in einigen Unterrichtswerken zu findende Methode[8] geht auf den schottischen Adligen John Napier zurück, der mit Hilfe einer speziellen (diagonalen) Notation des kleinen Einmaleins auf Streifen („Napiersche Streifen“, auch bekannt als „Nepersche Streifen“) eine Möglichkeit der mechanischen Multiplikation schuf (vgl. Neubrand/Möller 1999, S. 194ff).
Während die Neperschen Streifen schon „vorgefertigt“ sind, wird deren besondere Notationsform bei der Gittermethode genutzt. Die Ziffern des Produktes ergeben sich durch diagonales Addieren, evtl. mit Übertrag aus dem vorhergehenden Streifen. Dieses Verfahren macht vom Schema her am besten deutlich, dass beim schriftlichen Multiplizieren jede Ziffer des ersten Faktors mit jeder Ziffer des zweiten Faktors multipliziert wird.

Die Gittermethode beinhaltet gegenüber den anderen Rechenverfahren noch weitere Vorteile:

[8] z.B. Das Zahlenbuch“ oder „Lollipop“, 4. Schuljahr

- Alle „Behalteziffern“ haben ihre Bestimmungslücke. Sie können sofort notiert, müssen also nicht im Kopf behalten werden.
- Beim Multiplizieren der beiden Faktoren spielt die Reihenfolge keine Rolle. So können häufiger Rechenvorteile genutzt werden.
- Waagerecht oder senkrecht kann leichter eine Rechenkontrolle erfolgen.

4.6 Ein Ausschnitt aus der Elementargeometrie: Der Zusammenhang von Flächeninhalt und Umfang einer geschlossenen geometrischen Figur am Beispiel des „Rechtecks“

4.6.1 Reflektieren einer bislang unbekannten Theorie - tiefgehendes mathematisches Wissen in Form überlegten mathematischen Handelns

„In allen Rahmenrichtlinien für den Mathematikunterricht nimmt die Geometrie neben der Arithmetik und dem Bereich Sachrechnen/Größen einen eigenständigen und hervorgehobenen Platz ein. Es gibt viele gewichtige Beweggründe dafür, dass geometrische Themen und Aktivitäten im Grundschulunterricht notwendig und unverzichtbar sind.“ (Radatz 1989, S. 17) Umso erstaunlicher ist das eher rudimentäre Dasein, das dieser Bereich der Elementarmathematik in der Grundschule einnimmt. In den meisten Lehrwerken sind die meist kleinen Unterrichtseinheiten zur Geometrie auf den hinteren Schulbuchseiten untergebracht und werden nicht zuletzt aus diesem Grund sicher von den meisten Lehrkräften auch als vernachlässigbar oder nicht so wichtig angesehen. „Rechnen“ ist weltweit nahezu unverändert „beherrschendes Thema des mathematischen Grundschulunterrichts, wiewohl gerade das reine Rechnen inzwischen schneller und zuverlässiger von Taschenrechnern erledigt werden kann.“ (Bauersfeld 1993, S. 8)

Dabei stellt die Geometrie einen äußerst motivierenden Teil der Primarmathematik dar, der überdies sehr realitätsnah ist. Im täglichen Leben oder in der gestaltenden Kunst, sogar in der Musik, werden geometrische Formen häufig verwendet: Tapetenmuster, Fliesen, Handtücher, Verpackungen, Architektur, musikalische Form des Rondos, Quintparallelen etc.
Darüber hinaus spiegelt unser alltäglicher Sprachgebrauch einen nicht unerheblichen Einfluss der Geometrie wieder: Strecke, Gerade, senkrecht, „ins Lot bringen“, begrenzt sein, kugelförmig, rund, eckig stellen nur eine kleine Auswahl geometrischer Begriffe dar, die in unserem natürlichen Sprachgebrauch enthalten sind.
Und nicht zuletzt sollen zahlreiche (geometrische) Materialien und geometrische Strukturierungen (Rechenstäbe, Zahlenstrahl, Steckwürfel u.s.w.) den Schülern helfen, Rechenoperationen oder Erweiterungen des Zahlenraumes im wahrsten Sinne des

Wortes zu be*greifen* oder einzu*sehen*. Es gibt wohl kaum eine arithmetische Deutung, die nicht über geometrische Strukturen oder Eigenschaften vermittelt würde. So lernen viele Schüler z.B. die Kommutativität oder auch einfach die multiplikative Berechnung von „rechteckigen Kringelfeldern“ sogar noch vor dem Begriff der „Flächengröße“. Dabei liegt hier eine der Stärken der Geometrie: „Rechnen“ kann mit Hilfe der Geometrie, durch ihren Gebrauch, erklärt werden. Dass dies in der Grundschule noch zu wenig geschieht, bemängelt auch Bauersfeld (1993, S. 9): „Die geometrischen Eigenschaften werden als rechnerische gelernt; sie erklären sich durch ihren Gebrauch im Rechnen, statt dass das Rechnen durch ihren Gebrauch geklärt würde! Man lernt am Ende auswendig, aber ‚versteht' nicht.“

Doch nicht nur der Aspekt der Verknüpfung mit arithmetischen Verfahren zur verständlichen Grundlegung dieser macht Geometrie in der Grundschule so wichtig, es sind auch die Möglichkeiten, mit Hilfe geometrischer Problemstellungen (oder geometrischer Darstellungen arithmetischer Besonderheiten) mathematisches Denken und Handeln auszuprägen und zu trainieren. Dazu gehören z.B. das Aufklären von Phänomenen oder auch Ordnen zu übersichtlichen Gesamtheiten. Die Fähigkeit an sich, verfügbares mathematisches Wissen zu verknüpfen, analytisch einzusetzen, kurz: mathematisch charakteristisch zu arbeiten, lässt sich mit Hilfe geometrischer Problemstellungen hervorragend und anschaulich trainieren.

Ein Beispiel hierfür findet sich bei Neubrand (2000), der anhand des Auffüllens einer „Lücke“ im „Haus der Vierecke“ (ein Konzept zur Schaffung einer höheren Ordnung aller Vierecke) und der Thematisierung dieses Ordnungsprozesses im Unterrichtsgeschehen deutlich macht, dass solche Konzepte nicht immer einheitlich sein müssen, sondern aufgrund verschiedener Herangehensweisen verschiedene Lösungsmöglichkeiten zulassen. Nicht das Ergebnis, ein einheitliches Konzept oder eine Ordnung ist das Ziel, sondern der Weg dorthin, die mathematische Tätigkeit, das Sprechen und Nachdenken über die Zusammenhänge selbst.

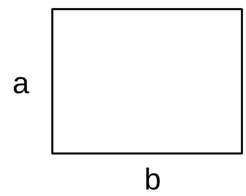
Dass geometrisches Fachwissen, die Berechnung des Flächeninhaltes einer geschlossenen geometrischen Figur und alle damit zusammenhängenden Verknüpfungen zu wichtigen Nebenbereichen (wozu allein schon eine Kategorisierung aller bestehenden geschlossenen geometrischen Figuren gehörte) unter diesen Gesichtspunkten im Rahmen dieser Arbeit nicht in aller Vollständigkeit dargestellt werden kann, liegt nahe, würde für eine Darstellung diesen Umfangs nicht ausreichen. Im Folgenden sollen jedoch der Kernbestandteil des Szenarios 3 (eine fiktive Unterrichtssituation im Rahmen des Interviews, s. Kap. 6.4.2), die Flächen- und Umfangsberechnung eines Rechtecks und die von der Schülerin im Rahmen des Interviews gemachten Annahmen, reflektiert werden.

4.6.2 Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks

Im Rahmen des Interviews mit den Lehrkräften wird eine Situation dargestellt, in der eine Schülerin die Behauptung aufstellt, würde sich der Umfang einer geschlossenen Figur vergrößern, tue dies auch die „Fläche“. In der fiktiven Situation hat die Schülerin eine Skizze angefertigt, auf der zwei Rechtecke zu sehen sind, mit deren Hilfe sie ihre Theorie belegen will.

Die Behauptung ist offen und schließt theoretisch jede geschlossene Figur mit ein, als Leser wird man jedoch durch die Skizze zunächst auf den angenommenen Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt eines *Rechtecks* gelenkt. Um diesen angenommenen Zusammenhang genauer zu untersuchen, soll zunächst gezeigt werden, wie der Flächeninhalt und der Umfang eines Rechtecks berechnet werden.

Umfang (U)



Der Umfang geometrischer Figuren kann berechnet werden, indem man die Längen aller Seiten addiert. Ein Rechteck wird von vier miteinander verbundenen Strecken, den Seiten, begrenzt. Die jeweils gegenüberliegenden liegen parallel zueinander und sind gleich lang. Der Umfang berechnet sich daher aus einer einfachen Addition der begrenzenden Streckenlängen:

$$a + a + b + b = 2a + 2b = \text{Umfang (U)}$$

Flächeninhalt (A)

Der Flächeninhalt hingegen kann beschrieben werden als der Versuch, die Größe des begrenzten Bereichs (Rechteck, s. Abb. 27) zu beschreiben, indem berechnet wird, mit wie viel gleich großen Quadraten diese Fläche gefüllt werden kann. Ein Beispiel:

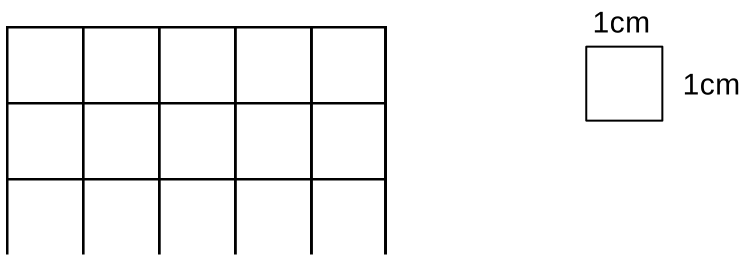


Abb. 24: Füllen eines begrenzten Bereiches mit Hilfe gleich großer Quadrate

Abbildung 24 zeigt ein Rechteck, dass von Quadraten mit der Seitenlänge 1cm, einem „Zentimeterquadrat“, ausgefüllt wird. Es passen genau 3 dieser Quadrate übereinander in das Rechteck, d.h. diese begrenzende Seite hat eine Länge von 3 mal 1cm, also 3cm. Nebeneinander passen genau 5 Quadrate in das große Rechteck, die unten (und somit auch oben) begrenzende Seite hat also eine Länge von 5cm. Es ist zu erkennen, dass die fünf Zentimeterquadrate genau drei Mal übereinander in das große Rechteck passen, insgesamt also 3 mal 5 = 15 Zentimeterquadrate das gesamte Rechteck genau ausfüllen. Formal ausgedrückt: $3cm \cdot 5cm = 15cm^2$

Umgekehrt ließe sich natürlich genauso sagen, dass genau 5 mal 3 Quadrate nebeneinander das Rechteck genau ausfüllen, eine Erklärung des Kommutativgesetzes: 3 mal 5 ist das Gleiche wie 5 mal 3.

Verallgemeinernd kann man sagen: Der Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet sich aus der Multiplikation dessen Länge und Breite. In Bezug auf Abbildung 27 würde dies formal lauten: $A = a \cdot b$, wobei A für den Flächeninhalt steht und a, b die Längen der Seiten a und b des Rechtecks darstellen. Beispiel: $a = 3cm$ und $b = 5cm$, dann ist $A = 3cm \cdot 5cm = 15cm^2$

Der Theorie der Schülerin (vgl. Kap. 6.4.2) liegt nun die Annahme zu Grunde, dass mit dem Vergrößern des Umfanges einer geschlossenen Figur, in diesem Fall eines Rechtecks, gleichzeitig die Fläche größer wird. Eine mögliche Vorstellung dieser Annahme lässt sich am besten mit Hilfe eines Graphen erzeugen (Abb. 25):

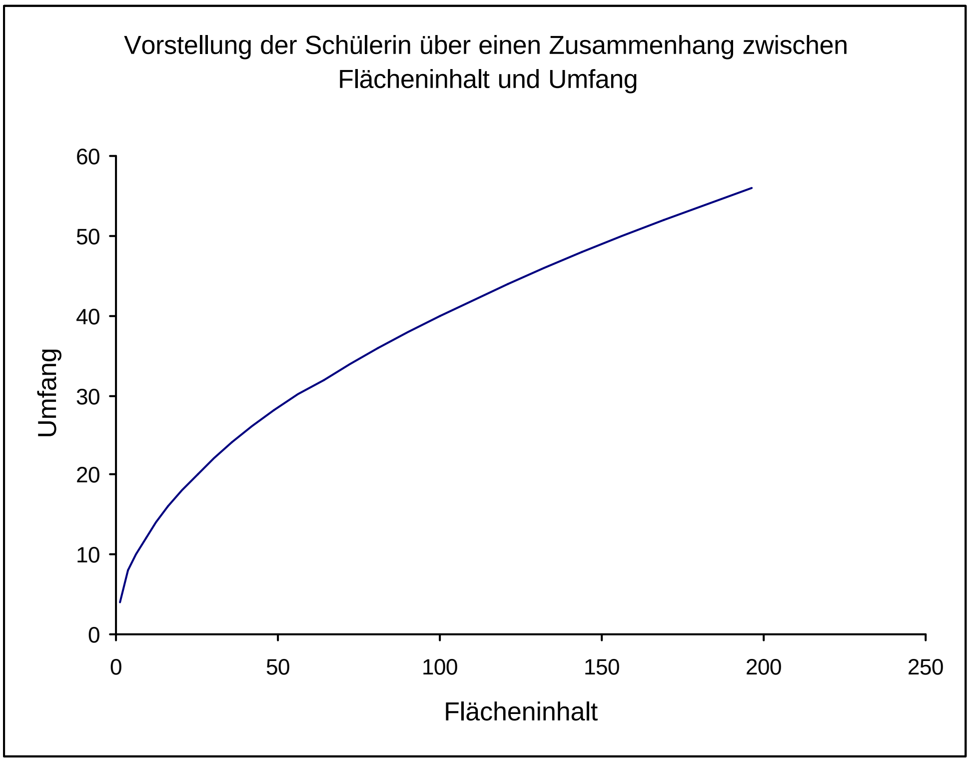


Abb. 25: Graphische Darstellung der Behauptung der Schülerin bezüglich eines Zusammenhangs zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks

Da sich beide Berechnungen, sowohl die der Fläche als auch die des Umfangs, auf die gleichen Seiten des Rechtecks beziehen, nimmt die Schülerin an, dass auch die beiden Maße korrelieren. Sie geht implizit davon aus, dass die Veränderliche „Umfang" von der Veränderlichen „Fläche" abhängt, und erkennt nicht die Situation zweier (voneinander unabhängigen) Veränderlichen.

Dass die Annahme der Schülerin nicht immer zutreffend ist, wird sofort klar. Schnell lässt sich ein Gegenbeispiel für die Theorie der Schülerin finden (s. Abb. 26): Seien a und b die Längen von zwei nicht gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks (s.o.), wobei $a = 2cm$ und $b = 18cm$, dann gilt $U = 2 \cdot (2cm + 18cm) = 40cm$ und $A = 2cm \cdot 18cm = 36cm^2$. Verkleinert man nun a um 1cm, vergrößert aber gleichzeitig b um 2 cm, dann steigt der Umfang von 40 auf 42 cm, die Fläche jedoch *verkleinert* sich von 36 auf 20 cm^2.

$$U = 40cm \quad A = 36cm^2$$

$$U = 42cm \quad A = 20cm^2$$

Abb. 26: Ein Gegenbeispiel zu der Annahme, der Flächeninhalt eines Rechtecks vergrößere sich mit der Zunahme des Umfangs

Doch wie ist nun der tatsächliche Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt? Gibt es überhaupt einen? Kann man, aus dem Blickwinkel einer „Funktion mehrerer Veränderlicher“ betrachtet, überhaupt von einem „Zusammenhang“ sprechen, der ja auch eine Auswirkung des Umfangs auf die Fläche und umgekehrt suggeriert?

4.6.3 Die „Vier Stufen des tieferen Verständnisses“ nach Ma am Beispiel des Zusammenhangs zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks

Mit nur einem Gegenbeispiel kann ein Gegenbeweis zu der Behauptung der Schülerin erbracht werden, die somit ungültig wird. Ein solches Gegenbeispiel zu finden ist nicht schwer, diese einfache Herangehensweise wird daher von Ma einer **ersten**, der unteren von vier „**Stufen des Verstehens**“ mathematischer Zusammenhänge zugeordnet. Diese vier Stufen eignen sich hervorragend, das sich systematische, mathematische Annähern an einen bislang unbekannten Sachzusammenhang - oder wie in diesem Beispiel eine Hypothese einer Schülerin - darzustellen. Die Herangehensweise mit Hilfe nur eines Gegenbeispieles entbehrt jedoch jeglicher weiterer Perspektive. Die Theorie ist nicht richtig, Punkt! Nun könnte man aber darüber hinausgehen und nach einer Erklärung suchen, die verständlich macht, *warum* die Theorie nicht für alle Fälle gültig ist.

Hieraus leitet sich die **zweite Stufe** des Verstehens ab. Man könnte nun versuchen, mögliche Zusammenhänge zwischen Flächeninhalt und Umfang zu erkunden, indem man wahllos Beispiele zeichnet und versucht, Gemeinsamkeiten und gewisse Regelmäßigkeiten festzustellen.
Ein Beispiel: Wird gleichzeitig die erste Variable (a) vergrößert und die zweite (b) verkleinert, kann der Fall eintreten, dass der Umfang im Vergleich zur vorhergehenden Figur zwar größer, die Fläche jedoch kleiner wird.

Eine solch gegensinnige Veränderung beider Variablen, in diesem Fall ausgehend von a = 2 und b = 18, ist keinesfalls mehr als nur steigender Graph abzubilden:

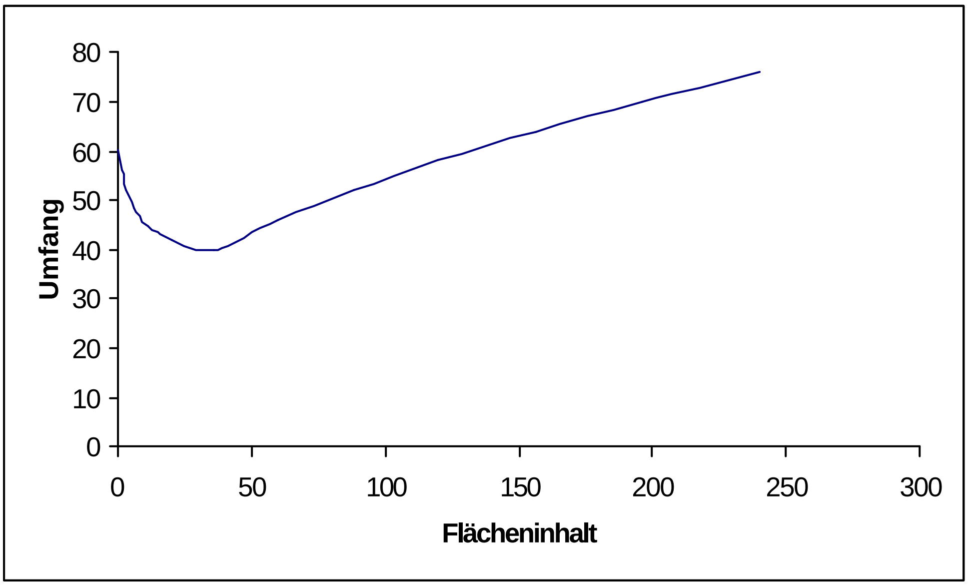


Abb. 27: Zusammenhang des Umfangs und Flächeninhalts eines Rechtecks bei „gegensinnigem“ Verändern der Variablen a und b

Die obenstehende Abbildung (Abb. 27) zeigt den Graphen des Zusammenhangs der Fläche und des Umfangs, bei dem die Variablen, ausgehend von a = 2 und b = 18 gegensinnig wie folgend vergrößert oder verkleinert wurden:

a	b	Fläche	Umfang
0,003125	30	0,09	60,01
0,0625	28	1,75	56,13
0,125	26	3,25	52,25
0,25	24	6	48,5
0,5	22	11	45
1	20	20	42
2	18	36	40
3	20	60	46
4	22	88	52
5	24	120	58
6	26	156	64
7	28	196	70
8	30	240	76

Deutlich ist zu erkennen, dass die Größe der Fläche zunächst stetig zunimmt, während sich der Umfang kontinuierlich *verringert*. Erst nach einem bestimmten Punkt (bei a=2,25 und b=18) ändert sich dies, und der Umfang beginnt mit der Größe der Fläche zu steigen.

Geht man noch einmal auf die Annahme der Schülerin zurück, zeigt der Graph, dass das Kind nur *bedingt* Recht hat. Betrachtet man den Verlauf des Graphen „von rechts nach links", nimmt der Umfang des Rechtecks zu, der Flächeninhalt jedoch nähert sich null.
Mit Hilfe dieser großen - jedoch willkürlich ausgewählten - Anzahl an Beispielen ist immerhin schon einmal herausgestellt, dass die Annahme der Schülerin über den Zusammenhang von Flächeninhalt und Umfang auf eine große Anzahl von Beispielen zutrifft. Unter welchen *Bedingungen* jedoch trifft sie zu, unter welchen nicht? Diese Frage führt zu der **dritten Stufe** des Verstehens, der (erfolgreichen) Suche nach Bedingungen, unter denen eine Hypothese standhält oder gerade nicht.

In Bezug auf den Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks wäre eine mögliche Formulierung von Bedingungen folgende: Wenn eine Zunahme des Umfangs durch ein gleichzeitiges Zunehmen der Breite und Länge eines Rechtecks oder einer von beiden bestimmt wird, ohne dass eine von beiden, Länge oder Breite, abnimmt, wird die Theorie der Schülerin zutreffen. Wenn aber der Umfang zunimmt, gleichzeitig die Breite des Rechtecks, die Länge jedoch abnimmt oder umgekehrt, ist eine Vergrößerung der Fläche nicht sicher. Der Schülerin ließe sich also eine Wenn-Dann-Beziehung mit auf den Weg geben: Immer, wenn entweder die Länge oder die Breite eines Rechtecks oder beide zusammen größer werden, gleichzeitig keine von beiden kleiner, wird der Umfang größer und gleichzeitig auch die Fläche. Die Annahme der Schülerin wurde auf diese Weise „verfeinert" und ist nun allgemein gültig. Auch die in Stufe 2 erarbeitete Sammlung an Beispielen, übertragen in die Form eines Graphen, lässt sich nun besser verstehen.

Die **vierte Stufe** des Verstehens geht noch darüber hinaus: *Warum* gilt dieser besondere Zusammenhang unter den bestimmten Bedingungen? Verschiedene Herangehensweisen sind hier denkbar.
Zunächst könnte man sich darauf besinnen, wie sich der Umriss einer Figur ändert, wenn Umfang oder Fläche verändert werden. Werden nur die Länge oder Breite oder beides vergrößert, bleibt die Fläche der Ausgangsfigur erhalten (s. Abb. 28a, b und c). Wird dagegen eine Seite verkürzt, die andere im gleichen Zuge verlängert, wird der ehemalige Originalflächeninhalt „angegriffen". Dass sich der Flächeninhalt nun mit dem Umfang vergrößert, ist nicht mehr sicher (vgl. Abb. 29 d und e).

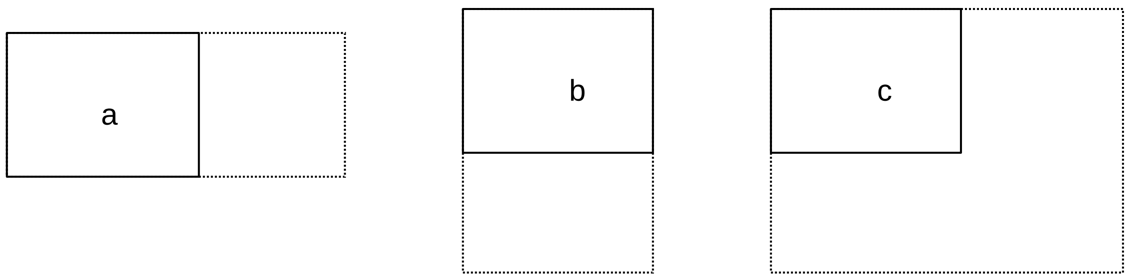


Abb. 28 a, b, c: Variationen der Fläche und des Umfangs eines Rechtecks in Abhängigkeit von der Veränderung der Seitenlängen

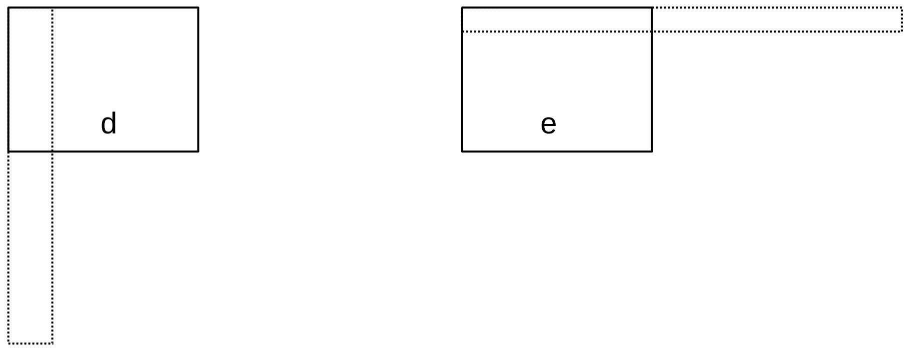


Abb. 29 d, e: Wenn sich eine Variable verringert, bleibt die Ursprungsfigur nicht bestehen. Ein Zusammenhang ist dann nicht mehr garantiert.

Die Begründung der Bedingungen, unter denen die Theorie der Schülerin standhält, ließe sich auch algebraisch mit Hilfe des Distributivgesetzes erarbeiten. Wenn z.B. nur die Breite um 2 vergrößert wird, bedeutet dies, der ursprüngliche Umfang vergrößert sich von $2a+2b$ auf $2(a+2)+2b$. Unter diesen Bedingungen wird auch der Flächeninhalt größer. Ursprünglich $a \cdot b$, vergrößert sich dieser nun auf $(a+2)\cdot b$.

Die Beispiele haben deutlich gemacht, dass der Grund für das Bestehen der Theorie der Schülerin in einer bestimmten Wirkungsweise der beiden Variablen a und b zueinander liegen muss. Um dieser weiter auf den Grund zu gehen, könnte man nun beginnen, die beiden Variablen *systematisch* zu variieren.
Was würde z.B. mit a und b passieren, wenn der Umfang immer konstant bliebe? Welche und wie viele Möglichkeiten zur Konstruktion eines Rechtecks mit dem gleichen Umfang würde es geben? Angenommen, der Umfang würde auf 6 festgelegt, dann würde dies bedeuten:

$$2a+2b=6 \text{ bzw. } a=\frac{6-2b}{2}$$

Für ein Rechteck mit dem Umfang 6 ließen sich also unendlich viele Möglichkeiten vorstellen.

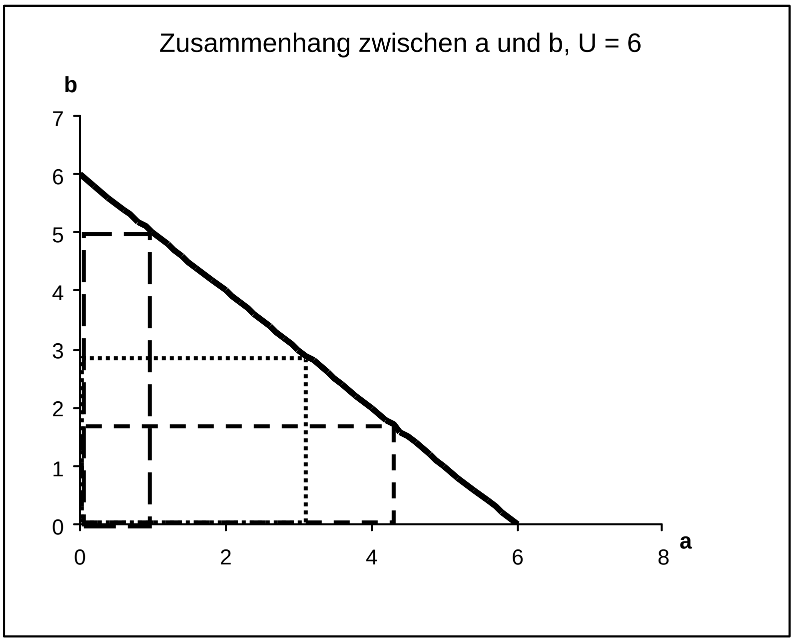


Abb. 30: Rechtecke unterschiedlicher Fläche (gestrichelt), deren Umfang gleich 6 ist (Punktepaare (a;b) ergeben immer den Umfang 6, der hier durch die durchgezogene, Diagonale Linie repräsentiert wird)

Die drei in Abb. 30 beispielhaft dargestellten Rechtecke (gestrichelte Linien) machen den Zusammenhang zwischen a und b klar: Der Umfang bleibt gleich, wenn a vergrößert und b ($=\frac{1}{a}$) in gleichem Zug verkleinert wird. Theoretisch ließen sich auf diese Wiese unendlich viele Rechtecke mit dem Umfang 6 (gerade, durchgezogene Linie) darstellen. Gleichzeitig wird aber auch nochmals deutlich, wie sich der Flächeninhalt mit dem Abnehmen von a immer weiter verkleinert.

Schon in der Grundschule kann man diesen Zusammenhang veranschaulichen. Die Idee hierbei, dass man „mal ausprobiert, was mit der Fläche passiert, wenn der Umfang immer gleich bleibt“, ließe sich z.B. hervorragend mit einem Stück verknoteter Schnur am Geobrett testen. Dieses ließe sich hier auf verschiedenste Weisen spannen, jedes Mal entstünde ein anderer Flächeninhalt, manchmal bliebe dieser auch gleich.

Die Idee, den Umfang zunächst einmal konstant zu lassen und die Veränderung von a und b zu erforschen, ließe sich nun auch auf den Flächeninhalt übertragen. Wie „reagieren“ die beiden Variablen a und b, veränderte man den Umfang unter der Maßgabe, dass die Fläche immer gleich bleiben soll? Angenommen, man wählte den Flächeninhalt 6, müsste eine der Variablen stets so angepasst werden, dass sich der Flächeninhalt nicht verändert:

$$a \cdot b = 6 \text{ bzw. } a = \frac{6}{b}$$

Stellte man alle möglichen Zahlenpaare, für die dies zutrifft, wiederum als Graphen dar, würde man folgendes Bild erhalten (s. Abb. 31):

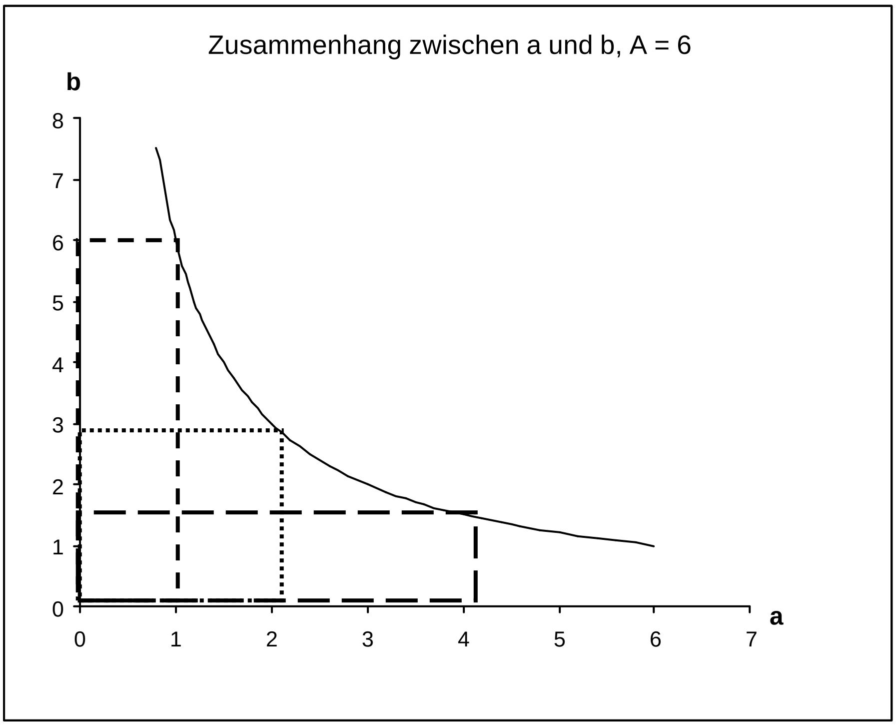


Abb. 31: Die Variablen a und b als Faktoren der Flächenberechnung ergeben immer genau sechs. Die Punktepaare (a;b), für die a mal b = 6 gilt, liegen auf der dargestellten Kurve (durchgezogene, gebogene Linie). Um ein Rechteck mit A = 6 darzustellen, gibt es unendlich viele Rechtecke (gestrichelt) mit jeweils verschiedenen Umfängen.

Auch hier wird anhand der dargestellten Rechtecke schnell deutlich, wie sich zwar der Umfang verändern kann, der Flächeninhalt jedoch immer gleich bleibt. Dieser Zusammenhang ist in der Grundschulmathematik durchaus konkret darstellbar. Allgemein bekannt sind die sogenannten Multiplikationstabellen. Mit ihrer Hilfe kann man Schülern verdeutlichen, dass unterschiedliche Zahlenpaare dennoch immer das gleiche Ergebnis aufweisen können. Mehr noch, es reift die Erkenntnis, dass bei der Verdoppelung des einen Faktors der andere halbiert werden muss, um das gleiche Ergebnis zu erhalten: $8 \cdot 8 = 4 \cdot 16 = 2 \cdot 32 = 1 \cdot 64$ u.s.w.

Erstaunlich mag nun sein, was sich entdecken lässt, legt man einmal mehrere Graphen, die denselben Umfang oder einen gleich großen Flächeninhalt repräsentieren, in einem Koordinatensystem übereinander: Der Graph beispielsweise, der alle möglichen Kombinationen der Variablen a und b repräsentiert, die in einem Rechteck den Umfang 6 ergeben, schneidet mehrere Graphen, die wiederum verschiedene Flächeninhalte darstellen:

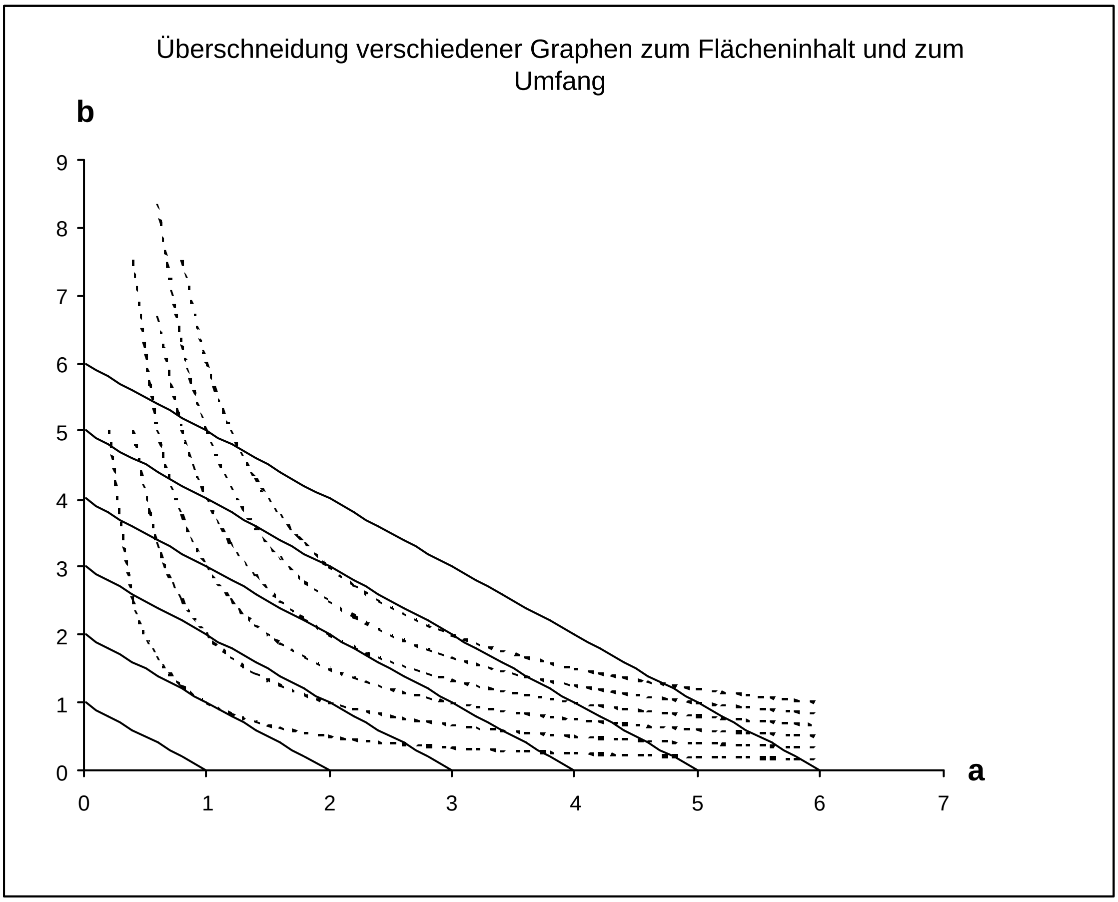


Abb. 32: Überschneidung der Graphen zu Flächeninhalt und Umfang

Die gestrichelten Kurven stellen hier alle Zahlenpaare (a;b) dar, die zu einem gleich großen Flächeninhalt führen. Die „obenliegende" *Gerade* steht für alle a und b, die in einem Rechteck den *Umfang* 6 ergeben. D.h. es gibt eine Vielzahl von Rechtecken, die den Umfang 6 haben, jedoch gleichzeitig einen Flächeninhalt von 5, 4, 3 u.s.w.
Nun wird auch der „Erkenntnis*weg*" der Schülerin deutlich (dicke gestrichelte Linie). Die Beispiele von Rechtecken, die sie zum Beleg ihrer Hypothese herangezogen hat, sind nur *ein* möglicher „Weg" durch die unterschiedlichen Kombinationen von a und b. Bliebe die Schülerin z.B. auf der Linie des Umfangs 5 „stehen" und „blickte nach links und rechts", würde sie hier eine Vielzahl von Rechtecken entdecken, die ebenfalls den Umfang 5 besitzen, jedoch andere Flächeninhalte aufweisen.

Diesen komplexen Zusammenhang zwischen a und b im Rahmen des Mathematikunterrichts einer vierten Klasse darzustellen (denn in der angenommenen Situation geht es ja um eine Schülerin aus dieser Klassenstufe), erscheint im ersten Moment viel zu schwierig für den Verständnishorizont eines Kindes diesen Alters. Dennoch sind Veranschaulichungen denkbar, die den Blick von Schülern auf eine systematische Heran-

gehensweise an solche Probleme schärfen. Die Idee der Schülerin geht von nur *einer* Orientierungsrichtung aus: Vergrößern *einer* der Variablen bedeutet auch gleichzeitig Vergrößern des Umfangs *und* des Flächeninhalts, also zweier Veränderlicher. Was aber passiert mit der anderen?
Ein Exkurs in die Geographie könnte die grundsätzliche Sicht der Schülerin in Bezug auf Zusammenhänge von Größen verändern und ihr Verständnis hierzu vertiefen. Parallel zu ihrer Hypothese ließe sich ja die Behauptung aufstellen: Immer, wenn ich mich auf einer Wanderung von einem tiefgelegenen Punkt einer Landschaft zu einem höher gelegenen Punkt bewege, gehe ich aufwärts. Oder anders: Je mehr Weg ich auf der Strecke, die von einem tiefgelegenem Punkt zu einem höheren Punkt führt, zurücklege, auf desto größerer Höhe befinde ich mich. Um dies zu überprüfen, kann man eine einfache Landkarte zeichnen, z.B.

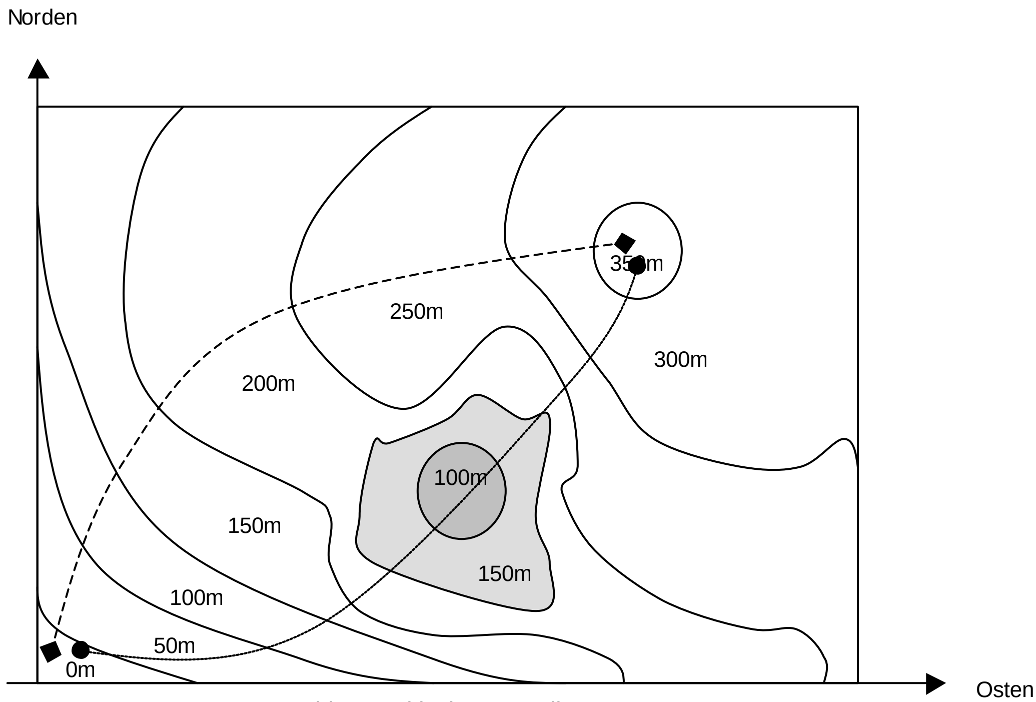


Abb. 33: skizzierte Landkarte

Startpunkt der Wanderung sei bei 0m, dann würden bestimmte Streckenvarianten die Aussage tatsächlich bestätigen (gestrichelte Linie als Beispiel). *Die Aussage stimmt aber nur unter der Bedingung, dass das Gelände auch kontinuierlich ansteigt*. Befindet sich ein Tal auf dem Weg, ist die Annahme nicht mehr haltbar, der Strecke führte zunächst aufwärts, dann jedoch abwärts und schließlich wieder aufwärts (gepunktete Linie). Oder anders: „Blickte“ die Schülerin auf der Höhenlinie von 200m nach rechts, entdeckte sie, dass sie auch einen anderen Weg hätte nehmen können, eben den, der zunächst abfällt und dann wieder ansteigt.

4.7 Schlussfolgerungen

Nachdem in Kapitel 2 und 3 die Bedeutung eines „guten“ Lehrers für qualitativ hochwertigen Unterrichts herausgehoben und erarbeitet wurde, dass guter Unterricht immer einen tiefgehenden Verständnisprozess voraussetzt, was seitens der Lehrkräfte im Bereich Mathematik nur durch ein Profound Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM) geleistet werden kann, wurde im vorangegangenen Kapitel 4 die fachwissenschaftliche Grundlage des profunden Verständnisses der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation referiert.
Neben elementaren mathematischen Inhalten, wie verschiedenen Zahlbegriffen, Grundvorstellungen von Rechenoperationen, Bündelung in dem uns bekannten Dezimalsystem (Stellenwertschreibweise) verschaffen die verschiedenartigen Subtraktions- und Multiplikationsverfahren einen Eindruck von der Komplexität des tiefgehenden Verständnisses selbst so „simpler“ Rechenoperationen wie Subtrahieren und Multiplizieren. Die Entscheidung über die Wahl des zu unterrichtenden Verfahrens und die Ausführlichkeit sowie Art und Weise der dem Verständnis dienenden Erklärungen obliegt - in den meisten Fällen - einzig dem Lehrer, womit erneut deutlich wird, welch zentrale Rolle die Beschaffenheit des Wissens von Lehrkräften spielt. Auf dieses richtet sich daher ein Fokus meiner Untersuchung (s. Kap. 5 und 6)

5 Ziele, Fragestellungen und Durchführung der eigenen Untersuchung

Die Befunde internationaler Vergleichsuntersuchungen haben den Reformbedarf der Grundschule nachgewiesen; die in Kapitel 2 behandelte Frage nach den Kriterien „guten Unterrichts“ legte nahe, dem Fachwissen des Lehrers als Bedingung für das Erreichen tiefgreifenden Verständnisses auf Schülerseite in einer eigenen Untersuchung nachzuspüren; die in Kapitel 3 betrachteten lerntheoretischen Konzepte sollten Hinweise für die Gestaltung des Mathematikunterrichts liefern und die Bedeutung des Fachwissens unterstreichen - hierbei hat sich eine besondere Form des Fachwissens, das „Profound Understanding of Fundamental Mathematics“ (PUFM), herausgeschält –; in Kapitel 4 wurde schließlich die fachwissenschaftliche Grundlegung geboten, die für die nachfolgend wiedergegebene eigene Untersuchung entscheidende Kriterien lieferte. In den folgenden Ausführungen wird zunächst die Ausgangssituation geklärt, werden sodann die Ziele aufgedeckt und begründet, die Hypothesen aufgestellt, die erkenntnisleitenden Fragen dargelegt, und schließlich werden Struktur und Ablauf der Untersuchung vorgestellt. Die Ergebnisse findet der Leser im anschließenden Kapitel.

5.1 Erkenntnisse aus den internationalen Vergleichsstudien

Die internationalen Vergleichsuntersuchungen TIMSS, PISA und IGLU haben den deutschen Schülern auch im Fach Mathematik eher nachrangige Plätze bei der Leistungsfähigkeit zugewiesen. Insofern liegt es nahe, nach den Gründen für das schlechte Abschneiden zu fragen und daran anknüpfend Vorschläge zu unterbreiten, wie wesentliche Kriterien des Schulsystems – und wer würde bestreiten, dass der Lehrer eine zentrale Instanz in diesem System darstellt -, so verändert werden können, dass deutsche Schüler im internationalen Vergleich künftig wieder besser abschneiden.

Die Bundesrepublik Deutschland ist wie kaum ein anderes Land wegen der mangelnden Rohstoffreserven auf die Qualifikation der Erwerbstätigen angewiesen. Sie belegt seit Jahren den zweiten oder dritten Platz bei den Erfindungen; die Exportüberschüsse tragen einen zunehmenden Teil zur immer noch leidlich positiven Entwicklung beim Bruttoinlandsprodukt bei, dem wichtigsten Indikator für das (reale) Wirtschaftswachstum. Insofern ist die Bundesrepublik Deutschland zur Sicherung der materiell hervorragenden Lebensbedingungen ihrer Einwohner auf das Qualifikationspotenzial der Bürger wie kaum ein anderes Land angewiesen. Dabei wird dem Bildungssystem – neben dem Familien- und Sozialsystem – eine tragende Funktion zugeschrieben. Das erklärt auch die Schockwirkung, als die PISA-Studie den deutschen Schülern im internationalen Vergleich eine schlechte Position bei der sprachlich-textlichen wie bei der mathematischen Leistungsfähigkeit bescheinigte. Sie traf damit allerdings auch auf übereinstimmende Feststellungen von Interessenverbänden der Arbeitgeber, die seit Jahren die mangelhaften Schreib-, Lese- und Rechenfertigkeiten (als „Kulturtechniken“) der Schulabsolventen = Ausbildungsstellenbewerber beklagen (Kutscha 2001).

Im Anschluss daran hatten Zuschreibungen „Konjunktur“: Wissenschaftler und Politiker überboten sich gegenseitig in der Deutung des schlechten Abschneidens; sie geizten auch nicht mit Schuldzuweisungen und „Patentrezepten“, wie dem „am Boden liegenden“ deutschen Bildungssystem „wieder auf die Beine geholfen werden könne“. Wissenschaftlich fundiert waren die wenigsten Aussagen, sie gründeten sich auf Erfahrungen und Plausibilitäten.

Die Kräfte eines einzelnen Forschers würden sicherlich überschritten, wollte man von ihm erwarten, dass er den Zusammenhang zwischen Lehrer- und Schülerleistungen in aller Breite und Tiefe untersuchte. Deshalb wird die eigene Untersuchung auf den Mathematikunterricht in der Grundschule konzentriert, die Erhebung auf die vierte Klasse eingegrenzt, zudem die Regionalität auf das Gebiet des Stadtstaates Hamburg (der zu den „Verlierern“ im internationalen Vergleich zählt) und die Region Zürich (die Schweizer Schüler haben erheblich besser abgeschnitten als die Deutschen) bezogen: Was führt zu den besseren Leistungen der Schweizer Schüler, was machen die Schweizer Lehrer besser und anders als die Deutschen?

5.2 *Zielsetzung der eigenen Untersuchung*

In der Betrachtung lerntheoretischer Konzepte (in Kap. 3) konnte gezeigt werden, dass Wissen, welches verständnisorientiert vermittelt und somit in eine vorhandene Wissensstruktur integriert wird, am nachhaltigsten verankert wird und sich langfristig als am effektivsten herausschält. Entsprechendes Wissen kann aber nur von solchen Lehrkräften vermittelt werden, die selbst über ein tiefgehendes mathematisches Elementarwissen - in dieser Arbeit immer zu verstehen als das von Ma (vgl. Kap. 3) definierte Profound Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM) - verfügen, so jedenfalls die Quintessenz aus Kapitel 3. Da liegt nun die Frage nahe, ob überhaupt und wenn ja, in welchem Umfang sich Lehrkräfte finden lassen, die ein solches PUFM besitzen.

Hauptziel der Untersuchung soll daher sein, herauszufinden, ob ein statistisch relevanter Anteil von in der Grundschule Mathematik unterrichtenden Lehrkräften in der

Lage ist, seinen Unterricht auf der Basis dieses besonderen, qualitativ hochwertigen Wissens aufzubauen.

Hypothese 1: Es gibt Grundschullehrkräfte, die über ein tiefgehendes Verständnis der elementaren Mathematik (PUFM) verfügen. Sie bilden allerdings nicht die Mehrheit der Grundschullehrer.

In Kapitel 2 habe ich dargestellt, welche Diskrepanz deskriptive Studien wie IGLU, PISA oder TIMSS im internationalen Vergleich offenbart haben. Die Schüler in der deutschsprachigen Schweiz erzielten im mathematischen Bereich in allen Untersuchungen grundsätzlich höhere Punktzahlen als die deutschen Schüler. Da in den vorgestellten Studien in einem sehr großen Teil der Aufgaben darauf Wert gelegt wurde, problemlösungsorientiert zu arbeiten, und dieses ein Wissen voraussetzt, bei dem verschiedene Wissensbausteine miteinander verbunden werden, ist zu vermuten, dass der Mathematikunterricht in der Schweiz in irgendeiner Form "anders" ist. Aus diesen Überlegungen heraus entstand Hypothese 2.

Hypothese 2: Das mathematische Fachwissen der Hamburger Lehrkräfte unterscheidet sich von dem der Züricher.

Es liegt nun die Vermutung nahe, dass eine „Andersartigkeit" des mathematischen Wissens unter anderem bestimmt sein könnte durch die Qualität des profunden Verständnisses mathematischer Zusammenhänge und Inhalte. Ein Indiz, das diese Annahme stützt, findet sich in den Ergebnissen des Forschungsprojektes zum Erwerb professioneller Kompetenz im Kontext universitärer Lehrerausbildung (Czerwenka/Nölle 2003). In dieser Untersuchung wird festgestellt, dass Absolventen sogenannter praxisintegrierender Studiengänge (eine Form, die im Schweizer Lehrerausbildungssystem vorherrscht, Anm. d. Verf.) deutlich häufiger mit Hilfe theoretischer Konzepte differenzierten Bezug auf ihren Unterricht nahmen als Absolventen sogenannter „konventioneller" Studiengänge (die den überwiegenden Teil der Lehrerausbildung in Deutschland ausmachen, Anm. d. Verf.). Dies ist noch kein Hinweis auf die Qualität des erworbenen Fachwissens, doch lässt die Integration der Praxis in einen Studiengang eine häufigere Reflexion vor allem auch von Unterrichtsinhalten, nicht nur der Vermittlungsart, vermuten. Hieraus leitet sich die 3. Hypothese ab:

Hypothese 3: Die Erklärungen der Schweizer Lehrkräfte lassen gegenüber denen der Hamburger ein profunderes Verständnis elementarer Mathematik erkennen.

Profundes Verständnis elementarer Mathematik, so wie es auch in Kap. 4 detailliert geschildert wurde, beschränkt sich nicht nur auf das Wissen mathematischer Zusammenhänge und Fakten, auf die möglichst sinnvolle und vielfältige Verknüpfung einzelner „Wissensbausteine“, es geht darüber hinaus und zeigt sich in einer besonderen Form der Herangehensweise an mathematische Problemstellungen. Wie lassen sich z.B. bislang unbekannte (mathematische) Probleme lösen? Welche Alternativen gibt es zu einem bestimmten Lösungsweg? Lässt sich die Lösung einem schon bestehenden Schema zuordnen? Welche Ausnahmen sind erkennbar? Oder lässt sich die Annahme verallgemeinern?
Ein Ziel der Untersuchung soll es daher sein, herauszufinden, wie Lehrkräfte, die in einem vierten Schuljahr Mathematik unterrichten, an eine für sie bislang unbekannte mathematische Idee herangehen: Die Annahme, wenn der Umfang einer geschlossenen geometrischen Figur größer werde, wachse auch der Flächeninhalt. Aus diesen Überlegungen leitet sich Hypothese 4 ab:

Hypothese 4: Ein nur kleiner Teil der Hamburger und Züricher Lehrkräfte entwickelt eine charakteristische mathematische Herangehensweise zu der Behauptung, die Größe der Fläche einer geometrischen Figur würde mit dem Umfang zunehmen.

Im Rahmen der Interviews wurden verschiedene Lehrerhintergrundvariablen erhoben: Alter der Lehrkraft, Dienstzeit, Fakultas und verwendetes Schulbuch. Dies geschah aus der Überlegung heraus, die Nähe zum gerade abgeschlossenen Studium stünde vielleicht in einem direkten Zusammenhang mit der Qualität der Lehrkraftantworten: Je jünger die Kollegin oder der Kollege, desto differenzierter müsste demnach ihr/sein Verständnis mathematischer Inhalte sein. Umgekehrt wäre ebenso vorstellbar, dass erst viele Jahre der Berufserfahrung nötig sind, um ein tieferes Verständnis der unterrichtsrelevanten mathematischen Inhalte zu erwerben.
Natürlich liegt auch die Annahme nahe, dass Lehrkräfte mit einer universitären Ausbildung im Fach Mathematik über ein tieferes Verständnis verfügen. Deshalb sollte ermittelt werden, wie viele der (Hamburger) Lehrkräfte (in Zürich ist Mathematik Pflichtbestandteil der Lehrerausbildung), die Mathematik unterrichten, dieses überhaupt als Studienfach hatten.
Auf der Basis der Annahme, dass sich der Großteil der Lehrkräfte allein mit Hilfe der lehrwerkbegleitenden methodisch-didaktischen Kommentare einen Großteil der zu unterrichtenden Inhalte erarbeitet, stellt sich die Frage, ob ein Zusammenhang zwischen

der Nutzungsintensität bei den Lehrwerken und der Qualität der lehrwerkbegleitenden Kommentare besteht.
Neben den zentralen Hypothesen der Untersuchung soll der Fokus daher noch auf folgende besondere Fragestellungen gelenkt werden:

1. Besteht ein Zusammenhang zwischen Alter oder Dienstzeit der unterrichtenden Lehrkraft und der erkennbaren Verständnistiefe derselben?
2. Wie viele Lehrkräfte, die in der Grundschule Mathematik unterrichten, haben dieses als Fachwissenschaft studiert, besitzen also eine „Lehrbefähigung“ im Fach Mathematik?
3. Verfügen Lehrkräfte mit der Fakultas Mathematik über ein besseres Verständnis der mathematischen Unterrichtsinhalte in der Grundschule?
4. Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem verwendeten Schulbuch und der Qualität der Antworten der Lehrkräfte?

Die Fragestellungen sind als solche (und nicht als Hypothesen) formuliert, da sie sich aufgrund des Designs der Untersuchung nur auf diese selbst beziehen können. Es liegt zwar nahe, die erhaltenen Ergebnisse als repräsentativ für bundesdeutsche Verhältnisse anzusehen, doch reichen die Stichproben, auch schon die Stichprobenkriterien, nicht zu einer expliziten Untersuchung genau dieser Ziele aus. Ein Beispiel: Soll ein Zusammenhang zwischen verwendetem Schulbuch und Qualität der Lehrkraftantworten hergestellt werden, hätte eine Stichprobe entweder wesentlich größer oder hierauf bezogen sein müssen, d.h. es wäre nötig gewesen, eine genügend große Anzahl von Lehrkräften interviewen zu können, die mit einem bestimmten Schulbuch unterrichten.

Hierauf wurde jedoch in Hinblick auf eine andere Fragestellung verzichtet. Die Auswahl der Lehrkräfte wurde bestimmt durch das Merkmal „unterrichtet in einer vierten Klasse Mathematik und tut dies auch schon seit Beginn der ersten Klasse“.
In Kap. 3 wurde erläutert, in welcher Weise „guter“ Unterricht, dessen Bestandteil ja unter anderem die verständnisorientierte Vermittlung von Wissen ist, „gute“ Schülerleistungen hervorbringen kann. Oder anders: Ist eine Lehrkraft zu verständnisorientierten Erklärungen in der Lage, kann sie den Schülern auch effektiver und nachhaltiger Wissen vermitteln. Die Schülerleistungen, die mit einem solchen Lehrkraftwissen in Zusammenhang gebracht werden können, müssten demnach besser ausfallen als die vergleichbarer Schülergruppen von Lehrkräften, die nicht verständnisorientiert unterrichten.

Eine weitere Fragestellung, auf die sich der zweite Teil der Untersuchung bezieht, leitet sich aus der Annahme ab, es bestehe ein Zusammenhang zwischen Lehrkraftwissen und Schülerleistungen:

5. Schüler, die von einer Lehrkraft unterrichtet werden, die über ein tiefgehendes mathematisches Wissen verfügt, zeigen vor allem in Aufgaben zum Zahlenverständnis oder zu Sachzusammenhängen bessere Leistungen als diejenigen, die von einer Lehrkraft unterrichtet werden, deren mathematisches Verständnis eher verfahrensorientiert ist.

Natürlich ist eine strenge (Über-)Prüfung dieser letzten, fünften Fragestellung, im Rahmen dieser Untersuchung nicht möglich. Dazu hätte es einer Reihe von Unterrichts-Verlaufsbeobachtungen bedurft, die jedoch im zeitlichen Rahmen der Untersuchung nicht vorzunehmen waren. Zudem dürften Faktoren wie z.B. effiziente Klassenführung, die Fähigkeit zur Wissensstrukturierung und viele andere den Effekt überlagern. Ein Forschungsdesign, mit dem eine diesen Zusammenhang benennende Hypothese in empirisch gesicherter Form geprüft werden könnte, müsste entweder auf eine gewaltige Stichprobe zurückgreifen, um mit statistischer Hilfe aussagekräftige Wahrscheinlichkeiten zu erlangen, oder aber experimenteller Art sein. Letzteres ließe sich folgendermaßen gestalten:

Zunächst wird eine genügend große Anzahl von Grundschulklassen einer gleichen Klassenstufe ausgewählt, die bezüglich unterrichtsrelevanter Merkmale (Lernausgangslage, Motivation, Klassenstärke, soziales Einzugsgebiet, familiärer Hintergrund, Schulphilosophie etc.) nahezu gleich sind. Ebenso müsste sichergestellt sein, dass diese in Mathematik unterrichtenden Lehrkräfte eine ähnliche Ausbildung durchlaufen haben, ungefähr gleichen Alters sind, gleiche Fähigkeiten in Bezug auf Klassenmanagement, Wissensstrukturierung, Schaffen von günstigen Lernarrangements, effizienter Klassenführung u.s.w. aufweisen und sich auch in ihrer Persönlichkeit ähneln, d.h. gleiche motivationale Eigenschaften haben, „beliebte“ Persönlichkeiten sind - oder gerade nicht - , etc.
Nun könnte man ein Drittel der Lehrkräfte in bezug auf ihr eigenes, tiefgehendes mathematisches Verständnis über einen längeren Zeitraum hinweg fortbilden.
Um sicherzugehen, dass nicht die Tatsache der Fortbildung als solche, unabhängig von ihrem Inhalt, allein vielleicht durch den damit zusammenhängenden Motivationsschub, die Möglichkeit des Austauschs mit anderen Kollegen o.ä., für Effekte sorgt, die wiederum zu guten Leistungen der Schüler führen könnten, müsste ein zweites Drittel

ebenfalls sinnvolle Fortbildungsmaßnahmen erhalten. Denkbar wären hier künstlerische oder sprachliche Angebote.
Die verbleibende dritte Gruppe von Lehrkräften erhielte überhaupt keine Fortbildung. Nach einem bestimmten Zeitraum, z.B. ein oder zwei Jahren, ließe sich dann erkennen, ob die Leistungen der Schüler der Gruppe von Lehrern, die mathematisch-fachwissenschaftlich fortgebildet wurden, gegenüber denen, deren Lehrer keine Fortbildung erhielten, von dem vertieften Fachwissen der Lehrkräfte beeinflusst worden sind.

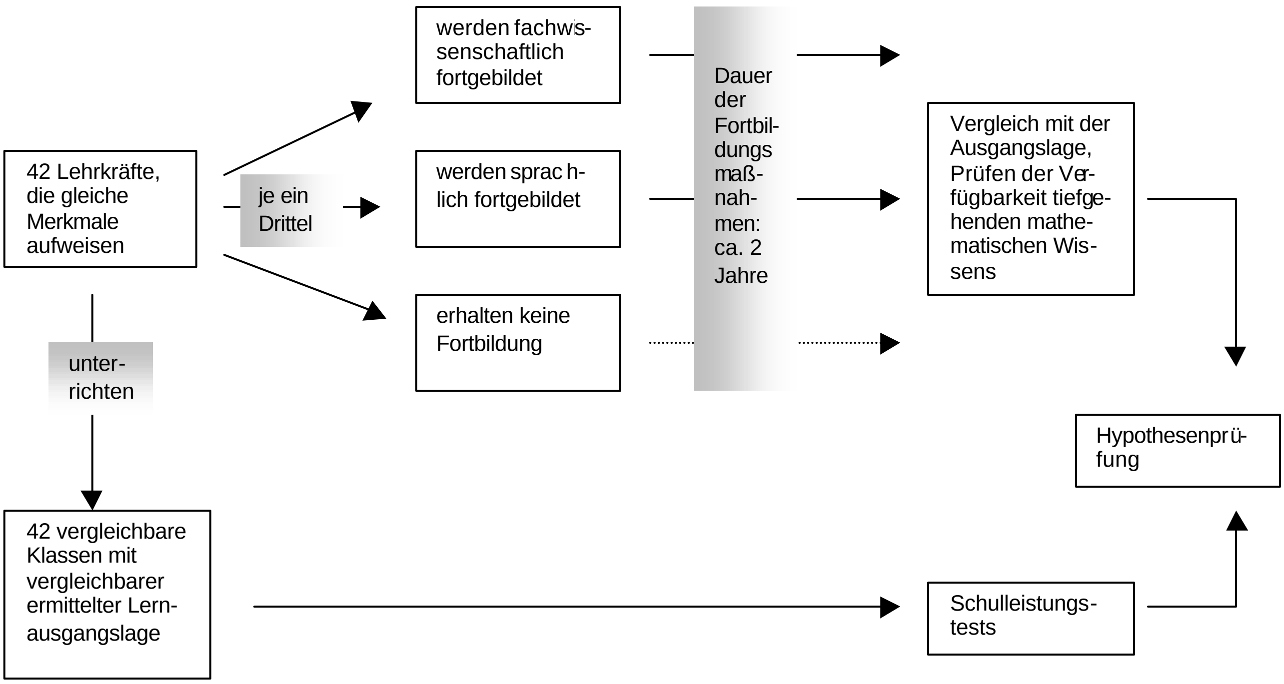


Abb. 34: Design zur strengen Prüfung eines Zusammenhanges zwischen Lehrkraftwissen und Schülerleistung

Dass die Kosten und der organisatorisch-zeitliche Aufwand von einer Person allein nicht zu bewältigen wären, macht das oben skizzierte Design mehr als deutlich. Dennoch wird in der im Folgenden beschriebenen Untersuchung der Versuch unternommen, einen möglichen Zusammenhang zwischen Lehrkraftwissen und Schülerleistungen zu identifizieren. Ausgehend davon, dass die Schüler einer ersten Klasse überwiegend nach Zufallsprinzipien auf die jeweiligen Parallelklassen verteilt werden, darf hier vermutet werden, dass sich das Niveau dieser Klassen gleicht. Es sei betont, dass dies nur auf jeweils eine Schule zutreffen mag - Niveauunterschiede zwischen verschiedenen Schulen liegen, aufgrund des Einzugsgebietes mit seinen sozialen Spezifikationen, außer Frage und wären nur mit Hilfe von Schulleistungstests ermittelbar.

Lehrkräfte ein und derselben Schule haben also mit großer Wahrscheinlichkeit eine vergleichbar leistungsfähige Schülerklientel, ähnliche Klassenräume mit gleicher Ausstattung etc. Die Wahrscheinlichkeit, dass Unterschiede in den Leistungen der Schüler auf die methodische und fachliche Kompetenz der Lehrkräfte zurückzuführen ist, ist also recht groß. Bei der Fülle von Faktoren, die einen „guten“ Lehrer determinieren, wäre es allerdings leichtsinnig, bei nur einer Schule bessere Schülerleistungen allein auf das tiefere Verständnis der Lehrkräfte zurückzuführen. Wiederholt sich dies jedoch an mehreren verschiedenen, voneinander unabhängigen Schulen, kann von einem Zusammenhang ausgegangen werden. Genau an diesem Punkt setzt der zweite Teil der Untersuchung an, die im Folgenden skizziert werden soll.

5.3 *Das Untersuchungsdesign*

Das folgende Schaubild gibt einen Überblick über die Komponenten der Untersuchung: die Lehrerinterviews als Kern der Untersuchung und der Schülerleistungstest sowie die Pilotuntersuchung über die Handreichungen als kleinere Teilerhebungen. Die eingesetzten Instrumente werden im nachfolgenden Abschnitt dargestellt, erläutert und begründet.

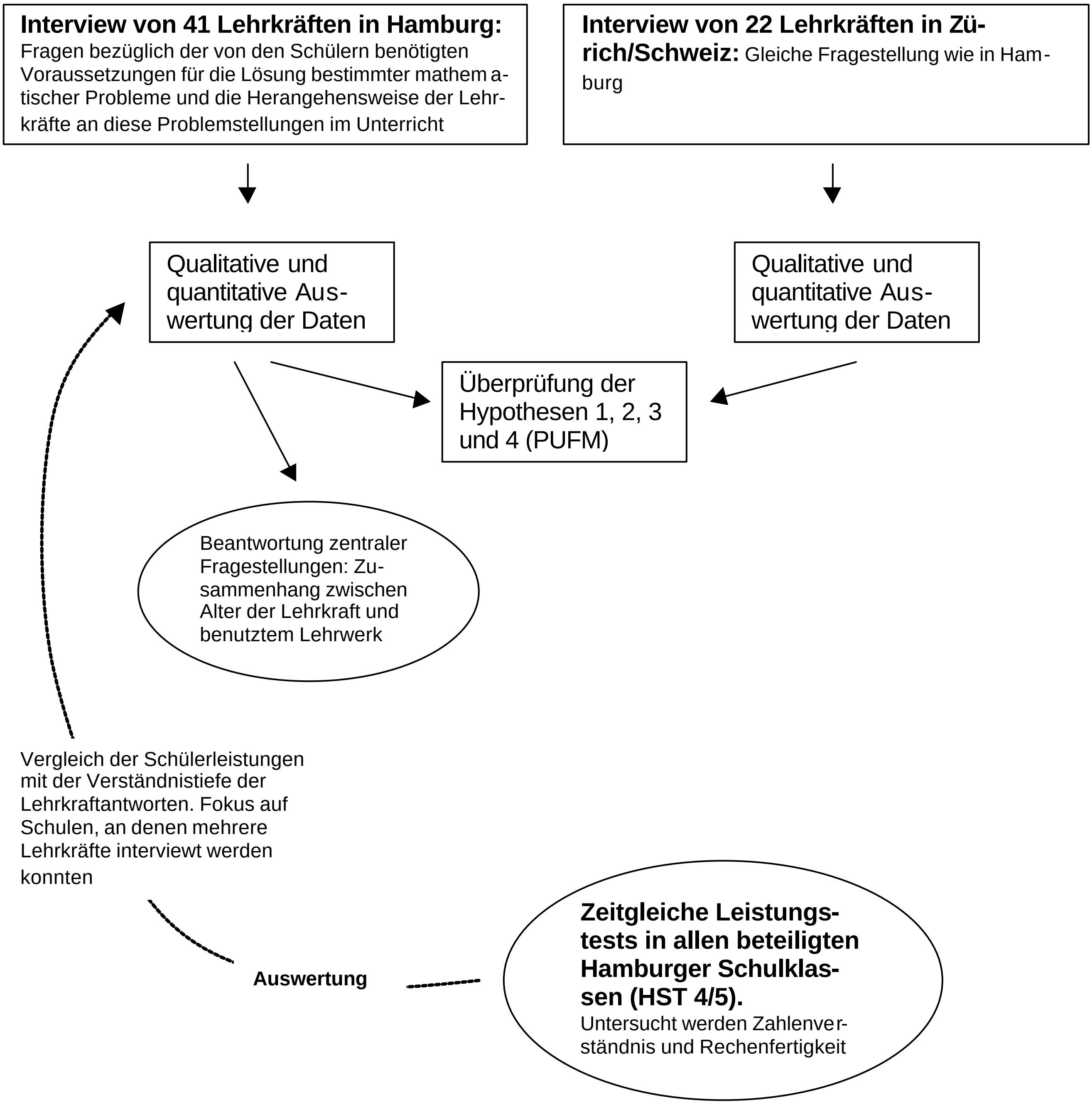


Abb. 35: Das Design der eigenen Untersuchung

5.4 *Durchführung des Vorhabens/verwendete Forschungsinstrumente*

5.4.1 Auswahl der Schulen/Lehrkräfte

Zunächst wurden 41 Lehrkräfte in Hamburg, die in einer vierten Klasse Mathematik unterrichten und dies auch schon von Beginn des 1. Schuljahres an in dieser Klasse tun, in einem Interview befragt.
Um diese Lehrkräfte für das Vorhaben zu gewinnen, ging der Verfasser persönlich an verschiedene Schulen im Hamburger Stadtgebiet, stellte sich vor und vereinbarte einen Interviewtermin. Die Schulen wurden mit Hilfe von Gebietsdaten des statistischen Landesamtes Hamburg ausgewählt. Es wurde versucht, sowohl in Gebieten mit eher sozial schwachem als auch Gebieten mit eher sozial starkem Einzugsgebiet (Einkünfte der Eltern, Arbeitslosen- und Ausländeranteil) einen quantitativ möglichst ausgewogenen Anteil von Lehrkräften zu interviewen.
Leider standen für eine Auswahl Schweizer Schulen keine statistischen Gebietsdaten zur Verfügung. Die Gefahr einer einseitigen Auswahl wurde jedoch durch eine möglichst breite Streuung über das gesamte Stadtgebiet Zürich sowie durch Auskünfte von Anwohnern und Schulleitungen minimiert.

5.4.2 Datenerhebung in Hamburg

Es wurden zwei Erhebungsformen eingesetzt: Interview und Schüler-Leistungstest. In Hamburg kamen beide Methoden zum Einsatz, in Zürich blieb es bei der Lehrerbefragung.[9]

Lehrerinterview

Das Interview wurde im Sinne eines „fokussierten Interviews“ (Merton & Kendall 1979) durchgeführt. Das charakteristische an dieser Interviewform ist die Fokussierung auf einen im Vorhinein bestimmten Gesprächgegenstand oder -anreiz, der in diesem Fall durch verschriftlichte Unterrichtsszenarien (s.u.) geschaffen wurde. Im anschließenden Gespräch wurden dann die Reaktionen und Interpretationen der oder des Befragten bezüglich des Fokus, der Unterrichtssituation, in relativ offener Form festgehalten (Tonbandaufzeichnung, Transkription). Vorteil dieser Interviewtechnik ist, dass hier den Befragten die Chance gegeben wird, sich frei und auch zu nicht-antizipierten Aspekten

[9] Es wurde bereits dargelegt, dass aus Zeit- und Kostengründen auf Leistungstests in Zürich verzichtet werden musste. Dies bedeutet nicht unbedingt eine qualitative Einbuße, da die in Hamburg mögliche Gegenüberstellung hinreichend Begründungsmaterial lieferte.

zu äußern. Nachteil ist der außerordentlich hohe Aufwand der Transkription und im Nachgang vorzunehmenden Aussageverdichtung, wie sich auch an der Fülle an Aufzeichnungen in Anhang 9 und 10 ablesen lässt.
Nach einer allgemeinen Darstellung der Ziele der Untersuchung wurden den Lehrkräften folgende drei Unterrichtsszenarien sowohl in mündlicher als auch schriftlicher Form dargeboten.

1. Schriftliche Subtraktion mit Übertrag

„Lassen Sie uns eine Weile ein Thema betrachten, mit dem Sie im Unterricht häufiger zu tun haben: schriftliche Subtraktion mit Übertrag. Schauen Sie sich diese Aufgaben an:

$$\begin{array}{r} 4\;5 \\ -\;2\;7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\;2 \\ -\;2\;5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\;1 \\ -\;7\;9 \\ \hline \end{array}$$

Wie würden Sie an solche Probleme herangehen, wenn Sie in einer dritten Klasse unterrichteten? Was müssten Kinder Ihrer Meinung nach verstehen oder tun können, bevor Sie beginnen können, die schriftliche Subtraktion mit Übertrag im Unterricht zu behandeln?“

2. Schriftliche Multiplikation

„Stellen Sie sich folgende Situation vor:
Einige Lehrer in der sechsten Klassenstufe bemerken, dass mehrere ihrer Schüler bei der schriftlichen Multiplikation den gleichen Fehler machen. Bei dem Versuch, die Aufgabe

$$123 \quad x \quad 645 \quad =$$

zu rechnen, scheinen die Schüler zu vergessen, die Zahlen (also die Teilprodukte) immer eine Spalte weiter „zu rücken“. Sie rechnen so

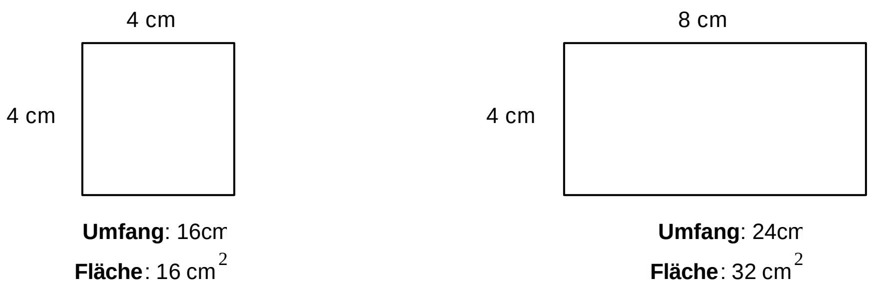
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~x~~	~~6~~	~~4~~	~~5~~	~~=~~	~~1~~	~~8~~	~~4~~	~~5~~	
				7	3	8						
				4	9	2						
				6	1	5						
			1	8	4	5						

anstatt so:

1	2	3	x	6	4	5	=	7	9	3	3	5
		7	3	8								
			4	9	2							
				6	1	5						
		7	9	3	3	5						

Während die Lehrer sich einig sind, dass dies ein Problem ist, werden sie sich jedoch nicht einig darüber, was zu tun ist.
Was würden Sie tun, unterrichteten Sie in einer sechsten Klasse und beobachteten, dass mehrere Schüler so rechnen?“

3. Geometrie
„Stellen Sie sich vor, eine Schülerin aus der vierten Klasse kommt aufgeregt in den Unterricht. Sie sagt Ihnen, dass sie eine Theorie ausgeknobelt hat, die Sie der Klasse niemals erzählt haben. Sie erklärt, dass sie herausgefunden hat, dass mit dem Zunehmen des Umfanges einer geschlossenen Figur auch gleichzeitig die Fläche größer wird. Sie zeigt Ihnen dieses Bild, um zu beweisen, was sie meint:



Wie würden Sie der Schülerin antworten?“

Zunächst wurde jeweils ein Szenario in schriftlicher Form[10] ausgehändigt, anschließend von dem Verfasser laut und mit Betonung der für die Untersuchung wesentlichen Aspekte vorgelesen. Dazu wurde der Hinweis gegeben, dass die Antworten keiner Zeit- oder Umfangsbegrenzung unterliegen (d.h. die Lehrkräfte sollten sich bewusst sein, dass sie so ausführlich antworten können, wie sie persönlich es für richtig halten) sowie darauf, dass auch die im Klassenraum zur Verfügung stehenden didaktisch-methodischen Materialien oder Schulbücher gern zu Hilfe genommen werden können. Die Darbietung des jeweils nächsten Szenarios erfolgte immer erst nach der Beant-

[10] siehe 5.4.2 (Lehrerfragebogen)

wortung des vorhergehenden.
Während des Interviews wurden möglichst wenige Zwischenfragen gestellt. Auf strukturierende Fragen wurde verzichtet, um die Antworten der Lehrkräfte nicht zu beeinflussen. Da den Lehrkräften das Untersuchungsziel bekannt war, wäre eine strukturierte Frage wie "Halten sie ein tiefgehendes Verständnis des Stellenwertsystems für ein Verstehen der schriftlichen Subtraktion für notwendig?" höchstwahrscheinlich sehr einseitig beantwortet worden (Versuchsleitereffekt - vgl. Wellenreuther 2000, S. 131). Es wurde aber dann nachgefragt, wenn Erklärungen überhaupt nicht nachvollziehbar waren, also Argumentationslücken aufwiesen. Selbstverständlich wurden Verständnisfragen beantwortet. In einigen Fällen wurde mit Hilfe von Umschreibungen der Situation o.ä. versucht, beruhigend auf die Lehrkraft einzuwirken.

Diese Szenarien, die vorstellbare oder auch typische Unterrichtssituationen darstellen, wurden der Studie "Knowing and teaching elementary mathematics" von Liping Ma (1999) entnommen. Es sei an dieser Stelle ausdrücklich die besondere Leistung Ma`s hervorgehoben, Szenarien dieser Komplexität und gleichzeitigen Leichtverständlichkeit entwickelt zu haben. Mit der Auswahl und Konstruktion ihrer Szenarien gelingt Ma die Bereitstellung eines Rahmens, der ausreichte, um die Struktur der gesamten Elementarmathematik aufzunehmen. Vergleichbare Szenarien auf diesem Niveau und mit dieser Komplexität zu entwickeln ist extrem schwierig, wenn nicht gar unmöglich – einer der Gründe, die den Verfasser dazu bewogen, die Szenarien Ma`s zu übernehmen. Darüber hinaus garantierte die vormalige Verwendung eine gute Verständlichkeit der beschriebenen Unterrichtssituationen, die Szenarien waren gewissermaßen schon „erprobt“. Hätte die Schilderung eine der Situationen zu Missverständnissen seitens der Lehrkräfte geführt, die die Untersuchung beeinflussen könnten, hätte Ma dies in ihrer Studie bereits deutlich werden lassen.
Schließlich wird durch den Gebrauch der gleichen Szenarien eine anschließende Vergleichbarkeit der Qualität der Lehrkraftantworten ermöglicht. Exkursorisch soll so der Frage nachgegangen werden, ob sich die Qualität der Antworten vor dem Hintergrund unterschiedlicher Kulturen und Ausbildungssysteme unterscheidet.

Lehrerhintergrundvariablen

Wie schon erwähnt, wurde bei der Auswahl der Lehrkräfte darauf geachtet, nur diejenigen zu interviewen, die in einer vierten Klasse Mathematik unterrichten und dies auch schon seit Beginn der ersten Klasse ohne Unterbrechung in dieser Klasse tun.

Im Rahmen des Interviews wurden weiterhin folgende Lehrerhintergrundvariablen erhoben:

- *Alter der Lehrkraft*
  Mit Hilfe der Abfrage des Alters sollte geklärt werden, ob die zunehmende Lebenserfahrung der Lehrkräfte eine quasi „weitere Sicht der Dinge“ mit sich bringt. Legen ältere Lehrkräfte einen größeren Wert auf einen tieferen Einblick in das Fachwissen - oder eben gerade nicht?
- *Berufserfahrung: Bereits geleistete Dienstjahre als Lehrkraft*
  Es liegt die Vermutung nahe, dass sich eine Lehrkraft mit zunehmender Berufserfahrung ein umfangreicheres und fundierteres Fachwissen aneignet, als sie dies noch zu Beginn ihrer Berufstätigkeit besaß, oder auch direkt nach Einstieg in das Berufsleben als Fachlehrkraft von der Universität oder Fachhochschule kommend über ein fundiertes Wissen verfügt, das sich dann im Laufe der Zeit „verdünnt“, quasi von selbstentwickeltem „Praxiswissen“ abgelöst wird.
- *verwendetes Schulbuch*
  In Kapitel 8 wird später eine Auswahl von Lehrwerken auf ihre Qualität bezüglich der Möglichkeit, sich mit ihrer Hilfe ein tiefgehendes mathematisches Wissen anzueignen, überprüft. Die Erhebung des verwendeten Schulbuchs soll aufzeigen, ob es vielleicht einen Zusammenhang zwischen diesem und den Antworten der Lehrkräfte oder den Leistungen der Schüler gibt.
- *Fakultas Mathematik*
  Man sollte meinen, dass eine universitäre, fachwissenschaftliche Ausbildung ein tiefgehenderes Verständnis der Mathematik zur Folge hat. Dies zu prüfen ist der Grund für die Erhebung dieser Hintergrundvariablen.

Es sei jedoch an dieser Stelle, quasi als Vorgriff auf die Beschreibung der Untersuchungsergebnisse erwähnt, dass zwischen den erhobenen Hintergrundvariablen und den Aussagen der Lehrkräfte oder den Leistungen der Schülerinnen und Schüler keine Zusammenhänge erkennbar sind. Erstaunlich ist diese Erkenntnis vor allem in Hinblick auf die Lehrkräfte mit Fakultas Mathematik: Zwischen ihren Antworten und denen der „fachfremden“ Mathematiklehrer gibt es keine bemerkbaren Unterschiede. (s. Kap. 6.5)

Schulleistungstest

In 39 Klassen der 41 befragten Lehrkräfte wurde annähernd zeitgleich (zwei verschiedene Tage innerhalb einer Woche) ein Schulleistungstest (HST 4/5, s. Abschnitt 5.4.3) durchgeführt. Dafür wurden Tester mit dem Test vertraut gemacht und auf die Testsituation vorbereitet.

Um einen Leistungsquerschnitt der Schüler zu erhalten, der nicht vom Zeitpunkt der Testerhebung beeinflusst werden kann, sollte die Testung aller 39 Klassen möglichst zeitgleich stattfinden. Dazu war eine große Menge an Testdurchführern notwendig. Deshalb wurden vom Verfasser 23 Studenten eines Forschungsmethodenseminars sowie 3 Studenten eines Pädagogikseminars (6. Semester Lehramt) der Universität Lüneburg um Mithilfe ersucht. Sie wurden in einer Schulungsveranstaltung in kleinen Gruppen in die Testdurchführung eingewiesen.

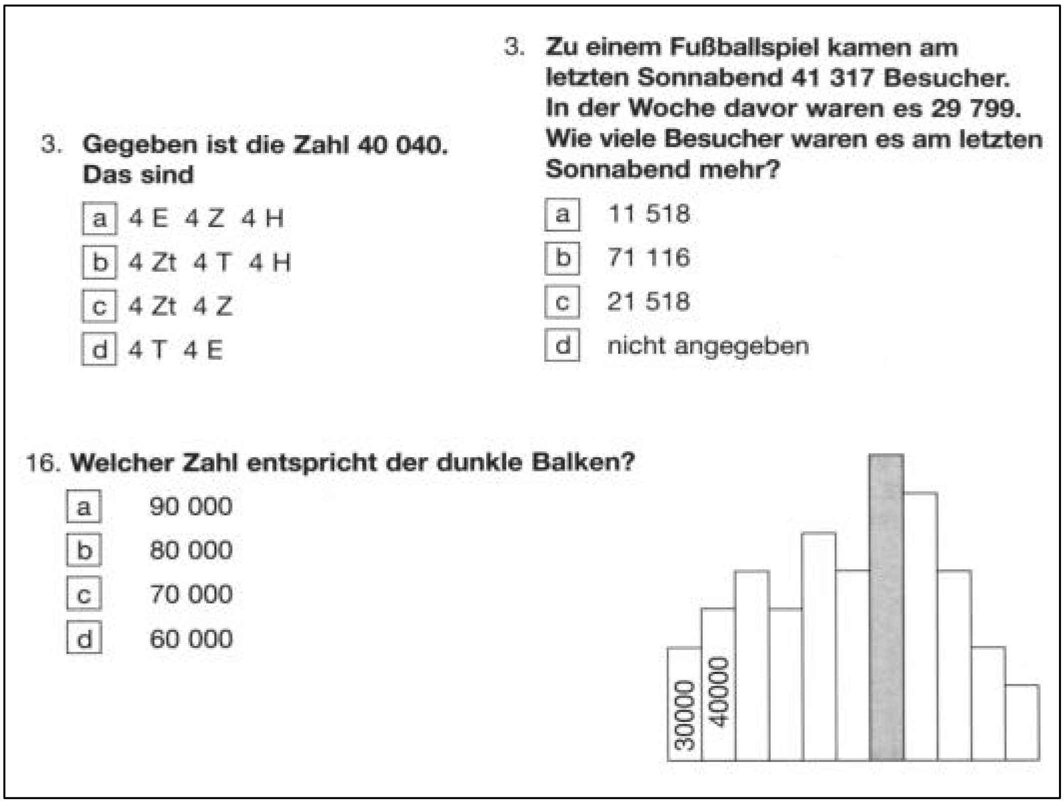
- Die Studenten wurden für die bevorstehende Testsituation zunächst allgemein sensibilisiert. Die Situation im Klassenraum wurde vor Augen geführt, und die Studenten wurden auf die etwaige Nervosität bis hin zur Furcht der Schüler und Lehrkräfte vorbereitet.
- Weiterhin wurden einfache, organisatorische Dinge bewusst gemacht. Bevor mit der Einführung und dem Test in der Klasse begonnen werden konnte, sollte sichergestellt sein, dass die Kinder neben einem Testheft (Form A oder Form B) und einem Antwortbogen (passend zu Form A oder Form B) die Materialien Bleistift, Anspitzer, ein Blatt Papier, Radiergummi und Lineal auf ihren Tischen liegen haben.
- Da das Austeilen von Arbeitsmaterialien in der Grundschule erfahrungsgemäß eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt (die von Klasse zu Klasse recht unterschiedlich ausfallen kann), wurden die Tester gebeten, die Testhefte möglichst schon vor Beginn der Unterrichtsstunde mit Hilfe der Klassenlehrkräfte auf den Schülertischen zu verteilen. Somit sollte gewährleistet werden, dass tatsächlich die volle Testzeit zur Verfügung stand.
- Die Studenten bekamen eine ausformulierte Testanleitung[11], auf der die Anweisungen für die Schüler zur Durchführung des Tests wörtlich abgedruckt waren, um zu gewährleisten, dass alle Schüler von der gleichen Aufgabenstellung ausgehen. Das Vorlesen der Aufgabenstellung (richtige Betonung und angemessenes Tempo) wurde besprochen und stellenweise geprobt.

In den 39 Hamburger Grundschulklassen wurde der mathematische Teil des sogenannten HST 4/5 (Hamburger Schulleistungstest für vierte und fünfte Klassen) eingesetzt. In diesem Testteil werden sowohl Zahlenverständnis als auch Rechenfertigkeit überprüft (s. auch Abb. 36). Die Beantwortung der Fragen erfolgte auf einem Extrabogen per Ankreuzverfahren. Es gab zwei verschiedene Testformen A und B, so dass die

[11] s. Anlage 4

Wahrscheinlichkeit einer Vortäuschung von Schülerleistungen als sehr gering einzuschätzen ist.

Der Untertest des HST 4/5 wurde deshalb ausgewählt, weil der mathematische Teil einschließlich einführender Erklärungen innerhalb einer Schulstunde zu bewältigen ist, was schon aus ökonomischen Gründen (Testkosten und Testerhonorar) nicht unwichtig war. Entscheidend war jedoch die Verwendung weniger sprachintensiver Erklärungen oder Aufgabenformulierungen innerhalb des HST. Eine Benachteiligung von Schülern mit Deutsch als Zweitsprache und die damit einhergehende Verzerrung der Befunde konnte auf diese Weise vermieden werden.



3. **Gegeben ist die Zahl 40 040. Das sind**

a 4 E 4 Z 4 H

b 4 Zt 4 T 4 H

c 4 Zt 4 Z

d 4 T 4 E

3. **Zu einem Fußballspiel kamen am letzten Sonnabend 41 317 Besucher. In der Woche davor waren es 29 799. Wie viele Besucher waren es am letzten Sonnabend mehr?**

a 11 518

b 71 116

c 21 518

d nicht angegeben

16. **Welcher Zahl entspricht der dunkle Balken?**

a 90 000

b 80 000

c 70 000

d 60 000

Abb. 36: 3 Beispielaufgaben aus dem mathematischen Teil des HST 4/5. Aus: Mietzel/Willenberg (2000). Hamburger Schulleistungstest für vierte und fünfte Klassen. Göttingen: Hogrefe. Testform A, S. 26 ff

5.4.3 Datenerhebung in Zürich

Wie bereits mehrfach erwähnt, haben sowohl bei TIMSS als auch bei PISA die Schüler in der deutschsprachigen Schweiz im mathematischen Bereich deutlich besser abgeschnitten als ihre Altersgenossen in der Bundesrepublik Deutschland. In einer Nebenuntersuchung wurden daher mit 22 Lehrkräften des Kantons Zürich unter gleichen Bedingungen die gleichen Interviews geführt wie mit den deutschen.

Gleichzeitig wurden aber auch allgemeine Informationen über den Aufbau des Schulsystems und die eingesetzten Schulbücher erhoben. Aus organisatorischen und finanziellen Gründen war eine Erhebung der Schülerleistungen in den Schweizer Schulklassen leider nicht möglich.

5.4.4 Ein Vergleich der Rahmenbedingungen in Hamburg und Zürich: Beobachtungen während der Datenerhebung.

Die Organisation und Durchführung der Datenerhebungen in Hamburg und in Zürich beanspruchten unabhängig von der unterschiedlichen Anzahl an befragten Lehrkräften einen ungleichen organisatorischen Aufwand und waren auch in einigen Begleitumständen nicht miteinander vergleichbar.

Antragsverfahren

So war eine Befragung der Lehrkräfte in Hamburg erst möglich, nachdem diese in der Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung beantragt worden war. Voraussetzung für eine Genehmigung war die Vorlage eines Untersuchungsverlaufsplans nebst Angabe und Begründung der mit der Erhebung verfolgten Ziele in der Hamburger Behörde unter Beifügung eines Genehmigungsschreibens der betreffenden Schulleitungen, in dem bestätigt wurde, dass sie mit der Durchführung eines Interviews und der Schulleistungstests einverstanden seien. Die Formulierungen in diesem Schreiben mussten wiederum von der Behörde genehmigt worden sein, bevor es der Schulleitung vorgelegt werden durfte. Schließlich mussten sich die Lehrkräfte schriftlich einverstanden erklären, an einem Interview teilzunehmen, und am Tag des Interviews schriftlich quittieren, dass sie über die Untersuchungsziele aufgeklärt worden und mit der dann beginnenden Befragung einverstanden seien.

Auf der einen Seite ist dieses Antragsprozedere natürlich außerordentlich wichtig, um zu gewährleisten, dass die persönlichen Rechte jedes einzelnen Beteiligten gewahrt bleiben und nicht in einer verdeckten Form von Kontrolle ein Missbrauch von Datenerhebungen (z.B. zu Werbezwecken oder aus kriminellen Beweggründen) vorgenommen wird.
Auf der anderen Seite wurde durch die schriftliche Absicherung eine Atmosphäre geschaffen, die zu Beginn eines Interviews oft zu Unsicherheiten und großer Vorsicht, in einigen Fällen sogar zu Misstrauen führte ("Nanu, sie wollen mich doch bloß einige Dinge fragen, oder?"), ganz abgesehen davon, dass für den Verfasser als Antragssteller ein immenser Zeitaufwand mit der Erstellung der Genehmigungsschreiben ver-

bunden war, die teilweise noch nachgebessert werden mussten, was aufgrund der dienstlichen Wege, die diese Schreiben nehmen mussten, oft mehrere Wochen dauerte.

In Zürich war die Beantragung der Untersuchung ungleich einfacher. Die zuständige Schulaufsicht teilte dem Verfasser telefonisch mit, dass die Schulleitungen jeweils selbst über eine Erlaubnis entscheiden würden; er solle doch "einfach vorbeigehen und fragen".

Bereitschaft der Schulen und der Lehrkräfte

Die Begrüßung und Aufnahme an den Züricher Schulen war ohne Ausnahme herzlich und offen. Es wurde nach den Untersuchungszielen gefragt und die Interviews von allen Schulleitungen genehmigt. Vielfach wurden Einladungen zu Unterrichtshospitationen ausgesprochen. Termine für die Befragungen konnten schnell und oft noch für den gleichen Nachmittag vereinbart werden. Nur eine Lehrkraft lehnte ein Interview aus Zeitgründen ab.
Die Atmosphäre an vielen Hamburger Schulen war höflich, und in den meisten Fällen wurde vor allem von den Lehrkräften eine gute Unterstützung geboten. An einer Schule wurde der Verfasser ausdrücklich unterstützt: Die Schulleitung organisierte sogar extra Vertretungsunterricht, damit die Befragung in Ruhe zu Ende geführt werden konnte.
In einigen Fällen lehnte die Schulleitung von vornherein eine Beteiligung ab (2 Schulen, Untersuchung könne den Lehrkräften (jeweils 3) aus Zeitgründen nicht zugemutet werden). In einigen Schulen waren die Lehrkräfte, die ich um eine Beteiligung bat, sehr zurückhaltend oder vorsichtig. Einige Lehrkräfte lehnten eine Beteiligung ab und gaben dafür unterschiedliche Gründe an: 2 trauten sich nicht zu, mathematikspezifische Fragen zu beantworten, 6 führten organisatorische oder zeitliche Probleme an, während 4 Lehrkräfte überhaupt keine Gründe nannten. 3 Lehrkräfte äußerten grundsätzliche Bereitschaft, waren dann jedoch für Terminabsprachen so schwer erreichbar, dass ein Interviewtermin nicht zu Stande kam.

Bei den 41 Lehrern konnten in 39 Fällen auch die Klassen getestet werden. Zwei Lehrkräfte lehnten aus unterschiedlichen Gründen (Organisatorisches bzw. "den Schülern nicht zumutbar") eine Teilnahme ihrer Klasse am Test ab. Leider durften einige der Testbögen nicht von mir eingesehen werden, da die Eltern dazu ihr Einverständnis verweigerten. Dies kam jedoch sehr selten vor und hat keinen bemerkbaren Einfluss auf eine quantitative Auswertung gehabt.

Unterschiedliche Arbeitszeiten

In den Grundschulen in Zürich werden die Klassen bis zum Ende des 6. Schuljahres geführt. Ein Klassenlehrerwechsel ist nach dem 3. Schuljahr vorgesehen. Es wird auch am Nachmittag Unterricht erteilt. Die Stundenpläne der Schulen, die ich besuchen konnte, sahen üblicherweise 4-5 Unterrichtstunden à 45 Minuten am Vormittag (bis ca. 12 Uhr) und 2-3 Unterrichtsstunden am Nachmittag vor (ca. 14-16 Uhr).
Für die Lehrkräfte bedeutet dies eine Mittagspause von durchschnittlich ca. 90 Minuten, die im Allgemeinen gemeinsam in der Schule verbracht wird. Es wird zusammen gegessen oder Unterricht für die kommenden Stunden vorbereitet. In einigen Fällen war diese Mittagszeit auch Basis ganz spontaner Interviewtermine ("Kommen Sie doch einfach nachher in der Mittagspause.").
Als Lehrkraft in Niedersachsen unterrichtete der Verfasser durchschnittlich 6 Schulstunden à 45 Minuten am Vormittag und hatte faktisch keine Pause, sieht man einmal von den sogenannten "großen Pausen" ab, die jeweils 15-20 Minuten dauerten, jedoch oft für Schülergespräche oder fachorganisatorische Vorbereitungen genutzt wurden. Unterrichtsschluss war dafür durchschnittlich um 13:30 Uhr.
Die Unterrichtssituation in Hamburg ist ähnlich, auch wenn die "Verlässliche Halbtags-Grundschule" inzwischen eine verbindliche Schulzeit von 8-13 Uhr festlegt, in der über die Woche verteilt 26 Stunden Unterricht erteilt werden können.

Die Züricher Regelung der Unterrichtszeit hat nach Einschätzung des Verfassers zwei entscheidende Vorteile: Zum einen entfällt die immense Anstrengung und psychische Belastung, die 6 Unterrichtsstunden am Stück mit sich bringen. Aus eigener Erfahrung lässt sich sagen, dass vor allem die fünfte und sechste Schulstunde eine wirkliche Anstrengung und motivationale Herausforderung darstellen kann, wenn die "Pausen" während des Schulvormittags nicht als solche genutzt werden können.
Zum anderen entsteht an Züricher Schulen durch die Mittagspause eine Art "institutionalisierter Raum" zum gegenseitigen Erfahrungsaustausch und zu gemeinsamer Planung, der an deutschen Schulen in der Regel entfällt, da hier die Mittagspause normalerweise von den meisten Lehrkräften zu Hause verbracht wird und man sich dann für die anstehenden Vorbereitungen nicht noch einmal extra in der Schule trifft – wodurch nützliche Anregungen durch Kollegen entfallen, so sie nicht fernmündlich oder elektronisch gegeben werden.

Ausbildung der Lehrkräfte

In Zürich werden Lehrer für den Primar- und Sekundarbereich I (mit Grundansprüchen) entweder nach einer Aufnahmeprüfung im Anschluss an die obligatorische Schule in einem Lehrerseminar des Sekundarbereichs II oder nach der Maturität an einem der Universität angegliederten pädagogischen Institut ausgebildet (Dauer: fünf Jahre) (vgl. Schaub/Zenke 2000).
Grundsätzlich entscheidet jeder Kanton der Schweiz über Dauer und Aufwand der Lehrerausbildung, so wie auch in Deutschland die Entscheidung beim Kultusminister des jeweiligen Bundeslandes liegt.
Wichtigster Unterschied: Züricher Lehrkräfte bekommen eine fachspezifische Ausbildung in allen Fächern, die sie als Klassenlehrkraft in der Primarstufe unterrichten könnten. Die schließt auch eine musische Ausbildung mit ein, betrifft aber vor allem die "Kernfächer" Deutsch und Mathematik. Demgegenüber ist Mathematik in den meisten Bundesländern kein Pflichtfach des Studiums, sieht man einmal von einer Art nur sehr wenige Wochenstunden einnehmenden „Grundausbildung“, den Seminaren zum mathematischen Anfangsunterricht, ab.
Darüber hinaus bekommt jeder Absolvent der pädagogischen Hochschule oder des Lehrerseminars in Zürich einen sogenannten "Mentor" an der Schule zugeteilt, an der er eingesetzt wird. Dieses Ausbildungsverhältnis endet offiziell nach einiger Zeit, findet aber wahrscheinlich noch latente Fortsetzung, da die betreffenden Lehrkräfte ja weiterhin dem gleichen Kollegium angehören. In Deutschland endet die Mentorenschaft üblicherweise nach dem Referendariat, da die fertig ausgebildeten Lehrkräfte in den meisten Fällen nicht an ihrer Ausbildungsschule bleiben.

5.4.5 Zeitlicher Rahmen der Datenerhebung

Nach umfangreicher Evaluation der Literatur im Frühjahr 2001 wurden die Interviews mit den Hamburger Lehrkräften im Herbst 2001 (bis Januar 2001), die Interviews in Zürich im Zeitraum der niedersächsischen Frühjahrsferien 2002 durchgeführt. In den darauf folgenden Sommermonaten, beginnend im August 2002, wurden die Interviews transkribiert und anschließend anonymisiert. Mit den ersten Auswertungen konnte dann im Winter 2002 begonnen werden. Die zeitliche Struktur der Untersuchung stellt sich demnach wie folgend dar:

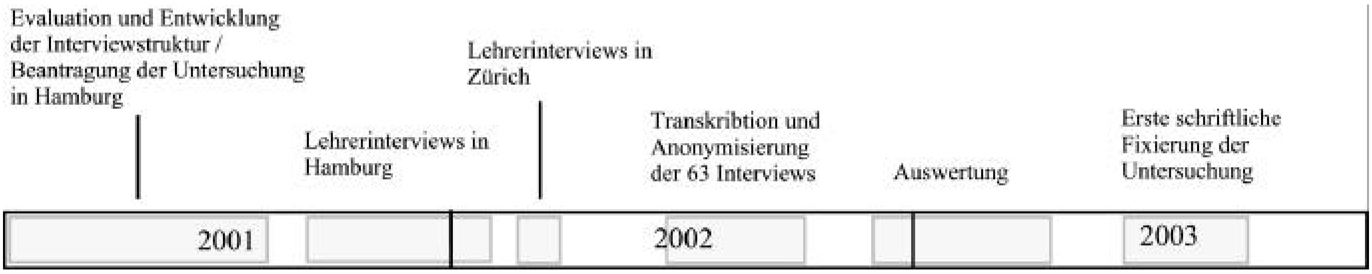


Abb. 37: Zeitlicher Rahmen der Datenerhebung

Eine relativ große Zeitspanne (zwischen 6 und 12 Monate) zwischen Transkription und Auswertung der Interviews ermöglichte eine objektive Betrachtung der Interviews unabhängig vom Eindruck der Interviewsituation.

6 Darstellung und Interpretation der Ergebnisse

6.1 Das mathematische Verständnis der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation der befragten Lehrkräfte

Hauptziel dieser Arbeit und zentrale Hypothese war die Annahme, es gäbe Grundschullehrkräfte, die über ein besonderes Verständnis elementarer Grundschulmathematik, in dieser Arbeit als PUFM definiert, verfügen, diese aber nicht die Mehrheit darstellen (Hypothese 1). In welchen Zusammenhang diese Hypothese eingebettet ist, wurde eingangs in Kapitel 5 noch einmal kursorisch ausgeführt und wird hier bei der Präsentation und Interpretation der Ergebnisse als bekannt vorausgesetzt.

In den Abschnitten 6.1.1 und 6.1.2 werden die Antworten der Lehrkräfte in Hamburg und Zürich getrennt nach Szenario 1 und 2 (schriftliche Subtraktion und Multiplikation) in Hinblick auf das mathematische Verständnis untersucht und gegenübergestellt. Um diese möglichst differenziert kategorisieren zu können, wurde ein mehrstufiges Codierungssystem entwickelt. Mit Hilfe dieses Systems wurden die Antworten der Lehrkräfte in vier verschiedene Kategorien geteilt.
Hat der Verfasser die Untersuchung Ma`s, die in den vorangegangenen Kapiteln bereits mehrfach zitiert und dargestellt worden ist, als wissenschaftliche Basis seiner eigenen Untersuchung vorgesehen, weicht er an dieser Stelle hiervon ab. In ihrer Untersuchung teilt Ma die interviewten Lehrkräfte in zwei Gruppen, nämlich diejenigen, die über PUFM verfügen, und jene, die dies nicht tun. Bei der Auswertung der eigenen Interviews schien dem Verfasser - bezogen auf die eigenen Daten - diese Unterteilung nicht differenziert genug. So gab es z.B. Lehrkräfte, die sich zwar bemühten, verständnisorientiert zu erklären, in ihren Erklärungen jedoch Unsicherheiten oder Unschlüssigkeiten erkennen ließen - bis hin zu Fehlern in entscheidenden Erklärungssegmenten. Sicher lässt dies darauf schließen, dass bei diesen Lehrkräften das PUFM nicht stark genug ausgeprägt ist, um entsprechend qualitative Erklärungen zu geben. Doch besteht - so meint der Verfasser jedenfalls - ein deutlicher Unterschied im Erklärungsniveau gegenüber den Lehrkräften, die auf jegliche Erklärung verzichtet haben und sich z.B. nur auf die Vermittlung eines Algorithmus beschränken.
Im Folgenden werden die Kriterien der verschiedenen Kategorien vorgestellt und zugleich die Antworten der Lehrkräfte der entsprechenden Kategorie zugeordnet.

6.1.1 Das Verständnis der schriftlichen *Subtraktion* bei den in Hamburg und Zürich interviewten Lehrkräften - eine Gegenüberstellung nach einer vorherigen Zuordnung der Antworten zu verschiedenen Kategorien

Kategorie 1

In Kapitel 3, vor allem aber in Kapitel 4 wurden die umfangreichen fachwissenschaftlichen Grundlagen referiert, die notwendig sind, um über ein PUFM zu verfügen. Es steht außer Frage, dass für ein vollendetes PUFM das gesamte dargestellte Fachwissen verfügbar und miteinander vernetzt sein müsste. In Hinblick auf die Interviewsituation müssen hierbei aber Einschränkungen gemacht werden. Im Rahmen eines fokussierenden Interviews würden befragte Lehrkräfte sicher nicht das gesamte grundschulmathematische Fachwissen referieren, um mögliche Vernetzungen mit der Fragestellung aufzuzeigen. Vielmehr war abzusehen, dass sie den Fokus auf dieser bestimmten Fragestellung belassen würden. Ein PUFM ließ sich dann nur mit Hilfe des Rückgriffs auf direkte „Randbereiche“ dieser Situation ermitteln, an denen sich erkennen lässt, dass die Lehrkraft verschiedene mathematische Erklärungen in einen Gesamtzusammenhang einbettet.
Kategorie 1 sind demnach alle Antworten zuzuordnen, die erkennen lassen, dass die Lehrkräfte fachwissenschaftlich richtig erklären und dies zudem auf eine Art und Weise tun, wie es dem in Kapitel 3.5. definierten PUFM entspricht. Folgende Merkmale lassen darauf schließen, dass eine Lehrkraft Erklärungen auf der Grundlage eines PUFM gibt:

a) Die wichtigsten Grundlagen für das Verständnis des Algorithmus werden genannt.
   Hierbei ist vorstellbar, dass im Rahmen des Interviews vereinzelt Details ungenannt bleiben, da diese im Moment nicht präsent sind, aufgrund der Besonderheit der Situation (Nervosität, Stress) nicht angegeben oder von der Lehrkraft vielleicht als "nicht wichtig genug" für die Beantwortung erachtet werden.
   Es sollte jedoch erkennbar sein, dass die Lehrkraft über eine Vorstellung verfügt, wie das Stellenwertsystem aufgebaut ist und dass dies für ein Verständnis des Algorithmus Voraussetzung ist. Dafür muss der Begriff "Stellenwertsystem" nicht fallen, anhand der Äußerungen jedoch erkennbar sein, dass die Wertigkeit der Stellen für das Verständnis des Übertrags eine entscheidende Rolle spielt.
   Ebenso sollte ein Beherrschen des kleinen 1+1 oder ein Verweis auf andere Vorstellungen der Subtraktion in Bezug auf einen Zahlaspekt genannt werden oder in den Äußerungen erkennbar sein, z.B.

   - ... sie müssen das kleine 1+1 beherrschen ...

- ... den Zehnerübergang müssen sie sicher können ...
- ... im Bereich bis 20 sollten sie sicher "+" und "-" rechnen können ...
- ... sie sollten wissen, wie ein Unterschied berechnet wird ...
- ... die Kinder müssen ergänzen können ...

u.s.w.

Durch die Benennung verschiedener Grundlagen oder sogar alternativer Erklärungen macht die Lehrkraft deutlich, dass sie in der Lage ist, die primarmathematischen Inhalte miteinander zu verknüpfen, aufeinander zu beziehen oder aufzubauen.

Aussagen wie

- ... sie müssen sicher im Kopf rechnen können ...

oder

- ... sie sollten auch schon das schriftliche Addieren beherrschen ...

sind zwar in gewisser Weise Voraussetzungen, lassen aber nicht darauf schließen, dass die Lehrkraft elementarmathematische Inhalte miteinander verknüpft.

b) Die Lehrkraft sollte erklären können, warum der Algorithmus funktioniert, wie er von ihr dargestellt wird. Direkt hieraus resultiert das nächste Merkmal:

c) Die Darstellung des Verfahrens sollte richtig sein.
Einige Aussagen von Lehrkräften lassen erkennen, dass ihr Verständnis des Algorithmus aus einer „Mischform“ verschiedener Erklärungsansätze besteht (vgl. dazu auch Abschnitt 6.2.1 „Vermischung von Erklärungsansätzen“). Derlei Erklärungen lassen auf kein korrektes, tiefgehendes verständnisorientiertes Wissen des Algorithmus schließen. Die Schilderung der Vermittlung des Algorithmus kann zwar alternative Erklärungsansätze beinhalten, diese müssen aber in sich logisch und lückenlos nachvollziehbar sein.
Ebenso wenig hilfreich sind z.B. Erklärungen, die beinhalten, dass zur Lösung des Algorithmus in der Zehnerspalte ein Zehner „geborgt“ oder „geklaut“ wird, der dann später wieder „zurückgegeben“ wird. Solcherlei Erklärungshilfen sind dem tiefen Verständnis des Algorithmus nicht dienlich, schaden ihm im Gegenteil sogar und sollten daher in einer verständnisorientierten Erklärung gemäß der hier definierten Kategorie 1 nicht enthalten sein.

Ein gutes Beispiel für diesen Erklärungstyp findet sich in Protokoll 01 S:

> *(...) Zuallererst überprüfe ich, ob die Begriffe Ziffer, Einer, Zehner, Hunderter usw. sitzen. Ob die Kinder das begriffen haben: Was ist der Unterschied zwischen einem Einer und einem Zehner, wie viele Einer braucht es, damit ein Zehner aufgefüllt wird (...)?*
> *Aber die Einführung geht folgendermaßen: Ich nehme entsprechend viele Gegenstände, also so vielleicht nicht gerade 45, aber so 24, oder so irgendwas, Gegenstände mit – was soll das sein? Äpfel, Nüsse, irgend sowas kleines und lasse die Kinder das 1 zu 1 mal tun. Und dann kommt irgendwann einmal der Moment, wo die Kinder merken: Wenn ich jetzt 27 wegnehmen muss, dann geht das irgendwie mit dieser 5 nicht, d.h. ich muss noch etwas voraus schicken, ich lasse dann die Nüsse natürlich entsprechend ordnen: Einer – Zehner. Und dann merken sie relativ schnell, ich kann von 5 Einern nicht 7 wegnehmen. Und was mach ich dann? Und dann nehmen wir einen der Zehner, wandeln den um in Einer, und dann geht's, dann geht plötzlich 15 minus 7. Und dass ich nicht vergesse, dass ich denn schon einen weggenommen habe von den Zehnern, füge ich hier unten an, bei der zweiten zu subtrahierenden Zahl einfach so als Erinnerung für mich diesen einen Zehner noch hinzu.*
> *Ja... Nachher heißt es dann ja schließlich für mich, ich nehme von 4 mal 2 weg, und einen hab schon weggenommen, von vorher, bleibt also noch einer. Oder die andere, die umgekehrte Variante: von dieser 4 hier bleiben mir ja nur noch 3, weil ich ja schon einen gebraucht habe, von diesen 3 kann ich jetzt noch 2 wegnehmen. Und das braucht aber sehr viel Übung. (...) (aus Protokoll 01 S)*

Die Lehrkraft geht zunächst vom Verständnis des Stellenwertsystems aus und betont, dass die Kinder verstehen müssen, wie ein nächst höherer Stellenwert entsteht (*...wie viele Einer braucht es, damit ein Zehner aufgefüllt wird...?).*
Anschließend lässt sie die Schüler die Aufgabe mit Hilfe realer Gegenstände zunächst handelnd lösen. Dadurch wird den Kindern klar, dass zur Lösung der Differenz ein Zehner eingetauscht werden muss (...*Und dann nehmen wir einen der Zehner, wandeln den um in Einer, und dann geht's, dann geht plötzlich 15 minus 7.*)
Schließlich begründet die Lehrkraft, warum der Übertrag genauso unten notiert werden kann, obwohl oben eingetauscht wird.

Auch in Protokoll 05 H lässt sich ein tiefgehendes Verständnis der schriftlichen Subtraktion im Sinne des PUFM erkennen.

Die Lehrkraft nennt zwar kaum Voraussetzungen, in ihrer Schilderung der den Schülern gegebenen Erklärung wird dennoch sehr deutlich, welch großen Wert sie auf eine verständnisorientierte Herangehensweise legt und dass sie dies auch gut nachvollziehbar zu schildern in der Lage ist. Ihre Erklärung folgt einem Aufbau und einer Argumentation, die es einem Schüler erlaubt, ein tiefer gehendes Verständnis des Algorithmus zu erwerben.
Während des Interviews fertigt sie zunächst eine Skizze an und beginnt dann anhand dieser zu erklären:

Abb. 38 :Handskizze der Lehrkraft 05 H

> *„ (...) da müsst ich eigentlich bei der 27 anfangen! Klar, das tut man ja auch beim schriftlichen Rechnen, dass man von unten hoch rechnet, dass ich die 27 habe, 5 und dann 2 extra, die häng` ich mal so ein bisschen zusammen, damit ich den Überblick habe, dann will ich auf 7 ergänzen, dann weiß ich, ich habe hier noch 3 und da noch, nee, auf 5 will ich ergänzen, 1,2,3,4,5, die würde ich dann irgendwie andersfarbig anmalen, da sind also 8 und ich hab` den nächsten Zehner vollgemacht. Also, hier ist wieder ein Zehner voll geworden. Und für den nächsten Zehner würd` ich sagen, muss ich dann eine 1 hinschreiben, weil es jetzt nicht mehr zwanzig sind, sondern 30. Und jetzt muss ich von der 30 noch zur 40, und weiß: Da muss einer noch dazu, dann sind's 40. Also, ein Zehner noch dazu."*

Die Lehrkraft zeichnet zunächst 4 Balken und 5 Kreise, die die 4 Zehner (Balken) und 5 Einer (5 Kreise) der Zahl 45 repräsentieren sollen. Dann zeichnet sie über einen Balken (vierten von oben) 7 Kreise (Einer) in einer anderen Farbe, mit dieser Farbe malt sie auch die beiden ersten Balken (Zehner) nach. Jetzt sind auf der Skizze die beiden Zahlen 45 und 27 in Form einer ikonischen Darstellung gleichzeitig zu sehen.

Von den andersfarbig notierten Einern wird bis zu den 5 Einern der 45 ergänzt („... da sind also 8...“). Auf der Skizze ist nun zu sehen, wie zehn Einer einen Zehner ergeben, es „liegen“ genau zehn Kreise über dem Zehnerbalken. Nun erklärt die Lehrkraft: *„Also hier ist wieder ein Zehner voll geworden. Und für den nächsten Zehner muss ich dann eine 1 hinschreiben, weil es jetzt nicht mehr zwanzig sind, sondern 30.“* Auf diese Weise findet die Lehrkraft eine anschauliche und logische Erklärung für eine Lösung des Algorithmus mit Hilfe des Auffüllverfahrens. Eine echte Herausforderung könnte es allerdings darstellen, diese Darstellung in Stellenschreibweise zu übertragen. Freilich hätten die Schüler bis zu diesem Punkt wenigstens die Einbettung des Verfahrens in die elementare Mathematik verstanden. Das Verständnis davon, wie der Übertrag entsteht, wird daher eher leicht fallen.

Ein weiteres Beispiel findet sich in Protokoll 15 H. Nachdem die Lehrkraft zentrale Voraussetzungen (1+1 Sätze und Stellenwertsystem) genannt hat, hebt sie zunächst hervor, wie wichtig es ist, dass Schüler verstehen, wie das Stellenwertsystem aufgebaut ist: durch „Bündelungsaktivität“. Dabei unterscheidet sie genau zwischen der ikonischen und abstrakten Darstellung und lässt die Kinder die ikonische Darstellung auch mit Hilfe von Plättchen oder Steckwürfeln handelnd begreifen.
Den Kern ihrer Ausführungen bildet schließlich diese Erklärung:

> *„Die 7, also stell Dir vor, diese 7 Plättchen sind Bonbons, die Du aufessen möchtest. Du hast aber nur 5. Das geht ja dann nicht. Also, ich kann ja 5 von oben wegnehmen, aber 7 nicht. Und in diesem Augenblick müsste ich aus dem Stellenwert der Zehner einen Zehner rüberschieben zu den Einzelnen oben. Das darf ich ja aber nicht, also, ich muss ihn ja durch 10 repräsentieren. Dann habe ich in dem Feld oben 15 einzelne Plättchen liegen, und dann kann ich 7 davon abziehen.*
> *So wird den Kindern einsichtig, dass es darum geht, die Bündeleinheiten aufzubrechen.*
> *Und dann eben Schritt für Schritt weiter. Nur im zweiten Schritt bei dieser Aufgabe ist es dann nicht nötig, ich habe ja nur zwei Zehner gehabt und einen habe ich ja entbündelt rüber zu der fünf geschoben, bleibt also nur noch ein Zehner an der Stelle übrig.“*

Die Lehrkraft schildert gut nachvollziehbar, wie ein Zehner entbündelt wird, um ihn in der Einerspalte verwenden zu können. Durch die so ausgeführte Entbündelung ist der

Subtraktionsprozess[12] in der Einerspalte möglich. In der Zehnerspalte „bleibt ... nur noch ein Zehner übrig“, nachdem einer „rübergeschoben“ wurde (von den vier Zehnern in der ersten Zeile zu den Einern) und noch zwei abgezogen worden sind (die 2 Zehner der unteren von den verbleibenden 3 Zehnern der ersten Zeile).

Erklärungen dieser Kategorie finden sich in 17 Protokollen (vgl. 05 H, 10 H, 11 H, 13 H, 14 H, 15 H, 26 H, 27 H, 29 H, 01 S, 06 S, 07 S, 08 S, 11 S, 12 S, 15 S, 16 S)

Kategorie 2

Lehrkräfte, deren Erklärungsansätze der Verfasser dieser Stufe zuordnet, sind grundsätzlich auch bemüht, den Algorithmus verständnisorientiert zu vermitteln. Doch nennen sie entweder keine oder unzureichende Grundlagen (s.o. Kategorie 1) oder lassen in ihren Formulierungen Lücken erkennen. Alle Lehrkräfte, die verschiedene Erklärungsansätze miteinander vermischt haben (s. Abschnitt 6.2.1.), sind hierzu zu zählen, ebenso jene, die Schwierigkeiten haben, den Übertrag zu erklären, z.B.

- ... ich weiß, das ist nicht logisch, aber ich mache das einfach so ...
- ... damit ich das rechnen kann, muss ich mir die 15 denken, und dafür muss ich da einen Zehner *wegnehmen*...
- ... ich klau' mir hier einen Zehner ...

Erklärungen dieser Kategorie finden sich in 28 Protokollen (vgl. 04 H, 06 H, 12 H, 16 H, 18 H, 23 H, 24 H, 25 H, 28 H, 30 H, 31 H, 32 H, 33 H, 34 H, 37 H, 39 H, 40 H, 03 S, 04 S, 05 S, 10 S, 17 S, 18 S, 19 S, 21 S, 22 S)

Kategorie 3

Ein Teil der Lehrkräfte beschränkt sich in seinen Erklärungen auf den verfahrensorientierten Bestandteil des Algorithmus. Diese Erklärungen sind geprägt durch Merksätze, konkrete Handlungsanweisungen oder Hinweise darauf, dass der Algorithmus nur als Rechentechnik gesehen und vermittelt wird, z.B.

- ... Sprich: "Von 7 bis 5 geht nicht, also rechne ich von 7 bis 15, das sind 8"...

[12] die Lehrkraft unterrichtet das Ergänzungsverfahren nur bei Schülern, die aus ihrer Sicht eine „1-1 – Blockade“ haben

- … aber das würde ich niemals erklären, das ist für mich einfach nur ein Verfahren, das gelernt werden muss …
- ... das müssen die einfach auswendig lernen ...
- ... die müssen das einfach tun, einfach anwenden können ...

Denkbar wäre, verfahrensorientierte Erklärungen so gut zu strukturieren, dass aufgrund dieser sehr klaren Vorgaben, vielleicht in Verbindung mit anschaulichen Erklärungen im Schulbuch, ein tiefgehendes Verständnis auf Seiten der Schüler gewonnen werden könnte. Derlei Aussagen sind jedoch nicht im Rahmen dieser Untersuchung zu finden. Einige überdurchschnittliche Testergebnisse der Schüler von Lehrern, die im Interview eher verfahrensorientierte Erklärungen gaben, ließen sich allerdings vielleicht so erklären.

In zehn Protokollen findet sich eine korrekte, verfahrensorientierte Erklärung gemäß der Kategorie 3. Ein Beispiel hierfür liefert ein Auszug aus Protokoll 20 S:

> *„Ich muss ja über die Zehn hinaus, und da muss ich nachher die Zehn unten wieder notieren, weil ich hier elf denke, nicht eins denke, oder? Und dann hab ich dann bei den Zehnern einen mehr.*
> *Und ich hab` dann wirklich mit Auswendiglernen ... 9 und wie viel sind 11? ... 9 und 2 sind 11 ... schreibe 2, behalte 1. Also, dass dieser Schritt, von unten nach oben rechnen: „Wie viel sind 11? 2! Schreibe 2, behalte 1! Die 1 hinübergenommen und dann 1 und 7 gleich 8, und wie viel sind 9 minus 1 – schreibe 1 – haut hin, oder?“ (aus Protokoll 20 S)*

Die Lehrkraft erklärt nicht die Funktionsweise des Algorithmus selbst, sondern gibt den Schülern mit Hilfe eines auswendig zu lernenden Merksatzes ein Werkzeug an die Hand, mit dessen Hilfe sich die schriftliche Subtraktion immer ausführen lässt.

Erklärungen dieser Kategorie finden sich in den Protokollen 02 H, 19 H, 20 H, 21 H, 22 H, 35 H, 41 H, 09 S, 13 S und 20 S.

Kategorie 4

Dieser Stufe werden Erklärungen zugeordnet, die nur auf das Verfahren bezogen sind und Formulierungen oder Verfahrensbeschreibungen enthalten, die mathematisch nicht korrekt sind, z.B.

- ... ich zaubere mir hier oben eine zehn dazu ...
- ... wir leihen uns einen von den Zehnern und geben ihn später wieder zurück ...
- ... alles, was ich mir borge, muss ich später wieder zurückgeben ...

In Protokoll 01 H findet sich eine Erklärung, die typischerweise der Stufe „verfahrensorientiert fehlerhaft" zugeordnet werden kann. Die Lehrkraft würde die Kinder zunächst einmal „versuchen lassen", die Aufgabenstellung selbst zu lösen. Anschließend zeigt sie jedoch keine möglichen Alternativen, wie die Kinder die Aufgabe lösen könnten – was ja wünschenswert wäre, da mit fehlerhaften Lösungswegen der Schüler gerechnet werden muss und im Umkehrschluss natürlich alle möglichen richtigen Wege bekannt sein müssen, um einen falschen zu erkennen. Die Lehrkraft hat zwar schon von unterschiedlichen Verfahren gehört, kann diese aber nicht richtig beschreiben (*„einmal „Ergänzen" und wie heißt die andere, „Bündeln" oder?"*).
Im Anschluss stellt sie das Ergänzungsverfahren verfahrensorientiert dar:

> *„Ja, dann muss man natürlich sagen, sieben bis fünf geht nicht, also müssen wir über den Zehner rüber und dann bis zur Fünfzehn ergänzen..."*

Auf die Nachfrage, wie denn die 15 entstünde, erklärt sie:

> *„Ja, eben mit der Begründung, weil man von sieben bis fünf nicht ergänzen kann, also muss man in den nächsten Zehner, sozusagen, gehen. Sich einen borgen, oder wie sagt man?"*

Die Problematik des Begriffes „Borgen" wird später noch ausführlich dargestellt (s. Kap 7.2.3), in diesem Fall ist jedoch sehr deutlich, dass die Lehrkraft mit „Borgen" nicht das Eintauschverfahren meint, sondern dies als anschauliche Hilfe sieht. Die Schüler müssen annehmen, dass man sich zur Lösung des Problems also irgendwie einen Zehner in der linken Spalte "ausleiht", der dann in der unteren Zeile bei den Zehnern notiert wird.
Die Schüler lernen im Rahmen dieser Erklärung also zwei Dinge: ein Verfahren anzuwenden, um eine schriftliche Subtraktion zu lösen, und die Tatsache, dass man sich in der Zehnerspalte einen Zehner ausleihen darf. Letzteres ist aus mathematischer Sicht bezogen auf das Verfahren der schriftlichen Subtraktion jedoch falsch.

Erklärungen dieser Kategorie finden sich in 7 Protokollen (vgl. 01 H, 03 H, 08 H, 09 H, 36 H, 38 H, 02 S)

Sonderfälle

Ein sehr kleiner Teil der Interviews hat in einigen Teilbereichen leider sehr wenig Aussagekraft. Dies kann damit zusammenhängen, dass sich die betreffende Lehrkraft keine Zeit und Ruhe genommen hat, um die Fragen zu beantworten, oder auch einfach unmotiviert war und das Interview daher nicht als Herausforderung, sondern eher als Belastung gesehen hat. Auch diese Interviews werden von mir im Folgenden gesondert dargestellt:

Aufgrund der Kürze der Antwort ist die Frage 1 in Protokoll 17 H nicht bewertbar. Zwar war genügend Zeit vorhanden, die Lehrkraft jedoch nicht gewillt, ausführlicher zu antworten. Die Entstehung des Übertrags bleibt hier daher ungeklärt.

Die Lehrkraft, deren Antwort in Protokoll 07 H zu lesen ist, bestand darauf, dass ihre Antwort notiert und nicht mit dem Tonband mitgeschnitten wird. Die Lehrkraft macht zwar Andeutungen ("... beim Übertrag einen Zehner einlösen ..."), die schriftlich ausformulierten Ausführungen sind jedoch nicht ergiebig genug, um sie einer bestimmten Stufe mit Sicherheit zuordnen zu können.

Eine Lehrkraft aus Zürich (Protokoll 14 S) wagt gar nicht erst den Versuch einer Erklärung. Als Lehrkraft, die bislang nur von Klasse 1 bis 3 unterrichtet hat, hat sie noch keine Erfahrung im Umgang mit dem Algorithmus der schriftlichen Subtraktion gemacht. Sie nennt zwar einige Voraussetzungen (die ihrer Unterrichts-Klassenstufe entsprechen), die notwendig sind, wagt eine Erklärung des Algorithmus jedoch nicht.

Fasst man die Anzahl der den verschiedenen Kategorien zugeordneten Antworten in einem Säulendiagramm zusammen, erhält man folgende Übersicht (Abb. 39):

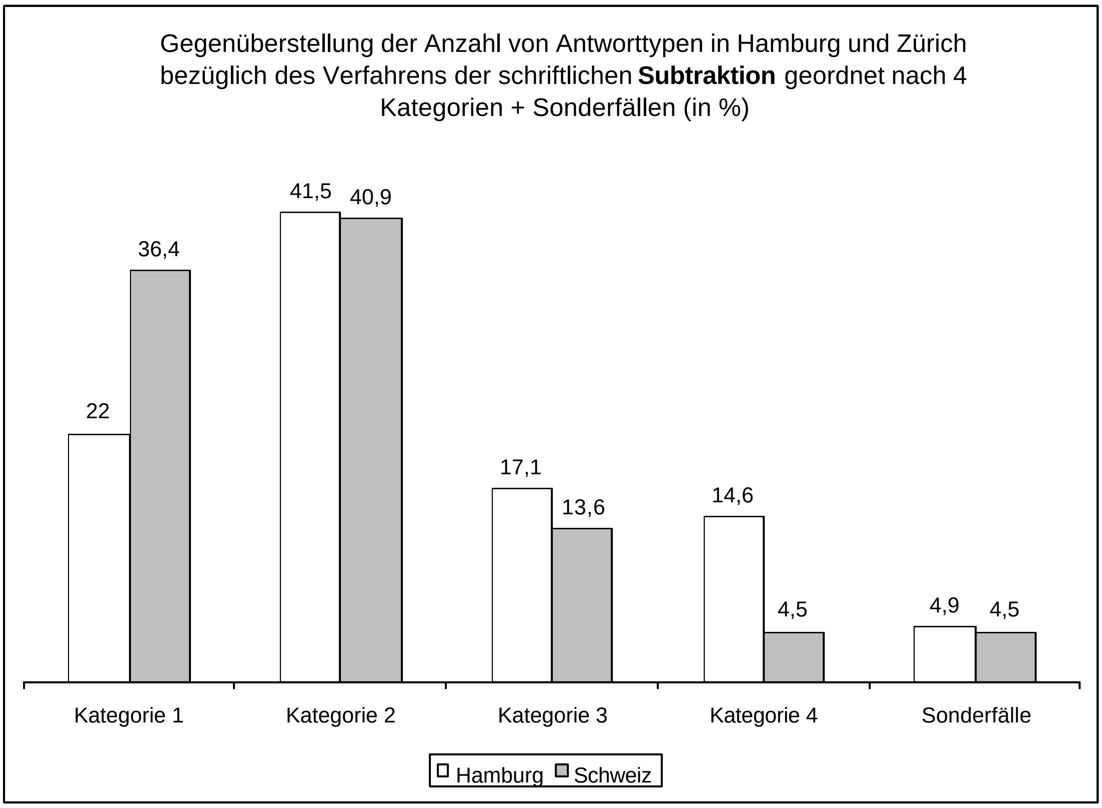


Abb. 39: Gegenüberstellung der Anzahl von Antworttypen in Hamburg und Zürich bezüglich des Verfahrens der schriftlichen Subtraktion geordnet nach 4 Kategorien + Sonderfällen (in %)

Während die Anzahl der Antworten zu Kategorie 2 und 3 keine bedeutsamen Unterschiede erkennen lässt, ist deutlich zu sehen, dass ein weitaus größerer Teil der Züricher Lehrkräfte in der Lage ist, das Verfahren der schriftlichen Subtraktion verständnisorientiert zu erklären (Kategorie 1). Ein gegenüber den Hamburger Lehrkräften viel kleinerer Teil der Züricher Lehrkräfte ist der Kategorie 4 (verfahrensorientierte, mathematisch nicht korrekte Erklärungen) zuzuordnen

Im Folgenden soll nun der Frage nachgegangen werden, ob sich diese Tendenz in der Gegenüberstellung der Antworten Züricher und Hamburger Lehrkräfte zur schriftlichen Multiplikation bestätigt.

6.1.2 Das Verständnis der schriftlichen *Multiplikation* bei den in Hamburg und Zürich interviewten Lehrkräften - eine Gegenüberstellung nach einer vorherigen Zuordnung der Antworten zu verschiedenen Kategorien

Neben den in Kapitel 5 dargestellten Wissensbausteinen ist vor allem ein algebraischer Zahlaspekt von herausragender Bedeutung für das Verständnis der schriftlichen Multiplikation, das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$$

Jede Zahl lässt sich als Summe der aus ihr bestehenden Dezimalzahlen darstellen, z.B.

$$495 = 400 + 90 + 5$$

Mit Hilfe dieser Erkenntnis, die auf einem Verständnis des Stellenwertsystems basiert (vgl. auch Kapitel 5.3), lässt sich die Multiplikation zweier Zahlen mit Hilfe des Distributivgesetzes recht gut veranschaulichen:

$$\begin{aligned} 368 \cdot 43 &= (300 + 60 + 8) \cdot (40 + 3) \\ &= 300 \cdot 40 + 300 \cdot 3 + 60 \cdot 40 + 60 \cdot 3 + 8 \cdot 40 + 8 \cdot 3 \\ &= 12000 + 900 + 2400 + 180 + 320 + 24 \\ &= 15824 \end{aligned}$$

Der Multiplikation mit mehrstelligen Faktoren geht meistens die sogenannte halbschriftliche Multiplikation mit einem mehrstelligen und einem einstelligen Faktor voraus.

Um den in Szenario 2 (vgl. Kap. 6.4) dargestellten Fehler auszumerzen, indem an das Verständnis der Schüler appelliert wird, müsste bei diesen neben einem tiefgehenden Verständnis des Stellenwertsystems auch ein Verständnis vom Distributivgesetzes erzeugt werden.
Ebenso wie schon bei einer Kategorisierung der Antworten im Rahmen der Auswertungen zur schriftlichen Subtraktion (s. Kap. 6.1.1) wurden auch die Antworten der Lehrkräfte bezüglich der schriftlichen Multiplikation den vier bereits bekannten Kategorien nach bestimmten Kriterien zugeordnet. Diese werden wiederum im Folgenden mit den entsprechenden Antworten dargestellt und interpretiert.

Kategorie 1

Diese Lehrkräfte lassen in ihren Antworten erkennen, wie sie den Algorithmus der schriftlichen Multiplikation mit bereits durchgenommenen mathematischen Inhalten verbinden und so verschiedene „knowledge packages“ (vgl. Kap. 3.4) zu einem sinnvollen Wissensnetzwerk verknüpfen. Wichtigstes Merkmal ist, dass sie nicht nur den Fehler identifizieren und den Schülern vor Augen führen würden, sondern erklären können, *warum* der gewählte Algorithmus nicht richtig ist. Ihre Erklärungen weisen daher Bemerkungen auf wie z.B.

- ... mit Hilfe der halbschriftlichen Multiplikation würde ich den Schülern nochmals zeigen, dass es sich um verschieden große Zahlen handelt, die sie multiplizieren ...
- ... die Schüler haben nicht erkannt, dass sie Stellen mit verschiedenen Wertigkeiten multiplizieren und deshalb auch die Ergebnisse unterschiedlich groß sein müssen ...
- ... mit Hilfe einfacher Beispiele kann ich den Schülern noch einmal die Funktionsweise des Distributivgesetzes erklären ...
- ... die Schüler haben noch nicht verstanden, um welchen Wert sich eine Zahl verändert, wenn man sie mit 10, 100 u.s.w. multipliziert ...
- ... die Schüler haben nicht erkannt, dass man hier nicht einfach nur die Ziffern, sondern verschiedene Stellen*werte* miteinander multipliziert ...

Wichtig ist, dass die Lehrkräfte erkennen lassen, dass sie nicht nur das Verfahren wiederholen, sondern beim Erwähnen der falschen Stellenschreibweise auch tatsächlich den Wert der Stellen erfassen.

Ein Beispiel für verständnisorientierte Darstellungen findet sich in Protokoll 14 H:

> *Ich würde damit beginnen, die Grundlagen aus dem vierten Schuljahr wieder aufzuarbeiten. Dies würde ich mit dem „Malkreuz“ (Algorithmus, den das „Zahlenbuch“ vorschlägt) starten.*
> *Beispiel: 32 x 11*

x	30	2
10	300	20
1	30	2

Das ist ja genau das, was in der Multiplikation gemacht wird.
Zurück zu der Frage:
Den Kindern muss erklärt werden, dass die Leerstellen entstehen, weil ja z.B. mit 100 multipliziert wird. Und das Stellenwertsystem muss aufgearbeitet werden. Die Bedeutung der Stellen muss klar sein.
Eine andere Möglichkeit wäre also, die Schritte nochmals schriftlich aufzulisten → halbschriftliche Multiplikation. Dabei würde ich die entsprechenden „Stellennullen" farblich kennzeichnen.

Erklärungen, die dieser Kategorie zuzuordnen sind, finden sich in 13 Protokollen (02 H, 04 H, 05 H, 14 H, 15 H, 16 H, 17 H, 18 H, 23 H, 24 H, 29 H, 32 H, 36 H). Die abschließende Gegenüberstellung vorwegnehmend sei hier schon einmal erwähnt, dass erstaunlicherweise kein Schweizer Interview in diese Kategorie fällt.

Kategorie 2

Lehrkräfte dieser Kategorie versuchen, den Schülern ihre Fehler verständlich zu machen, lassen aber entscheidende Hinweise (z.B. auf den Wert einer Zahl) weg. Typische Formulierungen sind

- ... ich würde die schriftliche Multiplikation einfach noch einmal ganz von vorn beginnen ...
- ... ich würde ihnen sagen, dass sie an dieser Stelle ja mit sechs*hundert* multiplizieren und dementsprechend hier hinten noch zwei Nullen drankommen ...
- ... die Schüler sollten die halbschriftliche Multiplikation noch einmal wiederholen, damit sie sehen, dass die Zahlen hier unterschiedlich lang sind ...
- ... Ich multipliziere zuerst mit der 600, ..., dann hab' ich halt die Nullen, die hier fehlen, also die schreibt man dann halt noch hier mit dazu ...

Beispiel:

„Wenn es hier dann heißt 123 x 6, dann wird halt 3 x 6 gerechnet und wir schreiben dann die erste Zahl direkt unter die Hunderterstelle. Ich würde es vielleicht auch farblich noch einmal markieren, H, Z, E darüber schreiben... Ja, so würde ich da wahrscheinlich herangehen. So dass den Schülern erst mal wieder die Stellenwerte klar sind. Vielleicht würde ich noch die Nullen

dazusetzen. Im vierten Schuljahr machen wir es ja anfangs noch so, die werden dann hinterher auch weggelassen."

Erklärungen dieser Kategorie finden sich in insgesamt 16 Protokollen (03 H, 06 H, 10 H, 11 H, 13 H, 19 H, 25 H, 30 H, 33 H, 37 H, 39 H, 40 H, 03 S, 08 S, 18 S, 20 S)

Kategorie 3

Diese Lehrkräfte gehen an das Problem mit Hilfe von Merksätzen oder verschiedenen Techniken heran, z.B.

- ... Beginne immer unter der Zahl zu schreiben, mit der du rechnest ...
- ... Die Schüler haben vergessen, die Zahlen richtig untereinander zu schreiben ...
- ... Die Schüler sollten die Nullen mitschreiben, damit die Zahlen richtig eingerückt werden ...
- ... wir multiplizieren erst die Hunderterzahl, dann die Zehnerzahl, ..., schreiben dann die erste Zahl direkt unter die Hunderterstelle ...
- ... die Schüler sollen zuerst die beiden Nullen hinschreiben und dann mit der 6 multiplizieren ...
- ... und dann kommt hier automatisch eine Null hin ...

Ein Beispiel:

" Ich würde bei der Wiederholung ganz genau darauf achten, dass die Schüler die Zahlen ganz korrekt in das richtige Kästchen schreiben, z.B. wenn die 6 mit der 3 multipliziert wird, dass die 8 von der 18 genau unter der 6 steht (bezieht sich auf das vorgegebene Beispiel) und von da aus die Zahlen dann weiter nach links verschoben werden.
Dann multipliziere ich die Zehner und achte auch dabei darauf, dass in der richtigen Spalte angefangen wird und die nächste Zahl von da ab auch weiter links daneben steht."[13]

Folgende 24 Protokolle enthalten Erklärungen zur schriftlichen Multiplikation, die dieser Kategorie zuzuordnen sind: 07 H, 09 H, 20 H, 21 H, 22 H, 26 H, 27 H, 28 H, 31 H, 34 H, 35 H, 38 H, 01 S, 02 S, 05 S, 06 S, 09 S, 10 S, 11 S, 12 S, 15 S, 16 S, 17 S, 22 S

[13] Protokoll 21 H

Kategorie 4

Einige Lehrkräfte verwenden "Tricks", um die Schüler dazu zu bringen, richtig untereinander zu schreiben. Diese "Hilfen" haben jedoch keinen mathematischen Ursprung, sondern eher mechanische Eigenschaften:

- ... Unter die Zahlen, mit denen die Schüler gerade nicht rechnen, lasse ich sie einen Punkt (oder Äpfelchen, Bätzchen ...) malen, damit sie die Zahlen richtig einrücken ...
- ... die Schüler sollen sich vorstellen, dass sie eine Treppe bauen ...

Beispiel:

> *" Ich hab das auch schon beobachtet. Es ist lustig, wir machen es gerade umgekehrt... Die schriftliche Multiplikation... Wir beginnen bei den Einern und... ich habe es immer so eingeführt, dass die Kinder irgendetwas machen müssen anstelle von diesen Häuschen auslassen. Also, dass sie dort auch noch etwas schreiben. Eine Null oder einen Punkt. Ich würde es umgekehrt rechnen, also diese Zahl würde bei mir hier oben stehen. Und dann würde ich also den Zehner ausrechnen, dann kann ich quasi... Ich fülle einfach diese Löcher hier hinten. Ich kann auch sagen, 3 mal 4 gibt ja eigentlich... oder eine 0 setzen, oder? Und ich würde eine 0 setzen -. in meiner letzten Klasse habe ich es mit Nullen unterrichtet, wo ich diese Löcher fülle, und auch so begründet, dass es eben nicht 12 sind, sondern eben hier 120 sind. Weil ich 3 mal 40 rechne."*

5 Antworten entsprechen dieser Kategorie: 01 H, 07 S, 08 H, 13 S, 14 S

Sonderfälle

Wie auch schon bei der Zuordnung der Antworten zur schriftlichen Subtraktion sind einige Aussagen der Lehrkräfte zu diesem Szenario aus unterschiedlichen Gründen nicht bewertbar. Diese werden im Folgenden kurz skizziert:

Während des Interviews 12 H schellte es zur nächsten Stunde und die Lehrkraft konnte die Frage nicht mehr in Ruhe beantworten. Die Antwort fällt entsprechend hektisch und knapp aus.

In Protokoll 41 H antwortet die Lehrkraft an der Fragestellung vorbei und bezieht sich vor allem auf die Methodik wie Gruppenarbeit u.a., ohne sich auf inhaltliche Aspekte zu konzentrieren.

Das Gespräch in Protokoll 04 S ist zu unsauber aufgenommen, dadurch sind zu viele Passagen unhörbar.

Die Lehrkraft in Protokoll 19 S gibt an, nicht "eingelesen" zu sein und diese Problematik auch noch nie im Unterricht erlebt zu haben. Daher möchte sie die Frage nicht beantworten.

Die Lehrkraft in 21 S hat diese Thematik noch nicht unterrichtet und kann dazu nichts weiter sagen.

Fasst man die Anzahl der verschiedenen Kategorien zugeordneten Antworten, wie auch schon bei der Gegenüberstellung der Antworten zur schriftlichen Subtraktion geschehen, in einem Säulendiagramm zusammen, erhält man folgende Übersicht (Abb. 40):

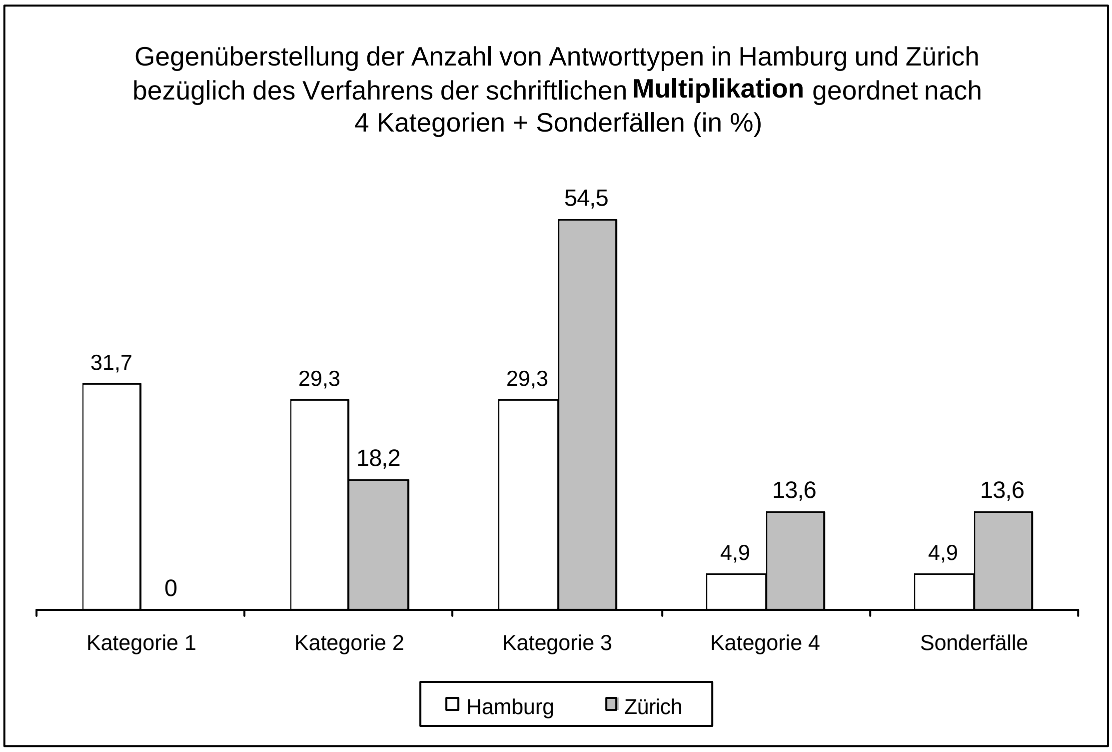


Abb. 40: Gegenüberstellung der Anzahl von Antworttypen in Hamburg und Zürich bezüglich des Verfahrens der schriftlichen Multiplikation geordnet nach 4 Kategorien + Sonderfällen (in %)

Die Gegenüberstellung der Anteile Hamburger und Züricher Antworten an den verschiedenen Kategorien lässt sofort die Massierung der Züricher in der Kategorie „verfahrensorientiert“ erkennen, wohingegen der Kategorie „verständnisorientiert korrekt“ nicht eine einzige Antwort zuzuordnen war.

6.1.3 Zusammenfassung und Interpretation der Gegenüberstellungen - Überprüfung der Hypothese 1

Die in Hypothese 1 formulierte Annahme, es gäbe Grundschullehrkräfte, die über ein tiefgehendes mathematisches Verständnis (PUFM) verfügen, zeigt sich in den beiden Diagrammen der Kap. 6.1.1 und 6.1.2 zur Gegenüberstellung der Anzahl der Antworten in den definierten Kategorien bestätigt.
In einer bemerkenswerten Deutlichkeit tritt jedoch auch die Richtigkeit der Nebenannahme der Hypothese 1 zu Tage: Es ist die Minderheit der Grundschullehrkräfte, die zu verständnisorientierten Erklärungen in der Lage ist. Fallen bei den Erklärungen zur schriftlichen Subtraktion nur 22% der Hamburger und 36,4% der Züricher Antworten in die Kategorie „verständnisorientiert korrekt“, sind es bei den Erklärungen zur schriftlichen Multiplikation immerhin 31,7% der Hamburger, jedoch keine der Züricher.

Richtet man den Fokus auf jene Lehrkräfte, deren Antworten zu beiden Szenarien der Kategorie 1 zuzuordnen sind, fällt das Ergebnis erstaunlich aus: Nur 9,3% (4 von 43 Hamburger Lehrkräften, Protokolle 05 H, 14 H, 15 H, 29 H) und keine der Züricher Antworten in Bezug auf *beide* Szenarien fallen in die Kategorie 1, die den Lehrkräften zugeordnet ist, die auf einer erkennbaren Grundlage eines PUFM antworten.
Etwas abgemildert wird dieses Ergebnis, geht man von der Annahme aus, dass wesentliche Grundlagen, die zu einem tiefgehenden Verständnis elementarer Mathematik nötig sind (Aufbau des Zahlensystems, Stellenwerte, Zahlvorstellungen u.s.w.), schon in Bezug auf Szenario 1 geschildert wurden. D.h. mit Hilfe dieses Grundlagenwissens und einer korrekten verfahrensorientierten Darstellung der schriftlichen Multiplikation, ohne bei dieser erneut auf vernetzte Bestandteile einzugehen, könnte man doch eine Art des korrekten, verständnisorientierten Wissens vermuten - auch wenn dieses in Szenario 2 nicht mehr explizit geäußert wird.
Eine Zusammenstellung der Antworten, die in Bezug auf Szenario 1 der Kategorie 1 und in Bezug auf Szenario 2 der Kategorie 3 zuzuordnen sind, ergibt in einer Gegenüberstellung Hamburger und Züricher Lehrkraftantworten wiederum eine bemerkenswerte Perspektive: Nur 4,5% der Hamburger (Protokolle 26 H, 27 H) und immerhin

27,3% der Züricher Antworten (Protokolle 01 S, 06 S, 11 S, 12 S, 15 S, 16 S) erfüllen diese Merkmale.
Addiert man zu den 4,5% der Hamburger Antworten dieser Merkmalsgebung die zuvor beschriebenen „rein verständnisorientierten" 9,3%, kommt man auf einen Anteil von 13,8% Hamburger und 27,3% Züricher Lehrkräfte, die theoretisch in der Lage sind, die Algorithmen der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation verständnisorientiert zu unterrichten.
Leider reicht der vorliegende Datensatz nicht aus, um hier signifikante Zusammenhänge herzustellen. Eine nachfolgende Untersuchung größerer, überregionaler Reichweite und deutlich größerer Stichprobe wäre wünschenswert, um die in diesem kleinen Rahmen nur zu vermutenden Tendenzen nachzuweisen.

Nachdem die Hypothese 1 auf diese Weise recht eindrucksvoll bestätigt worden ist, deutet sich an, dass auch die Annahme, das mathematische Fachwissen der Lehrkräfte in Hamburg und Zürich unterscheide sich in irgendeiner Form voneinander (Hypothese 2), ihre Bestätigung findet. Wenigstens qualitativ wurden in den vorangegangenen Interpretationen schon teilweise bemerkenswerte Unterschiede aufgezeigt. Bei der Analyse der Lehrkraftantworten mit Hilfe der bereits geschilderten Kriterien fielen jedoch noch einige weitere Besonderheiten auf. Dazu zählen:

- das „Vermischen" von verschiedenen Erklärungsansätzen der schriftlichen Subtraktion,
- die Verwendung des Begriffs „Borgen" und den damit zusammenhängenden Erklärungsschwierigkeiten bei der schriftlichen Subtraktion,
- die Nennung von Voraussetzungen zum Lösen der schriftlichen Subtraktionsaufgaben (Verständnis des Stellenwertsystems, Umfang des Basiswissens im Allgemeinen) und
- die Integration der konkret-operationalen und ikonischen Darstellung in die Erklärung für die Schüler.

Es sind dies wiederkehrende Auffälligkeiten in den Antworten von Lehrkräften, die zu einer tieferen Einsicht in das Verständnis der beiden Algorithmen der interviewten Lehrkräfte beitragen und daher im Folgenden detailliert geschildert werden.

6.2 Besondere Beobachtungen zu den Antworten der Lehrkräfte

Hypothese 2 formuliert die Annahme, dass sich das Wissen der Züricher Lehrkräfte anders darstellt als das der Hamburger. Dass dies eine begründete Annahme ist, ergibt sich allein schon aus der Tatsache, dass die Ausbildung der Züricher Lehrkräfte anders strukturiert ist. Wie jedoch lässt sich diese „Andersartigkeit" beschreiben? Ist das Wissen der Züricher Lehrkräfte, so wie in Hypothese 3 formuliert, tatsächlich grundsätzlich verständnisorientierter als das ihrer Hamburger Kollegen?
Die Frage nach dem Unbekannten ließ ein Muster von Analysekriterien, wie noch bei der Untersuchung in Hinblick auf Hypothese 1, nicht zu. Zwar bestand die Vermutung, dass sich das Wissen hinsichtlich qualitativer Merkmale unterscheide, doch wie diese aussehen würden, war offen.
Die Antworten wurden daher mit Hilfe einer ebenso offenen Fragestellung untersucht: Gibt es wiederkehrende Auffälligkeiten in den Antworten der Lehrkräfte im Raum Zürich und Hamburg, die, neben der im Vorangegangenen beschriebenen Analyse erhaltenen Quantität der verschiedenen Kategoriezuordnungen, auf eine besondere Qualität in bestimmten Bereichen schließen lassen?
Bevor in Kapitel 6.2.10 resümiert werden soll, ob und wenn ja in welchem Umfang sich auf der Grundlage der in Kapitel 6.1 beschriebenen Ergebnisse Hypothese 2 und 3 bestätigen lassen, soll in den folgenden Abschnitten auf die besonderen Auffälligkeiten eingegangen werden, mit deren Hilfe sich besondere Qualitäten des Wissens der Lehrkräfte noch differenzierter darstellen lassen.

6.2.1 „Vermischung" von Erklärungsansätzen zur schriftlichen Subtraktion

Die Anwendung bzw. Erklärung einer der von mir in Kapitel 4.4 dargestellten Algorithmen zur schriftlichen Subtraktion schließt bestimmte Details der anderen Erklärungsansätze für gewöhnlich aus.
Erklärt man z.B. den Algorithmus mit Hilfe des „gleichsinnigen Ergänzens", so wird das „Eintauschen" einer Einheit in eine nächsthöhere oder niedrigere Wertebene nicht nötig sein. Auf der anderen Seite entstünde beim Eintauschen kein „Übertrag" in der unteren Zeile – der wesentliche Prozess, der das Abziehen innerhalb der Einerstellen möglich macht, ist ja bereits in der oberen Zeile beendet. Ein Notieren des Übertrags in der unteren Zeile macht daher eigentlich keinen Sinn mehr.
Dieser von mir „Vermischung von Erklärungsansätzen" genannte Antworttyp findet sich bei einem großen Teil der in Hamburg befragten Lehrkräfte, z.B.:

*„Wir haben immer z.B. gesagt: „Von 7 bis 5 geht nicht – sie wissen, man muss immer zum Nächsthöheren kommen. Man darf nicht zurückgehen, man muss weitergehen. Von 7 bis 5 geht nicht, und dann haben wir gesagt, von 7 bis Fünf**zehn** sind es 8, hingeschrieben, geborgt, zurückgegeben. Alles, was ich mir borge, muss ich wieder zurückgeben. Den hab ich mir geborgt, dann geb ich ihn zurück, kreise es ein, zähle es zusammen, von drei bis vier.“ (aus Protokoll 08 H)*

Die relativ erfahrene Lehrkraft (Alter: 53 Jahre) scheint den Algorithmus zunächst mit dem Auffüllverfahren erklären zu wollen. Es wird jedoch schnell deutlich, dass sie zunächst in einer nächsthöher gelegenen Wertebene eintauschen ("borgen") möchte, dies jedoch wieder relativiert, indem sie den "geborgten" Zehner dem Subtrahenden wieder zufügt – was hier dem Verfahren mit Hilfe des gleichsinnigen Ergänzens gleichkommen würde. Bemerkenswerter Weise arbeitet die Lehrkraft mit Hilfe des "Zahlenbuchs", welches wiederum eine Vermittlung des Algorithmus mit Hilfe der Auffülltechnik vorsieht. Von hier stammt eventuell der Hinweis, man dürfe „*nicht zurückgehen*“, sondern müsse weitergehen.
Nach Einschätzung des Verfassers vermengt die Lehrkraft in ihrer eigenen Schulzeit erworbenes Faktenwissen („Borge-Verfahren“) mit der Technik, die sie im Laufe ihrer beruflichen Arbeit verschiedenen Mathematik-Lehrerhandbüchern entnommen hat.

In einem ähnlichen Fall schildert die Lehrkraft das Eintauschverfahren, notiert die Aufgabe jedoch so, als würde sie gleichsinnig ergänzen:

„(...) Dass man also vorwärts geht, bis zur 11, dass ich also 2 Schritte brauche. Dann habe ich die 2 da unten. Weil ich aber bis 11 gegangen bin, muss ich mir diesen Zehner, also habe ich mir diesen Zehner genommen, um überhaupt bis zur 11 gehen zu können. Das ist genau dasselbe, als wenn ich mir diesen Groschen eingetauscht hätte. (...)

Aber, wenn Sie den einen Zehner eintauschen, wären hier doch dann 11?

Ja, das ist richtig.

Oder legen Sie die 10 E neben den einen E?

Ja, genau.

Und dann haben Sie hier ja aber nur noch acht...

Nein, dann habe ich hier unten eine 1, und wenn ich jetzt schräg gucke, ist das die 11.“ (aus Protokoll 04 H)

Die Lehrkraft erklärt sehr logisch und konsequent, wie sie ein Ergänzen in der Einerspalte möglich macht – durch das Eintauschen eines Zehners und Hinzufügen dieser 10 Einer in die Einerspalte. Notiert wird dies jedoch wie bei der Ausführung des gleichsinnigen Ergänzens. Aus den 9 Zehnern werden bei der Notation eben nicht 8, sondern die 9 bleibt. Stattdessen wird in der unteren Zeile ein Zehner eingefügt.
Die Verfahren mit Hilfe des gleichsinnigen Ergänzens oder des Eintauschens werden häufiger miteinander vermischt. Auf die Frage, woher denn die „1“ komme, sind sich viele Lehrkräfte unsicher. Und so wird erklärt, dass sie „irgendwo aus der Zahl selbst kommen müsse“:

> *„Und wenn die untere Zahl halt größer ist, dann muss man da einen Zehner dazunehmen. So, denke ich, habe ich das erklärt.*
> Sie legen den Zehner dazu? Woher nehmen Sie den Zehner?
> *Der kommt ja von hier (zeigt auf die zwei)*
> Aha, unten von der zwei...
> *Äh, nein, der kommt äh der kommt von denen hier natürlich, von den 4 Zehnern. Na klar. Da kommt er ja auch dazu* (meint die Zeile, in der die 4 und die 5 stehen).
> *Den haben wir da einfach so weggenommen.“ (Protokoll 06 H)*

Einige Lehrkräfte können sich den Algorithmus selbst gar nicht erklären. Innerhalb dieser meistens fehlerhaften verständnisorientierten oder verfahrensorientierten Erklärungen kommt es auch zu Vermischungen, die dann jedoch nicht weiter erklärt werden können:

> *„Von 7 bis 5 kann ich nicht ergänzen, äh, bis wohin kann ich denn überhaupt ergänzen. Welche Zahl ist die nächste nach der 5, zu der ich von der 7 ausgehend ergänzen kann?*
> *Wo kriege ich jetzt diese 1 von der 15 her, wo ist sie verborgen, wo steckt sie drin? Und dann muss ich mir also überlegen können, dass ich mir von diesen 40 Zehnern einen Zehner entnehme, mit dem ich dann arbeite.*
> *Und den muss ich mir markieren. Und da hatte ich also Differenzen mit den Kindern, als ich das eingeführt habe, dass einige Eltern, ein Koreaner zum Beispiel, der schrieb dann diesen Übertrag da oben hin (...)*
> *Und das ist im Grunde genommen das zentrale Problem, nicht, also, dass man ihnen sagt, also ich mache es jedenfalls so, dass ich ihnen sage: wir geben ihn da unten hin. Das, was wir oben weggenommen haben – und das ist unlogisch eigentlich - das tun wir unten dazu.“ (aus Protokoll 16 H)*

In einem anderen Fall werden von einer Lehrkraft die Begrifflichkeiten verschiedener Algorithmen miteinander vermischt. Obwohl sie faktisch einen Algorithmus mit Hilfe des gleichsinnigen Ergänzens schildert, wird dies in ihren Ausführungen nicht unbedingt anhand der Bezeichnungen der verschiedenen Rechenschritte deutlich:

> *„(...) von sieben bis fünf – das geht nicht, also muss man dann von sieben bis 15 rechnen, d.h. einen von den Zehnern, die man hier hat, da oben quasi erweitern, dazurechnen, sonst könnte man ja nicht fünfzehn rechnen. Und dann lässt sich das ausrechnen: Von sieben bis fünfzehn geht, sind acht, schreiben wir hierhin; da sie aber jetzt ja sich quasi einen Zehner hier geborgt haben, müssen sie den da mit hinschreiben und dann zusätzlich subtrahieren. (...) Nein, also Borgen in dem Sinne, dass man sich etwas ausleiht, um diese Rechnung leichter ausrechnen zu können. Von daher, man nimmt ja etwas erst einmal, Borgen... Wenn man sich etwas borgt, muss man das aber auch hier unten notieren." (aus Protokoll 36 H)*

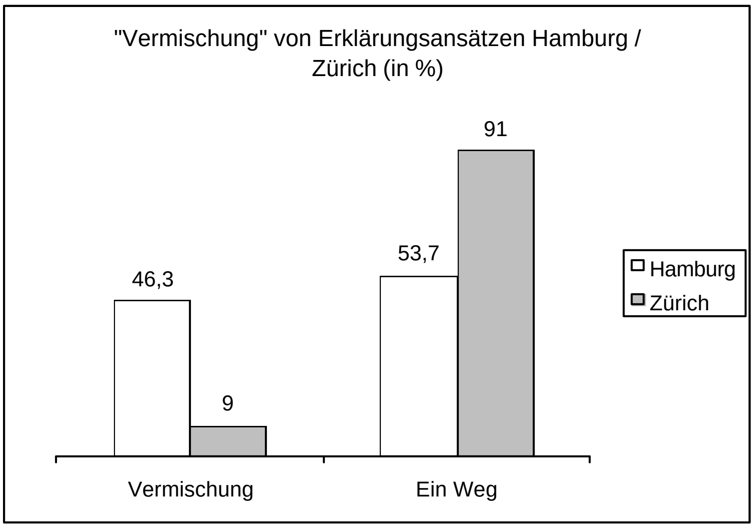


Abb. 41: Vermischen von Erklärungsansätzen

19 von 41 Lehrern in Hamburg, also 46,3%, vermischen verschiedene Erklärungsansätze wie in den oben geschilderten Beispielen.[14]
Am häufigsten hierbei ist ein Zusammenbringen des Eintauschens eines Zehners und des gleichsinnigen Ergänzens. Sehr häufig wird der in der unteren Zeile eingefügte Zehner („Merk-1") mit Hilfe des Eintauschens erklärt, hierbei wird auch sehr häufig der Begriff des "Borgens" verwendet (vgl. dazu auch Kap. 6.2.3).

Die Schweizer Lehrkräfte führen weniger Inhalte verschiedener Erklärungsansätze zusammen. Nur zwei[15] der insgesamt 22 Befragten (~ 9%) betrifft diese Problematik.

Beide erkennen jedoch die Widersprüche in ihren Darstellungen und erklären unabhängig voneinander, dass es zwar mathematisch „nicht ganz logisch“, aber machbar sei:

> *„Ja, wir ergänzen bei der Subtraktion, d.h. 7 + wie viel ist 15? Wir sagen 5 Einer minus 7 Einer, das geht nicht. Ich muss von den vier Zehnern einen Zehner zerlegen in 10 Einer, hinüber schreiben und dann heißt die Rechnung 15 minus 7. Und diese „Behalte 1“ muss ich mir merken, weil ich hier oben jetzt nicht mehr 4 Zehner hab, sondern nur noch 3. Mit diesem „Behalte 1“ kann ich mir das ergeben. Es ist mathematisch nicht logisch, das gebe ich zu, aber es ist machbar so.“ (aus Protokoll 18 S)*

Die Lehrkraft schildert zunächst, wie sie einen Zehner eintauscht, um die Differenz in der Einerspalte ausrechnen zu können. Dieses Eintauschen wird von ihr anschließend jedoch nicht formal-abstrakt notiert. Stattdessen wird der Eintauschvorgang mit Hilfe einer „Behalte-1“ in der unteren Zeile notiert – was nicht mehr der ursprünglichen Ausführung entspricht. In ihrem eigenen Verständnis schildert die Lehrkraft jedoch, wie die formal-abstrakte Notation eigentlich aussehen sollte:

> *„Mathematisch logisch wäre es, wenn das Kind rechnen würde: 5+7, merkt: Oh, stimmt nicht! Ich nehme von den 4 Zehnern einen rüber, und schreibe hier 3 Zehner hin. Hier hab ich 15 minus 7 ist 8, und jetzt hab ich 3 minus 2 ist 1.“ (aus Protokoll 18 S)*

Diese Erklärung gegenüber den Schülern wäre nach Einschätzung des Verfassers absolut schlüssig und korrekt. Die Lehrkraft scheint sich mit dieser Erklärung jedoch nicht ganz wohl zu fühlen und verfällt daher in ein ihr vielleicht von früher noch besser bekanntes Notationsschema.

Die zweite Lehrkraft scheint mit den Erklärungen ihres Lehrerhandbuchs zur schriftlichen Subtraktion nicht zurechtzukommen. Sie erklärt den Kindern zunächst das Eintauschverfahren:

> *„Sie hatten 7 Einer, sie wollten 15 Einer haben, und das ging nur, wenn sie einen Zehner von da getauscht haben.“*

[14] Protokoll 01 H, 03 H, 04 H, 06 H, 08 H, 09 H, 12 H, 15 H, 16 H, 18 H, 19 H, 24 H, 25 H, 28 H, 33 H, 36 H, 37 H, 38 H, 40 H
[15] Protokoll 18 S, 19 S

Auf die Frage, wieso denn eine 1 unten notiert würde, obwohl doch oben nur noch drei Zehner seien, antwortet sie, dass das „vielleicht nicht ganz logisch" sei, es aber „genauso im Buch eingeführt" würde (Protokoll 19 S).
Die Lehrkraft unterrichtet mit dem Zahlenbuch (Wittmann et al. 1996), in dem nun allerdings wiederum das Auffüllverfahren gelehrt und erklärt wird – keine der von der Lehrkraft geschilderten Erklärungen passt in diesen Algorithmus.

6.2.2 Anteile verschiedener Erklärungsverfahren Zürich/Hamburg

Die besondere Beobachtung in Hinblick auf die „Vermischung" verschiedener Erklärungsansätze zieht die Frage nach sich, welchen Anteil jede Erklärungsvariante in den beiden Lehrkraftgruppen hat. Ist die „Vermischung" vielleicht zurückzuführen auf die Vielfalt verschiedener Erklärungsvarianten, auf die Hamburger Lehrkräfte dank der freien Lehrmittelwahl zurückgreifen können?
In Kapitel 5.4 wurde bereits dargestellt, welche möglichen Erklärungen zum Vermitteln eines Verständnisses des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion zur Verfügung stehen. Im Folgenden soll dargestellt werden, zu welchen Anteilen Lehrkräfte der beiden verschiedenen Regionen unterschiedliche Erklärungsansätze schildern.
Wie schon in Abbildung 41 zu sehen, „vermischen" 9% der Züricher und 46,3% der Hamburger Lehrkräfte verschiedene Erklärungsansätze miteinander. Differenziert man diese Vermischung, so ergibt sich folgendes Bild (Abb. 42):

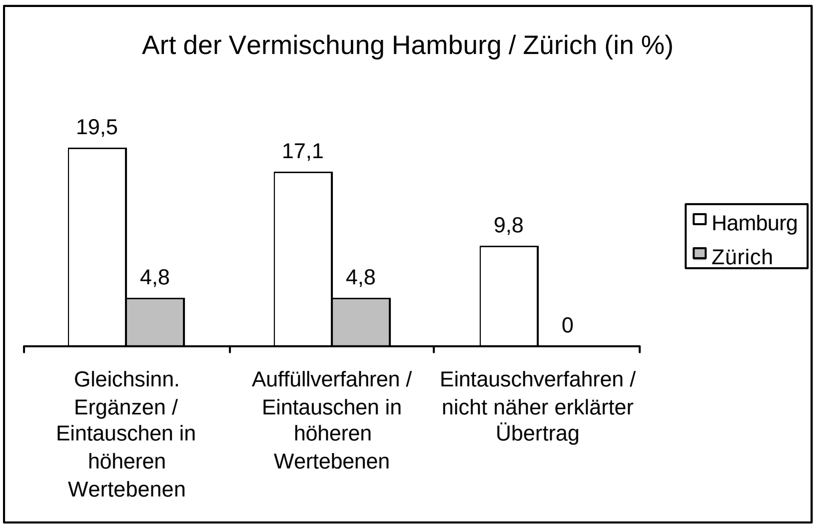


Abb. 42: Anteile unterschiedlicher Formen der Vermischung von Erklärungsansätzen zur schriftlichen Subtraktion

Ein großer Teil der Hamburger Lehrkräfte gibt an, den Kindern zu erklären, wie man an das Problem herangehen könne, indem man „bei den Zehnern einen eintauscht". Die-

ses entspräche dem vom Verfasser so genannten „Eintauschverfahren“. Diese Herangehensweise machte aber eine Notierung der „Übertrags-1“ in der unteren Zeile nicht nötig. Dennoch wird diese unten notiert – vermutlich, weil das dann entstehende Erscheinungsbild zu dem im Schulbuch passt, während die eigene Erklärung der Herangehensweise nicht dem Lehrer-Begleitband des Schulbuches entspricht.
Nicht immer wird deutlich, wie der in der unteren Zeile notierte Übertrag zustande kommt. Häufig beginnt eine Erklärung mit der Schilderung des Eintauschverfahrens. Nur wird dennoch ein „Übertrag“ in der unteren Zeile notiert (obwohl es ja eigentlich gar keinen gibt). In einigen Fällen wird dies einfach so hingenommen, als „gegeben“ akzeptiert:

> *„Äh, nein, der kommt äh der kommt von denen hier natürlich, von den 4 Zehnern. Na klar. Da kommt er ja auch dazu (*meint die Zeile, in der die 4 und die 5 stehen, d. Verf.*).*
> *Den haben wir da einfach so weggenommen. (...)*
> *Ja. Das mache ich im Kopf. Ich rechne von 7 bis 15 und schreibe dann den einen einfach nur hier unten hin.“ (aus Protokoll 06 H)*

Theoretisch könnte der Übertrag in der unteren Zeile in diesem Fall sowohl durch das „Auffüllverfahren“ als auch durch „gleichsinniges Ergänzen“ entstehen. In der Darstellung des Verfassers sind diese nicht eindeutig zuzuordnenden Fälle in der Spalte „Eintauschverfahren/nicht näher erklärter Übertrag“ aufgeführt.

Einige der Lehrkräfte schildern, dass man den Zehner, den man sich in der oberen Zeile „genommen“ habe, ja auch unten wieder „zurücklegen“ müsse – damit die Differenz gleich bleibt:

> *„Wir klauen uns einen Zehner. Und weil wir uns den geklaut haben, müssen wir den dann auch noch mal wieder dazugeben. In der nächsten Spalte.*
> *(...)*
> *Wir haben uns hier einen geklaut, also müssen wir den Zehner, den müssen wir ja irgendwo wiedergeben. Wir können den ja nicht einfach klauen, wir müssen den ja wiedergeben. Und dann schreiben wir nicht die Zehn hin, lassen wir einfach die Null weg, und schreiben nur die kleine 1 hin.“ (aus Protokoll 38 H)*

Die geschilderten Erklärungsansätze lassen sich in folgender Übersicht darstellen:

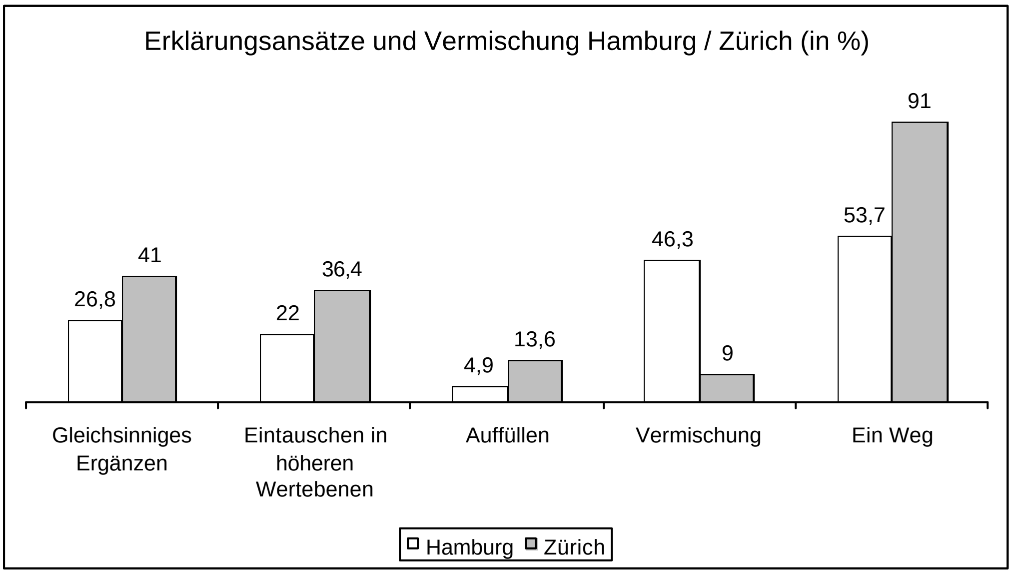


Abb. 43: Anteile verschiedener Erklärungsansätze und „Vermischung" Hamburg/Zürich im Vergleich

Die Abbildungen lassen erkennen, dass die Züricher Lehrkräfte ähnlich variantenreich erklären wie ihre Hamburger Kollegen. Die Problematik des „Vermischens" scheint also nicht, wie man zunächst vermuten würde, in der Verfügbarkeit einer Vielzahl verschiedener Erklärungsmöglichkeiten begründet zu sein.

6.2.3 Das „Borge" - Verfahren: Problematik des Begriffs und Kollision einer weit verbreiteten Verfahrensvorstellung mit den zu vermittelnden Algorithmen

Ein großer Teil der Hamburger Lehrkräfte[16] nannte die Technik des „Borgens" als Grundlage für ihre Erklärungen, z.B.

> *„Von 7 bis 5 geht nicht, und dann haben wir gesagt, von 7 bis Fünf**zehn** sind es 8 hingeschrieben, geborgt, zurückgegeben. Alles, was ich mir borge, muss ich wieder zurückgeben. Den hab` ich mir geborgt, dann geb` ich ihn zurück, kreise es ein, zähle es zusammen, von drei bis vier.*
>
> Da passiert eine ganze Menge mit der Eins, die sie da dazugeben. Wenn ein Schüler nachfragt, wie sie das erklären würden, wie würden Sie das machen?

Also: Von 5 bis 2 geht nicht – aber von 5 bis 12. Jetzt borg` ich mir hier einen Zehner: den nehm` ich hier weg, und den borg` ich mir!“ (aus Protokoll 08 H)

Die Vorstellung, sich zunächst vom Minuenden einen Zehner zu „borgen“, also „auszuleihen“, um ihn dann später wieder „zurückzugeben“, ist mathematisch unkorrekt. Die Versuchung, sich dieser Formulierung zu bedienen, liegt jedoch auf der Hand. Als umgangssprachlich präsenter Begriff kann er selbst bei intellektuell einfach strukturierten Schülern eine Vorstellung erzeugen, wie die „1“ des Übertrages zustande kommt. Das Borgen wäre in diesem Zusammenhang dann quasi eine Hilfe zur Vermittlung einer verfahrensorientierten Denkweise - die später jedoch keine eigenständigen Rückschlüsse auf die Funktionsweise des Verfahrens mehr zulässt: Ist die Vorstellung, man „liehe“ sich eine Ziffer aus einer Zahl aus, erst einmal gefestigt, lässt sich hierzu kein tiefergehendes Verständnis mehr entwickeln, da es hierzu keine grundlegende mathematische Regel gibt.

Es erscheint allerdings bemerkenswert, dass keine der Züricher Lehrkräfte den Begriff des Borgens benutzt - gegenüber immerhin 8 Lehrkräften (18,6%) aus Hamburg. Warum so viele Hamburger Lehrkräfte den Begriff des „Borgens“ in ihre Erklärung integrieren, lässt sich nur vermuten: Zum einen scheint dieses Verfahren einem Großteil der Lehrkräfte in ihrer eigenen Schulzeit auch vermittelt worden zu sein, zum anderen verwenden auch noch heute die meisten gängigen Mathematikdidaktik-Lehrbücher diese Bezeichnung. In den meisten dieser mathematikdidaktischen Schriften ist das „Borge-Verfahren“ denn auch korrekt als Eintauschverfahren erklärt und die Problematik der Begrifflichkeit dargelegt, doch liegt die Vermutung nahe, dass sich einige Lehrkräfte nicht hinreichend mit den Erklärungen befassen, sondern sich damit begnügen, in ihrer eigenen Schulzeit gelernte Methoden an die eigenen Schüler weiter zu geben.

6.2.4 Die Funktion des Begriffes „Stellenwerttabelle“ in den Erklärungen der Lehrkräfte

Nachdem in den Abschnitten 4.3, 4.4.3 sowie 4.5.2 die Bedeutung des „Wertes“ von Stellen sowohl grundsätzlich für ein Verständnis des Aufbaus unseres Zahlensystems als auch für die Algorithmen der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation herausgestellt wurde, erstaunt die Beobachtung, wie breit die Schilderungen der „Stellenwerttabelle“ als Grundlage für das Verständnis der Algorithmen in den Antworten der Lehrkräfte gefächert sind - vor allem zu Szenario 1, in dem die Fragestellung explizit auf benötigte Grundlagen hinweist (vgl. Kap. 5.4.1 Szenario 1 …„Was müssten die Kinder

[16] Protokoll 01 H, 03 H, 08 H, 09 H, 10 H, 19 H, 24 H, 36 H

Ihrer Meinung nach verstehen oder tun können …”). Sie reicht von einem völligen Fehlen der Schilderung dieser wichtigen Grundlage über eine verfahrensorientierte Nutzung bis hin zu einem Einsatz zu Gunsten eines echten Verständnisses. Es stellt sich daher die Frage, inwieweit diese Beobachtung etwas zu einer differenzierteren Darstellung der Qualität und Quantität verständnisorientierten Wissens beiträgt: bestätigt die breite Fächerung der Verteilung der Nennung des Stellenwertsystems als Voraussetzung die ebenso breite Streuung der Lehrkraftantworten auf die vier unterschiedlichen Kategorien „verständnisorientiert korrekt“ bis „verfahrensorientiert fehlerhaft“? Wird hier auch der Nachsatz der Hypothese 1, dass *nicht* die Mehrheit der Lehrkräfte in der Grundschule über ein verständnisorientiertes Wissen verfügt, bestätigt?

Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken sich die nachfolgenden Abschnitte zunächst auf eine Betrachtung der Antworten zu Szenario 1 (schriftliche Subtraktion), die dann auf das Szenario 2 (schriftliche Multiplikation) ausgeweitet wird und schließlich in einem zusammenfassenden Resümée endet.

Wie erwähnt, sind die in Kapitel 5 genannten Bestandteile des „Basiswissens“ unbedingt notwendig, um einen Algorithmus der schriftlichen Subtraktion wirklich zu *verstehen*. Davon ausgehend, dass eine Lehrkraft in einer Interviewsituation den einen oder anderen Bestandteil vielleicht als „zu selbstverständlich“ erachtet, um ihn zu erwähnen (z.B. „Zusammensetzung der Zahl 10“), oder aus Nervosität vergisst, sind das Bündeln zu und Entbündeln von höheren Wertebenen (z.B. 10E = 1Z) und ein entsprechendes Verständnis des Stellenwertsystems jedoch ein zentraler Bestandteil des Verständnisses eines Algorithmus.[17]

Im Bewusstsein dieser Tatsache, formuliert dies eine Lehrkraft folgendermaßen:

> *„Also es muss gesichert sein die Vorstellung E, Z, H. Denn man ergänzt ja nur im Bereich bis 20. Sie müssen E, Z, H kennen und davon eine Mengenvorstellung haben.*
> *Sie sollen Kopfrechnen beherrschen können im Bereich bis 1000 mit Zehner- und Hunderterübergang, damit die Zahlvorstellung gesichert ist. Erst wenn die Zahlvorstellung gesichert ist, sollte man mit der schriftlichen Subtraktion anfangen.*
> *Zahlvorstellung, sie müssen eine Vorstellung davon haben, was die Zahl 10 bedeutet, z.B. (...)“(aus Protokoll 10 H)*

[17] vgl. auch Kapitel 4.6. "Verständnisorientierter Unterricht" oder Radatz, H., Schipper, W. (1983).

Den *Begriff* des Stellenwertes oder Stellenwertsystems benutzt diese Lehrkraft nicht; im weiteren Verlauf ihrer Schilderungen wird jedoch deutlich, dass die Schüler verstanden haben sollen, wie eine nächsthöhere Wertebene entsteht:

> *„Dann sage ich ihnen, dass der eine Zehner oben in die Einerspalte - sind ja 10 E – geschrieben wird, dadurch steht da die Zahl 15, bei dem anderen kommt der andere Zehner in die Zehnerspalte – ist ja ein Zehner." (aus Protokoll 18 S)*

Die Wertigkeit jeder „Stelle", die durch Bündelung von je zehn Einheiten aus einer niedrigeren Wertebene entsteht und somit das „Stellenwertsystem" überhaupt erst zu einem „System" werden lässt – immer zehn einzelne Einheiten werden zu einer neuen Einheit gebündelt und in der links danebenstehenden Spalte notiert – wird von einer anderen Lehrkraft explizit betont:

> *„Die Schüler müssen die Stellenwerteinsicht haben, dass es ihnen also klar ist, dass es hier darum geht, im Stellenwert zu rechnen, den Übertrag auch im Stellenwert zu vermerken.*
> *(...)*
> *Dass ja der nächste Stellenwert durch die Bündelungsaktivität entsteht. Dass man das irgendwo vermerken muss und dass dieser Übertrag dann ja diese Merkzahl ist, die wir eigentlich als Bündeleinheit uns merken müssen."*

Die besondere Beobachtung der verschiedenen Verwendung des Begriffs „Stellenwerttabelle" bzw. die unterschiedliche Art und Weise der Einbeziehung der Stellenwerte in die Erklärung der Lehrkräfte zur schriftlichen Subtraktion führt zu einer systematischen Analyse der Antworten, die diese in vier Antworttypen teilt:

Antworttyp 1: Die Lehrkräfte benennen in ihren Erklärungen das Stellenwertsystem direkt oder indirekt als Voraussetzung zum Erlernen des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion, jedoch nur als "Schreibhilfe". Hinweise auf diese Nutzungsform könnten Formulierungen sein wie

a) ... die Schüler müssen richtig untereinander schreiben können ...
b) ... sie müssen die Einer-, Zehner- und Hunderterstellen kennen...
c) ... es geht bei den Einern los. Dass das ganze Stellenwertsystem eben klar ist...
d) ... sie müssen wissen, wie dieser Zahlenraum aufgebaut ist ...

e) ... dass sie also wissen, wo die Einer und die Zehner stehen ...
f) ... sie müssen das Stellenwertsystem kennen, also genau wissen, wo die Einer oder Zehner stehen ...

Antworttypen wie d) fallen für den Verfasser in diese Kategorie, wenn nicht näher begründet wird, *wie* das System aufgebaut ist.

Antworttyp 2: Die Lehrkräfte nennen das Stellenwertsystem und lassen anhand bestimmter Formulierungen erkennen, dass sie auch die Wertigkeit der Stellen ansprechen. Denkbar sind Formulierungen wie:

a) ... In unserem Stellenwertsystem entstehen die Stellen durch Eintauschen. Dies mache ich z.B. so: ...
b) ... bei der schriftlichen Subtraktion kommt es darauf an, im Stellenwertsystem zu rechnen. Und der jeweils nächste Stellenwert entsteht ja durch Bündelung.
c) ... Sie müssen das Stellenwertsystem recht gut können und wissen, dass zehn Einer ein Zehner sind, also die Bündelung verstanden haben ...

Antworttyp 3: Das Stellenwertsystem findet in den Erläuterungen zu den Voraussetzungen keine Erwähnung, spielt jedoch in den Erklärungen indirekt eine Rolle. Letztere kann verfahrensorientierter aber auch verständnisorientierter Art sein.

Antworttyp 4: Das Stellenwertsystem wird in den Erklärungen überhaupt nicht genannt und spielt auch indirekt keine Rolle.

Eine Analyse der Antworten auf der Grundlage dieser Kriterien ergibt folgendes Bild: 15 der 41 in Hamburg befragten Kollegen (36,6 %) nennen die Kenntnis des Stellenwertsystems als Grundlage vor Beginn der Vermittlung der schriftlichen Subtraktion.[18] Von diesen 15 zeigen 4 (9,8 %) in ihren Antworten ein tieferes Verständnis der Stellen*werte* [19]*,* d.h. mit dem Begriff des Stellenwertsystems verbinden diese Lehrkräfte auch das dazugehörige Verständnis (Antworttyp 2). Der weitaus größere Teil, die verbleibenden 11 Kollegen (26,8 %)[20], nennt zwar das Stellenwertsystem als benötigtes Basiswissen, doch geht es hierbei nicht, wie oben schon dargestellt wurde, um die Einsicht in die Wertigkeit von Stellen, sondern um die praktische Schreibweise (unter-

[18] Protokolle 01 H, 03 H, 04 H, 15 H, 16 H, 17 H, 18 H, 22 H, 24 H, 28 H, 32 H, 33 H, 34 H, 35 H, 37 H
[19] Protokolle 04 H, 15 H, 28 H, 32 H
[20] Protokolle 01 H, 03 H, 16 H, 17 H, 18 H, 22 H, 24 H, 33 H, 34 H, 35 H, 37 H

einander) oder um das Notieren der Ziffern in einer bestimmten und dem Algorithmus dienlichen Ordnung (Antworttyp 1):

> *„Das Wichtigste ist erst einmal das Stellenwertsystem, dass sie also wissen, wo die Einer und die Zehner stehen.“ (aus Protokoll 18 H)*

> *„Und fähig sein, diese Hunderter, Zehner, Einer genau untereinander schreiben zu können, also die Stellenwerttabelle einwandfrei beherrschen.“ (aus Protokoll 37 H)*

Bei einer genaueren Betrachtung der Antworten dieser 11 Lehrkräfte lässt sich noch ein differenzierteres Bild entwickeln, das dafür sensibilisieren soll, dass die Zusammenhänge zwischen Nennung des Stellenwertsystems einerseits und der sinnvollen Nutzung dieser Wissensgrundlage andererseits nicht immer linear sind.

Zwei[21] der 11 Lehrkräfte, die den Begriff des Stellenwertes in den Voraussetzungen zum Lösen und Verstehen der Aufgabenstellung nennen, diesen jedoch eher als prozedurales Hilfsmittel verstehen, beschreiben in ihrer Schilderung der Herangehensweise an die Vermittlung des Algorithmus ein Verfahren, das dennoch ein echtes Verständnis des Stellenwertsystems, also des Bündelns zu und des Entbündelns von einer höheren Wertebene, verlangt. Dies bedeutet, dass die Kinder eigentlich verstanden haben müssten, wie das Stellenwertsystem aufgebaut ist und funktioniert, um den Algorithmus zu verstehen. Doch wird nicht deutlich, dass ihnen diese Grundlage auch tatsächlich vermittelt wird.
Die eine der beiden Lehrkräfte schildert zwar tatsächlich eine korrekte Vorgehensweise des Entbündelns, wendet diese bei ihrer Erklärung zur Herangehensweise an das Problem jedoch gar nicht mehr an (stattdessen: Gleichsinniges Ergänzen) (vgl. Protokoll 33 H).
Die zweite wendet das Entbündeln auch direkt zur Erklärung ihrer Herangehensweise an und schildert eine durchschaubare Erklärung, die jedoch eher kompliziert ist und die beiden verschiedenen Erklärungsansätze vermischt:[22]

> *„Ja, den schreib ich dazu, da hab ich den Kindern erklärt: „Dadurch, dass wir uns diesen sozusagen in dieses hier verwandeln, den Zehner, nehmen wir den weg; indem wir ihn wegnehmen, müssen wir ihn aber praktisch dazu addieren wieder! (...) Ich hab so eine Tabelle gemacht, und habe gesagt: „Wir wandeln erst mal einen von den Zehnern um in zehn Einer und notieren*

[21] Protokoll 33 H, 37 H

> *uns das!“ (...) Wir haben das immer wieder neu gesagt: ‚Warum schreibst du hier eine Eins hin?’ ‚Ja, weil ich hier einen Zehner umwandle in zehn Einer, und das notieren wir uns hier, mit der Eins!’“ (aus Protokoll 37 H)*

Eine dritte der 11 Lehrkräfte nennt zwar neben dem Stellenwertsystem das Wissen um „Entbündeln“ als Voraussetzung, erklärt dieses Vorgehen jedoch nicht korrekt und verwendet es tatsächlich auch nicht bei ihrem Erklärungsansatz. Sie schildert das Entbündeln als Maßnahme, um von der vier eine 1 „rüber zu bekommen“:

> *„Also, das meinte ich vorhin mit “Entbündeln“. Das ist kein Entbündeln in Einer. Sondern ich nehme aus der Zehnerspalte einen Zehner rüber und drösel den hier sozusagen auf, damit ich hier nicht 5, sondern 15 stehen habe.“ (aus Protokoll 18 H)*

Alle 4 Lehrkräfte hingegen, die das Verständnis des Stellenwertes als wichtiges Vorwissen benannt und auch richtig geschildert haben, verwenden dieses Basiswissen auch zur verständlichen Erklärung ihres Algorithmus.[23]
Eine dieser Lehrkräfte gibt jedoch an, dieses zwar so erklären zu können, es aber mit der Klasse niemals „so zu machen“:

> *„Das mach ich nicht mit der Klasse, niemals! Das würd` ich nur mit Kindern machen, die überhaupt nicht klar kommen, die nicht weiter kommen, um die letzte Möglichkeit, das noch mal zu verstehen.*
> *Meistens mach` ich das einfach so: Sie addieren von dieser Zahl bis zur Fünfzehn, und dann schreiben wir den einen, den wir hier ja oben holen, den schreiben wir da unten mit hin.“ (aus Protokoll 28 H)*

26 Lehrkräfte (~ 63,4%) benennen das Stellenwertsystem in den Voraussetzungen überhaupt nicht.[24]
11 von ihnen (~ 26,8%) verwenden in ihren Erklärungen dennoch die Methodik des Bündelns und Entbündelns, welche ein Verständnis für das Stellenwertsystems eigentlich voraussetzt.[25]
Daraus folgt, dass für 15 Lehrkräfte (~ 36,6%) das Stellenwertsystem in keiner Weise eine Rolle spielt. Eine dieser Lehrkräfte erklärt zwar während des Gesprächs den Algo-

---

[22] vgl. oben: „Vermischung von Erklärungsansätzen“
[23] Protokoll 04 H, 15 H, 28 H, 32 H
[24] Protokoll 02 H, 05 H, 06 H, 07 H, 08 H, 09 H, 10 H, 11 H, 12 H, 13 H, 14 H, 19 H, 20 H, 21 H, 23 H, 25 H, 26 H, 27 H, 29 H, 30 H, 31 H, 36 H, 38 H, 39 H, 40 H, 41 H
[25] Protokoll 05 H, 07 H, 10 H, 11 H, 12 H, 13 H, 19 H, 26 H, 27 H, 29 H, 40 H

rithmus mit Hilfe des Entbündelns, betont jedoch, in der Klasse selbst nur den Prozess ohne verständnisorientierte Erklärungen zu erläutern:

> *„Dadurch entstand aber eine zu große Verwirrung, daher vermittle ich das jetzt eher traditionell mit der Ergänzungsmethode. Ein Beispiel:*
>
> $$\begin{array}{cccc} & 4 & 3 & 2 \\ - & 3 & 5 & 9 \\ & & & {\scriptstyle 1} \\ \hline \end{array}$$
>
> *9 bis 2 → geht nicht, also holen wir uns einen Zehner. Und damit das nicht in Vergessenheit gerät, schreiben wir ihn unten hin.“ (aus Protokoll 07 H)*

Ein Vergleich mit den Antworten der Züricher Lehrkräfte ergibt folgendes Bild:

10 der Züricher Lehrkräfte (~ 45,5%) nennen die Kenntnis des Stellenwertsystems als Voraussetzung und erklären dies auch verständlich (Antworttyp 2).[26] Zwar haben 3 dieser 10 Lehrkräfte (~13,6%) wiederum Schwierigkeiten, den Algorithmus mit Hilfe des (richtig beschriebenen) Stellenwertsystems zu erklären[27], jedoch liegt dies an der Erklärung des Algorithmus als solchem: im Sinne der – eher problematischen – Erklärung wird das Stellenwertsystem sinnvoll verwendet.

> *„(...) also wir müssen diesen Zehner irgendwie legen, und würd´ ihn dann da hinlegen. Aber ich würd´ vielleicht... Aber so auf die Schnelle kann ich das jetzt nicht sagen, (...)*
> *Das ist eigentlich ein Trick, dass es schneller geht, etwas. Aber eben ich hab ja Probleme, wie soll ich sagen, gehört nicht ganz zu meinem Alltag. Wie gesagt, muss ich jetzt da ein bisschen überlegen, wie ich das dann mache.“ (aus Protokoll 03 S)*

12 der Lehrkräfte (~ 54,5 %) benennen das Stellenwertsystem nicht in ihren Voraussetzungen[28], von diesen 12 setzen jedoch 5 (~22,7%) die Kenntnis von der Funktionsweise des Stellenwertes in ihren Erklärungen voraus (Antworttyp 3)[29]. Für die verbleibenden 7 Züricher Lehrkräfte (~31,8%) spielt das Stellenwertsystem demnach überhaupt keine Rolle (Antworttyp 4).

---

[26] Protokoll 01 S, 03 S, 05 S, 06 S, 08 S, 12 S, 14 S, 18 S, 19 S, 22 S
[27] Protokoll 03 S, 05 S, 14 S
[28] Protokoll 02 S, 04 S, 07 S, 09 S, 10 S, 11 S, 13 S, 15 S, 16 S, 17 S, 20 S, 21 S
[29] Protokoll 07 S, 15 S, 16 S, 17 S, 21 S

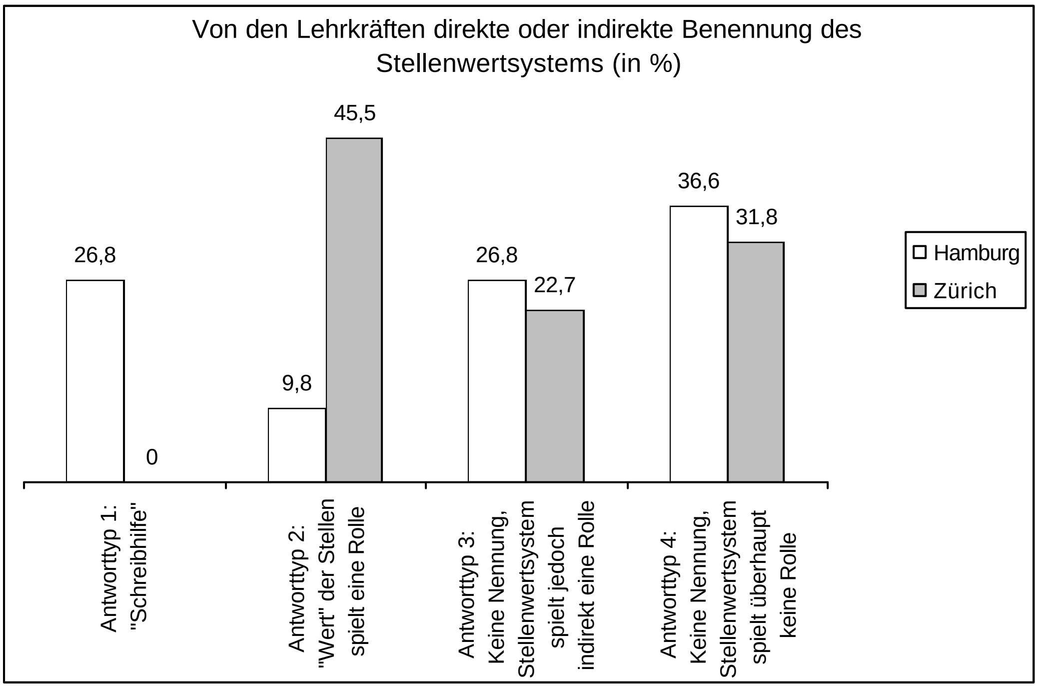


Abb. 44: Anzahl der Lehrkräfte, die das Stellenwertsystem direkt oder indirekt als Schülerwissen-Voraussetzung benennen

Vergleicht man die Antworten der Lehrkräfte in den beiden verschiedenen Regionen, so fällt auf, dass ein geringfügig größerer Teil der Schweizer Lehrkräfte das Stellenwertsystem als wichtige Voraussetzung genannt hat. Während in Hamburg jedoch nur 9,8% der Lehrkräfte (also nur 36% derjenigen, die das Stellenwertsystem benannt haben) ein tiefergehendes Verständnis der Stellenwerte gezeigt haben, sind dies in Zürich immerhin fast die Hälfte (45,5%, also 100% derjenigen, die das Stellenwertsystem als Voraussetzung benannt haben).

Wie schon einleitend erwähnt spielte auch in Szenario 2 (schriftliche Multiplikation) das Verständnis der Wertigkeit der Stellen eine erhebliche Rolle. So war in den Interviews - richtigerweise - sehr häufig zu hören: „Die Schüler haben offensichtlich die Stellenwerttabelle noch nicht verstanden.“ Allerdings wurde im Verlauf der folgenden Erklärungen oft ein eher verfahrensorientierter Inhalt mit dieser Antwort verbunden.
Ein Teil der Lehrkräfte sieht im „Verständnis“ der Tabelle nur die korrekte (verfahrensorientierte) Nutzung der verschiedenen Stellen und stellt fest, dass die in der Situation genannten Schüler nicht richtig „untereinander schreiben können“. Um den Fehler zu beheben, werden verschiedene Vorschläge unterbreitet. Zwei Ansätze jedoch treten in vermehrter Form auf:

1. Die Lehrkräfte geben an, sie würden die korrekte Schreibweise mit den Schülern noch einmal wiederholen und schildern, wie sie den Algorithmus im Allgemeinen einführen. Z.B.:

> *„Dann würd` ich die schriftliche Multiplikation noch mal wirklich von vorne durchnehmen, so wie ich sie in der vierten Klasse beibringe, würd` ich sagen: „So, jetzt machen wir noch mal einen Schnelldurchgang!'" (aus Protokoll 08 H)*

oder

> *„Ich würde ihnen deutlich machen, dass das (...), dass man ja einmal die Hunderter, dann die Zehner und dann die Einer ausrechnet.*
> *Ansonsten (...) also, ich überleg jetzt gerade, also wenn ich hier anfange hier 6 mal 123 dann würde ich erst mal klar sagen: wenn du anfängst, 123 mal 6 zu rechnen, musst du auch unter der 6 anfangen. Weil du die Hunderter ausrechnest: Du rechnest 123 mal 600. Und ... äh, genauso ist es mit den Zehnern. Da musst du auch unter der 4 anfangen." (aus Protokoll 20 H)*

2. Es werden verfahrensorientierte Hilfsmittel oder Erklärungen angeboten, um den Schülern ihren Fehler vor Augen zu führen. Z.B.:

... ich sage, ... grüne Nullen. Die haben die Funktion, dass die 2 nicht da ist sondern da. Also, wenn diese grüne 0 nicht da wäre, dann wären es zwei Einer. Und die schiebt quasi dort oben eben auf dieses Kästen da, das ist dann die grüne Null, dort die letzte, oder? Dort oben klebt die... Und dass die wissen, dass wenn ich 10 mal eine Zahl rechne, dann hat die hinten eine Null. Immer! Und wenn ich 20 mal eine Zahl rechne, dann hat die eine 0, und ich kann 2 mal rechnen." (aus Protokoll 06 H)

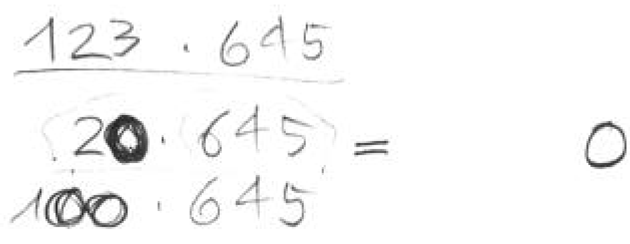


Abb. 45: Interviewbegleitende, handschriftliche Skizze der Lehrkraft 06 H

10 der Hamburger und 3 der Schweizer Lehrkräfte würden die korrekte Schreibweise einfach noch einmal mit den betreffenden Schülern wiederholen (Typ 1).[30]

[30] Protokoll 08 H, 09 H, 11H, 19 H, 20 H, 21 H, 26 H, 28 H, 34 H, 38 H, 04 S, 09 S, 16 S

6 Hamburger Lehrkräfte und 11 Schweizer nutzen verfahrensorientierte Hilfsmittel, um die Schüler zu einer korrekten Ausführung des Algorithmus zu führen (Typ 2)[31]

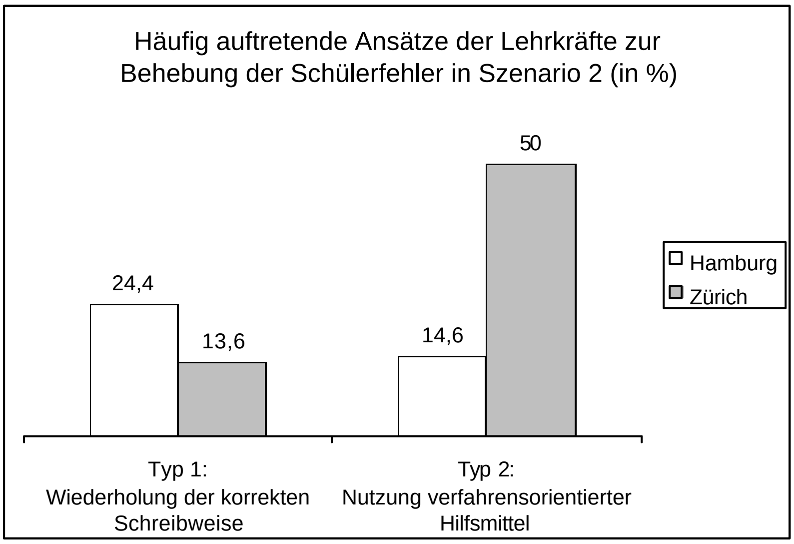


Abb. 46: Häufig auftretende Ansätze der Lehrkräfte zur Behebung der Schülerfehler in Szenario 2

Die angestellten Beobachtungen zur Funktion des Begriffs der „Stellenwerttabelle" und, wenn eng beieinander liegend, zur Funktion ähnlicher Begriffe (Stellenwertsystem, Tabelle mit E. Z, H u.s.w.) in den Antworten der Lehrkräfte lassen mehrere Schlüsse zu, die im Folgenden kurz resümiert werden.

Zunächst findet sich, wie auch schon in vorangegangenen Abschnitten, z.B. 6.1.1 und 6.1.2, die Hypothese 1, insbesondere deren Nachsatz, bestätigt. Geht man einmal davon aus, dass ein Verständnis des Stellenwertsystems eine wichtige, wenn nicht sogar *die* wichtigste Grundlage für ein tiefgehendes Verständnis elementarer Mathematik darstellt, erscheinen die diesbezüglichen Analyseergebnisse der Lehrkraftantworten eher ernüchternd. Nur 9,8% der Hamburger und immerhin 45,5% der Züricher Lehrkräfte benennen diese wichtige Grundlage zum Verständnis der schriftlichen Subtraktion und nutzen diese auch gleichzeitig im Rahmen einer verständnisorientierten Erklärung.

Bei den Antworten zur schriftlichen Multiplikation ist die Einsicht der Lehrkräfte, dass die Schüler „nicht richtig untereinander geschrieben haben" oder „das Stellenwertsystem noch nicht richtig verstanden haben, einhellig. Einige versuchen die Behebung des Fehlers auf verständnisorientiertem Wege anzugehen (s. Kap. 6.1.2), andere sehen die Stellenwerttabelle eher als verfahrensorientiertes Hilfs-

[31] Protokoll 01 H, 07 H, 10 H, 22 H, 25 H, 32 H, 05 S, 06 S, 07 S, 10 S, 11 S, 12 S, 13 S, 17 S, 18 S, 20 S, 22 S

mittel. Diejenigen zusammengenommen, die die richtige Schreibweise einfach noch einmal wiederholen (Typ1) und die Tabelle mit Hilfe verfahrensorientierter Hilfsmittel noch einmal erklären würden, ergeben 29% der Hamburger und 63,6% der Schweizer Lehrkräfte, die diese wichtige Verständnisgrundlage nur aus verfahrenstheoretischer Sicht aus betrachten und benutzen.

Auch Hypothese 2, in der angenommen wird, das Wissen der Züricher unterscheide sich auf eine bestimmte Art von dem der Hamburger, findet sich hier bestätigt. Auffallend ist hier vor allem der große Anteil der Züricher Lehrkräfte, der das Stellenwertsystem als Grundlage für die Erklärung des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion nennt und anschließend auch mit in die Erklärung aufnimmt (45,5%) gegenüber den (nur) 9,8% der Hamburger, die dies tun. Anders ausgedrückt: Nur jeder zehnte Hamburger Pädagoge ist sich der Bedeutung des Stellenwertsystems von vornherein bewusst, während dies in Zürich immerhin fast jeder zweite ist.
Eine ebenso deutliche Diskrepanz findet sich in den Erklärungen zur schriftlichen Multiplikation: Während immerhin jeder zweite der Züricher Kollegen (wenn auch nur verfahrensorientierte, doch immerhin) erneut Hilfestellungen zum Erlernen des Algorithmus gibt, tut dies in Hamburg nur ungefähr jeder siebte (14,6%).

Unabhängig, in welcher Region die Lehrkräfte unterrichten, fällt bei einer Analyse der Antworten auf, dass sich kaum eine Lehrkraft auf eventuelle Verständnisschwierigkeiten der betreffenden Schüler konzentriert. Der überwiegende Teil der Lehrkräfte schildert, wie der Algorithmus grundsätzlich funktionieren sollte. Einige leiten davon ab, dass die Schüler „da wohl noch etwas nicht verstanden haben“, und meinen damit in den meisten Fällen die korrekte, verfahrensorientierte Handhabung des Stellenwertsystems. Eine konkrete, mögliche Fehlerquelle wird nicht genannt. Die Lehrkräfte könnten z.B. vermuten, dass den Schülern wichtige Grundlagen fehlen, z.B. die Größenvorstellungen bei der Multiplikation mit großen Zahlen zu verinnerlichen. Ein Rückgriff auf eine gute Darstellung der Werte in den verschiedenen Spalten der Stellenwerttabelle wäre hier denkbar.
Auf miteinander vernetzte Inhalte der Primarmathematik geht jedoch keine Lehrkraft ein. Einige der Lehrkräfte appellieren zwar an das Größenverständnis (s. Abb. 43), dies jedoch fast immer in der Form einer Regel und nicht den Verständniskern betreffend.

Wie schon bei den Äußerungen zum ersten Szenario fällt auf, dass die Züricher Lehrkräfte homogener antworten als die Hamburger. So nähern sich 63,6% der Züricher

Lehrkräfte dem Problem, indem sie den Algorithmus noch einmal wiederholen oder „trainieren“, und verwenden dabei überwiegend verfahrensorientierte Hilfsmittel (z.B. Auffüllen der Stellen mit Null, Punkt oder Strich). Nur insgesamt 39% der Hamburger Lehrer antworten ähnlich, wobei 14,6% angeben, verfahrensorientierte Hilfsmittel zu benutzen.

Ein fast ebenso großer Teil der Hamburger Lehrkräfte, der angibt, die korrekte Schreibweise noch einmal zu wiederholen, nähert sich der Problematik mit Hilfe der halbschriftlichen Multiplikation oder appelliert an das Größenverständnis der Schüler. Demgegenüber nennt kein Züricher Lehrer die halbschriftliche Multiplikation als Lösungsweg, jedoch gehen 5 (22,7%) auf möglicherweise mangelnde Größenvorstellungen ein (vgl. Abb. 45).

Dass sich das mathematische Fachwissen der Züricher Lehrer von dem der Hamburger unterscheidet, lässt sich auch gut an weiteren Beobachtungen ausmachen. Diese werden in den folgenden Abschnitten näher beschrieben.

6.2.5 Schilderungen von Erklärungsansätzen auf konkret-operationaler oder ikonischer Ebene

Wer schon einmal versucht hat, einen Sachverhalt oder Prozess sinnvoll und verständnistief zu erklären, wird ohne eine Skizze, die mit Hilfe von Symbolen die wichtigsten Gedankengänge und Prozesse festhält, kaum ausgekommen sein. Auch für die konzeptuelle Darstellung einer Erklärung der schriftlichen Subtraktion ist die Einbeziehung der ikonischen Ebene hilfreich.
Ein noch tiefergehendes Verständnis kann durch das handelnde Ausführen des Verfahrens der schriftlichen Subtraktion erreicht werden. Schilderungen von Lehrkräften, die die konkret-operationale Ebene miteinbeziehen, lassen ebenso Vermutungen über ein gutes Erklärungspotenzial des Erklärenden zu wie diejenigen Ausführungen, bei denen die ikonische Ebene miteinbezogen wird.
Im Folgenden soll dargestellt werden, wie groß der Anteil der Lehrkräfte in Hamburg und Zürich ist, die den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion mit Hilfe ikonischer oder konkret-operationaler Darstellungen erläutern.
Als Beispiel für eine Integration soll folgender Auszug dienen:

> *„(...) Ich hab’s auch behandelnd eingeführt, (...) indem ich’s am Boden als (...) ein Gittersystem (...) ausgelegt habe, was bekannt sein muss, unbedingt, es wird aber auch dazwischen eingeführt, was Einer sind,*

was Zehner sind, (...) dass es klar ist, dass immer, wenn ich 10 Einer hab, eben ein neuer Zehner entsteht.
(...) Und wenn ich also merk: Aha, ich kann hier nicht 5 minus 7 rechnen, das geht gar nicht, da hab ich gar nicht genug, also hol ich mir bei den Zehnern ein Zehnerpaket hinüber, mache 10 Einer draus, dann sind es 15 Einer, und dann kann ich die 7 wegnehmen, (...)"(aus Protokoll 08 S)

Eine Analyse der vorliegenden Gesprächsprotokolle lässt erkennen, dass, prozentual gesehen, ein gegenüber den Hamburger Lehrkräften weitaus größerer Teil der Züricher Lehrkräfte zu erkennen gibt, ikonische oder konkret-operationale Inhalte in ihrer Erklärung zu verwenden. Meistens geschieht dies, wie auch bei den Hamburger Lehrkräften, auf der Basis einer vorangegangenen konkret-operationalen Phase, in der verschiedenste Materialien zum Einsatz kommen. Zu diesen zählen Geld, Plättchen und Hunderterfelder, „Bätzchen", Steckwürfel, Montessori-Farbenkarten oder die sogenannten „Systemblöcke".

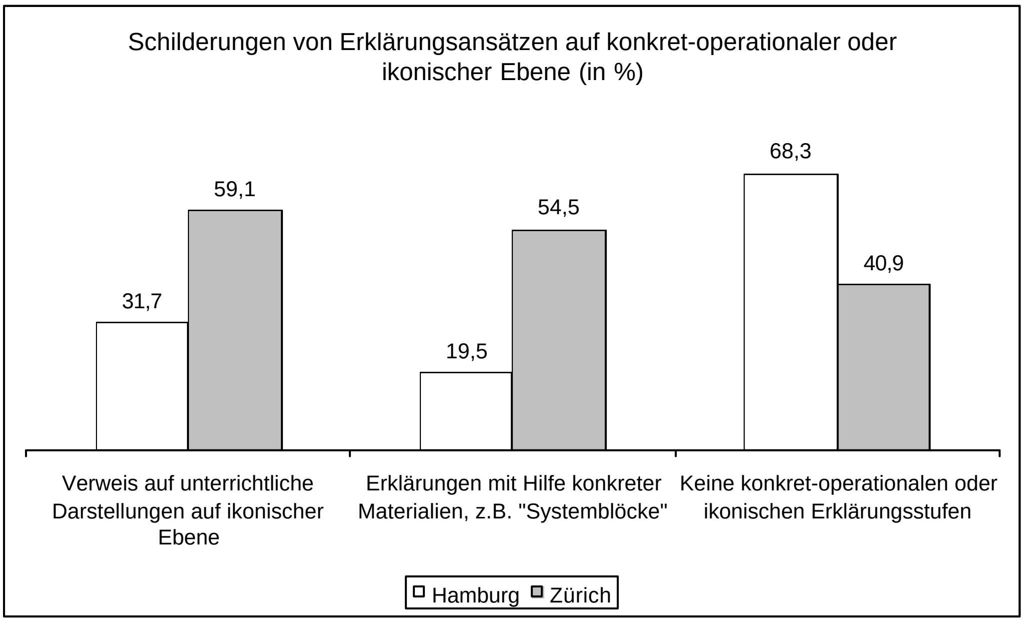


Abb. 47: Verhältnis Schilderung von Erklärungsansätzen auf konkret-operationaler oder ikonischer Ebene Hamburg/Zürich

Letztere sind vor allem in der Region Zürich weit verbreitet. 8 Lehrkräfte (~ 36%) schildern, wie sie damit im Unterricht arbeiten.[32] Vor allem im Bereich bis 100 und etwas darüber hinaus lässt sich der Aufbau des Stellenwertsystems "mit Hilfe konkreter Materialien leicht überschaubar machen" (Müller/Wittmann 1984, S. 192). Systemblöcke haben dabei den Vorteil, dass sie sich aufgrund ihrer geometrischen Struktur beson-

[32] Protokoll 03 S, 04 S, 05 S, 08 S, 12 S, 14 S, 19 S, 18 S

ders gut zur Darstellung des Zehnersystems eignen, da sich die geometrischen Formen und Körper ab einer gewissen Zahldarstellung generalisieren lassen (also keine Detailgestaltung mehr benötigen) und somit auch die Darstellung sehr hoher Zahlen und Stellenwerte ermöglichen.
Bemerkenswert ist, dass die Züricher Lehrkräfte diesbezüglich eine viel homogenere Gruppe bilden und fast einheitlich die Systemblöcke zur Erklärung ihrer Herangehensweisen nutzen. Ebenso ist bei fast allen Züricher Lehrkräften, die die ikonische Ebene integrieren, eine Vorwegnahme der konkret-operationalen Ebene erkennbar.
Demgegenüber setzen die Hamburger Lehrkräfte offenbar individuell unterschiedlichere Materialien ein und lassen nur in 8 von 13 Fällen eine Vorwegnahme der konkret-operationalen Phase erkennen.

Ein Resümee auch dieser Beobachtungen lässt die Verschiedenartigkeit des Wissens, in diesem Fall das Wissen um die verständnisorientierte Vermittlung mit Hilfe von Materialien, bei den Züricher und Hamburger Lehrkräfte erkennen und untermauert damit die Annahme in Hypothese 2. Denn während nur 31,7% der Hamburger Lehrkräfte sich der konkret-operationalen Möglichkeit der Verständnisvermittlung durch konkrete Handlungen oder ikonische Darstellungen bewusst sind, sind sich dies immerhin 59,1% der Züricher.

6.2.6 Erklärungsansätze zu Szenario 2: Halbschriftliche Multiplikation gegenüber dem Appell an Größenvorstellungen (Multiplikation mit 100)

Eine Beobachtung, die einen weiteren Hinweis auf die Bestätigung der Hypothese 2 liefert, ist die der Quantität von zwei unterschiedlichen Erklärungsansätzen zu Szenario 2 in beiden Lehrkraftgruppen.
10 der Hamburger Lehrkräfte würden die Schüler bitten, sich auf die halbschriftliche Multiplikation zu besinnen.[33] Auch im Rahmen dieser Antworten werden verfahrensorientierte Hilfen angeboten: Farbige Markierungen der Spalten, Mitschreiben der Null als Ergebnis der verfahrensorientiert durchgeführten halbschriftlichen Multiplikation:

> *„Das Problem ist wirklich, dass die Zahlen nicht richtig untereinander stehen. (...) Ja, oder vielleicht auch wieder klar machen – wieder Zahlen zerlegen: Ich multipliziere erst mit der 600, dann mit der 40, mit der 5, dann hab' ich halt die Nullen, die hier fehlen, also die schreibt man dann halt noch hier mit dazu und dann wird es ganz ... ja ... also, ich denke, ich würde wirklich erst ganz stur an der Tafel beginnen und denen das dann so klarmachen, eben*

[33] Protokoll 04 H, 05 H, 06 H, 13 H, 16 H, 17 H, 24 H, 33 H, 36 H, 39 H

auch farblich an der Tafel kennzeichnen: H, Z, E und dann womöglich auch die fehlenden Nullen dazuschreiben, die dann ja auch noch klarmachen, dass ich dann zuerst 123 x 600 und dann halt 123 x 40 und dann mal 5, dass denen das auch klar ist.“ (aus Protokoll 03 H)

Einige Lehrkräfte stellen sehr ausführliche Herangehensweisen dar. Eine fügt unter der notierten Aufgabe eine Stellenwerttafel ein und führt mit dieser Hilfe sehr anschaulich die halbschriftliche Multiplikation durch (s. Abb. 48, vgl. Protokoll 05 H).

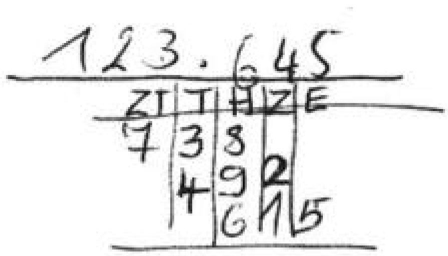


Abb. 48: Handschriftliche Begleitnotiz der Lehrkraft 05 H

Eine andere notiert unter der Aufgabe alle Produkte der verschiedenen halbschriftlichen Rechnungen (s. Abb. 49, vgl. Protokoll 18 H).

Abb. 49: Handschriftliche Begleitnotiz der Lehrkraft 18 H

Keine Lehrkraft nimmt an, dass die halbschriftliche Multiplikation, also das Multiplizieren einer Zahl mit einem höheren Wert, vielleicht noch gar nicht verstanden worden ist. Die Schüler sollen mit Hilfe der halbschriftlichen Multiplikation (be-)merken, dass bei einer Multiplikation mit 100 an das Ergebnis hinten auf jeden Fall noch zwei Nullen kommen:

> *„(...) also, ich fange hier mit der Stelle an, weiß aber, dass es Hunderter ist. Ich kann auch von vornherein zwei Nullen hinschreiben, ich rechne mal 600 das ganze! Denn angefangen haben wir damit, dieses in Schritten zu unterrichten, also in Schritten die Multiplikationsaufgabe zu machen: 600 x 123, 40 x 123, 5 x 123! Und wenn ich 600 mal, dann muss ich auch die Nullen da notieren, und das behalt ich mir bei. Und so multipliziere ich das dann eben hier in diesem, dass ich weiß: 600 mal das, also ist ein Hunderter, häng` ich hier Nullen dran." (aus Protokoll 37 H)*

Dies ist allerdings keine verständnisorientierte Erklärung, die zu einer Vernetzung der primar-mathematischen Inhalte führt. Im Gegenteil ist dies ein Algorithmus, der verfahrensorientiert durchgeführt werden und als solches eine Grundlage zum Durchführen der schriftlichen Multiplikation abgeben kann, jedoch nicht zum Verständnis führt.

Es gibt Lehrkräfte, die angeben, den Kindern deutlich zu machen, dass ja nicht mit Einern, sondern mit Hundertern multipliziert würde; sie appellieren so im Sinne der halbschriftlichen Multiplikation an die Größenvorstellung der Schüler. Ein Beispiel:

> *„Ich lass auch immer noch die beiden Nullen dahinter schreiben. Und hier die Zehnernull auch dahinter; dass man da einfach noch mal deutlich macht: ‚Ich rechne ja nicht mit sechs, sondern ich rechne mit 600.' Das ist eigentlich nur das Problem dabei." (aus Protokoll 30 H)*

10 der befragten Hamburger Lehrkräfte versuchen, den Fehler der Schüler auf diese Weise zu eliminieren.[34]

Demgegenüber erwähnt *keine* der Züricher Lehrkräfte die halbschriftliche Multiplikation als möglichen Lösungsweg zur Behebung der Verständnisschwierigkeiten. 5 Lehrkräfte appellieren jedoch an die Größenvorstellung der Schüler hinsichtlich der Multiplikation mit 10 oder 100[35].

---

[34] Protokoll 02 H, 03 H, 14 H, 15 H, 23 H, 29 H, 30 H, 31 H, 35 H, 40 H
[35] Protokoll 01 S, 02 S, 03 S, 08 S, 15 S

Auch hier schafft die Gegenüberstellung der Herangehensweisen in Zürich und Hamburg einen klaren Kontrast (s. Abb. 50) und untermauert wiederum die Annahme der Unterschiedlichkeit des Wissens Züricher und Hamburger Lehrkräfte.

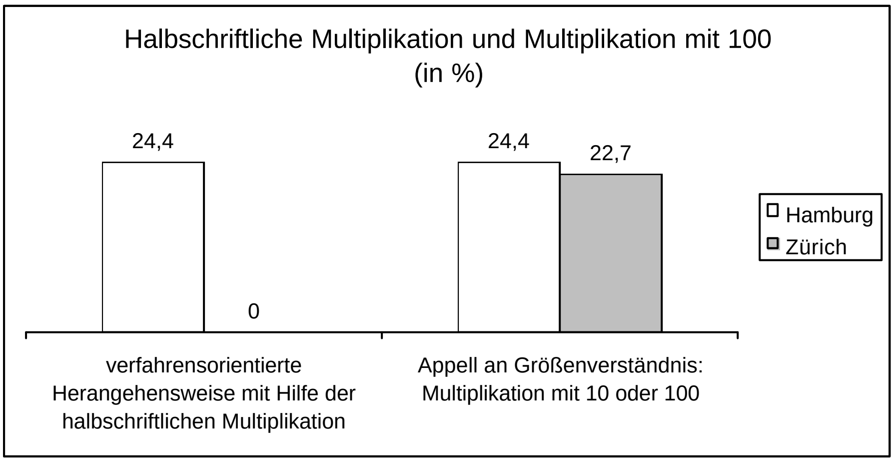


Abb. 50: Halbschriftliche Multiplikation bzw. Multiplikation mit 100 im Vergleich Züricher und Hamburger Lehrkräfte

6.2.7 Antworten mit zwei oder mehr enthaltenen Erklärungsansätzen

In Hypothese 1 wird von der Annahme ausgegangen, dass es Lehrkräfte gibt, die über ein tiefgehendes mathematisches Elementarwissen verfügen. Dass und in welcher Häufigkeit dies der Fall ist, wurde bereits im ersten Teil dieses Kapitels deutlich.
Ein Verständnis, das einzelne Wissensbausteine vielfältig miteinander vernetzt, legt die Frage nahe, ob sich für bestimmte mathematische Problemstellungen nicht auch verschiedene Erklärungen anbieten. Oder anders: Ein fundiertes Wissen dürfte die Darstellung verschiedener Erklärungswege zu nur einem (mathematischen) Inhalt nahe legen und fördern.
In einer weiteren Analyse wurde daher der Fokus darauf gerichtet, wie viele der Lehrkräfte mehr als nur einen Erklärungsweg für den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion oder Multiplikation beschreiten.
In Bezug auf die in Kapitel 4.4 dargestellten Erklärungsvarianten der schriftlichen Subtraktion findet sich in *keiner* Antwort einer Hamburger oder Schweizer Lehrkraft ein alternativer Erklärungsweg. Alle Lehrkräfte belassen es bei nur einer Erklärung.
Ein ähnliches Verhältnis ist bei den Antworten zur schriftlichen Multiplikation zu beobachten. 3 der Lehrkräfte in Hamburg führen die Erklärung des Algorithmus auf den der halbschriftlichen Multiplikation zurück und nutzen zudem noch weitere Erklärungs-

hilfen[36]. Eine davon ist das sogenannte Malkreuz. Hierbei werden die Stellenwerte der beiden Faktoren in eine Tabelle eingefügt und dann „überkreuz“ multipliziert.

Weitere alternative Erklärungen, wie z.B. das geschickte Schreiben der distributiv aufgelösten Aufgabe in ein großes Stellenwertsystem oder verschiedene Darstellungen der Multiplikation von Zehnerpotenzen und deren Wirkungen, finden sich in keiner der Erklärungen.

Es sei erwähnt, dass die Antworten von zwei der drei hier beschriebenen Hamburger Lehrkräfte zu beiden Szenarien 1 und 2 der Kategorie „verständnisorientiert korrekt“ zuzuordnen sind. Die dritte Lehrkraft zeigte in ihren Antworten zu Szenario 2 ebenfalls „verständnisorientierte korrekte“ Erklärungen, zu Szenario 1 immerhin noch verständnisorientierte, wenn auch „fehlerhaft“. Dies könnte ein Hinweis zu einer möglichen Bestätigung der Annahme sein, dass Bereithalten mehrerer Erklärungsalternativen ein Merkmal tiefgehenden mathematischen Wissens ist. Auf der anderen Seite darf diese Annahme nicht überinterpretiert werden, da die Fragestellung des Interviews keine Nennung von Alternativen verlangte. Keine der Lehrkräfte müsste sich hierzu also veranlasst gesehen haben.

6.2.8 Nennung von erforderlichen Wissensgrundlagen der Schüler zum Lösen der schriftlichen Subtraktionsaufgaben

Eine der Fragen des Szenario 1 an die interviewten Lehrkräfte bezieht sich auf die erforderlichen Grundlagen der Schüler zum Lösen der geschilderten Aufgaben: „Was müssten Kinder Ihrer Meinung nach verstehen oder tun können, bevor sie beginnen können, die schriftliche Subtraktion mit Übertrag im Unterricht zu behandeln?“
Nach der schon in Kapitel 6.2.4 dargestellten Fokussierung der Interviewanalyse auf den nach Einschätzung des Verfassers zentralen Bestandteil der Wissensgrundlage, das Verständnis des Stellenwertsystems, werden die Antworten der Lehrkräfte im Folgenden nun in Hinblick auf das genannte Basiswissen im Allgemeinen untersucht. Davon ausgehend, dass eine gute und richtige Wissensgrundlage zu einem besseren Verständnis mathematischer Inhalte beiträgt, soll auch dieser Fokus erneut der Überprüfung der Hypothese 1 dienen. Die auf diese Überprüfung der Hypothese 1 zielende Fragestellung heißt demnach: Gibt es Lehrkräfte, deren Schilderung des benötigten Vorwissens auf ein tiefgehendes mathematisches Verständnis schließen lassen?

[36] Protokoll 14 H, 15 H, 23 H

Hamburg

Drei der Lehrkräfte (~ 7,3%) benennen kein von den Schülern benötigtes Vorwissen und beginnen direkt mit der Beschreibung der Vermittlung des Algorithmus.[37]

Eine relativ große Zahl schildert mathematische „Allgemeinplätze“, die zwar wichtig sind, um sich auf einem Niveau zu bewegen, auf dem die Aufgaben überhaupt gelöst werden können, die aber zum direkten Verständnis der Algorithmen nicht unbedingt notwendig sind:

- ... „solche Aufgaben im Kopf rechnen können“[38]...
- ... „sich im Zahlenraum bis 100 oder 1000 zurechtfinden“[39]...
- ... „verstehen, was 'minus' überhaupt bedeutet/das Minuszeichen kennen“[40]...

Einige Lehrer beziehen sich nur auf verfahrensorientierte Aspekte. Für sie ist es am wichtigsten, dass die Schüler schon ein anderes schriftliches Rechenverfahren mit oder ohne Übertrag kennen gelernt haben:[41]

> *„Spontan würde ich jetzt erst mal inhaltlich sagen, ich würde mit der schriftlichen Addition beginnen.*
> *Dann lasse ich die schriftliche Subtraktion ohne Übertrag folgen, dann die schriftliche Addition mit Übertrag und dann die Subtraktion mit Übertrag.“ (aus Protokoll 25 H)*

Relativ vollständige Schülervoraussetzungen benennen nur 2 Lehrkräfte (~ 4,9%)[42], z.B.:

> *„Vorraussetzung sind die kleinen 1+1-Sätze, die gefestigt sein müssen.*
> *Die Schüler müssen die Stellenwerteinsicht haben, dass es ihnen also klar ist, dass es hier darum geht, im Stellenwert zu rechnen, den Übertrag auch im Stellenwert zu vermerken. (...) Dass ja der nächste Stellenwert durch die Bündelungsaktivität entsteht.“ (aus Protokoll 15 H)*

Viele Lehrer erwähnen vereinzelte Wissensbausteine: Verstehen von „Umkehraufgaben“[43], „Ergänzen können“[44], „halbschriftliche Subtraktion“[45], „Zehnerübergang“[46], „Auf-

---

[37] Protokoll 31 H, 38 H, 39 H
[38] Protokoll 07 H, 12 H, 22 H, 41 H
[39] Protokoll 06 H, 20 H
[40] Protokoll 01 H, 08 H, 24 H
[41] Protokoll 25 H, 27 H, 29 H, 34 H
[42] Protokoll 10 H, 15 H

bau des Zahlensystems“[47], „Eintauschen können“[48], „Zahlenraum bis 20 beherrschen“[49], „Orientierung im Zahlenraum“[50], „Mengenvorstellung besitzen“[51], „Aufteilen der Zahl 10“[52], „E, Z und H voneinander unterscheiden können“[53], „Nebeneinander rechnen können“[54] und „Unterschiede zwischen zwei verschiedenen großen Zahlen“.[55]

Zürich

Ähnlich wie bei den Hamburger Lehrern stellen sich auch die Erklärungsansätze der Züricher Lehrer dar.

Vier der Lehrkräfte (~ 18%) nennen im Gespräch kein von den Schülern benötigtes Vorwissen.[56]

Eine Lehrkraft (~ 4,5%) stellt ein umfangreiches, relativ vollständig benötigtes Vorwissen dar.[57] Der Algorithmus selbst wird von der Lehrkraft allerdings nicht schlüssig erklärt.

Zwei Lehrkräfte (~ 9%) setzen andere schriftliche Rechenverfahren voraus.[58]

Andere Lehrkräfte nennen neben dem Verständnis des Stellenwertsystems (s.o.) vereinzelte Wissensbausteine. Dazu gehören der Zehnerübergang[59], „+“ und „-“ im Allgemeinen[60], andere Stellenwertsysteme kennen[61], ergänzen[62], den Zahlenraum kennen[63], überschlagen können[64], „Einer-Regel“ beherrschen[65], Verständnis von der Größe einer Zahl[66], Umkehraufgaben[67].

---

[43] Protokoll 02 H
[44] Protokoll 05 H, 07 H, 14 H, 16 H, 20 H, 33 H, 35 H, 37 H, 40 H
[45] Protokoll 05 H
[46] Protokoll 07 H, 09 H, 14 H, 21 H, 23 H
[47] Protokoll 11 H, 16 H, 17 H, 19 H
[48] Protokoll 12 H, 13 H, 18 H, 28 H
[49] Protokoll 14 H, 27 H, 37 H, 40 H
[50] Protokoll 20 H
[51] Protokoll 20 H, 40 H
[52] Protokoll 20 H
[53] Protokoll 21 H, 24 H, 26 H, 33 H, 40 H
[54] Protokoll 30 H
[55] Protokoll 32 H
[56] Protokoll 09 S, 11 S, 16 S, 21 S
[57] Protokoll 05 S
[58] Protokoll 19 S, 22 S
[59] Protokoll 02 S, 04 S, 07 S, 10 S, 15 S, 17 S, 20 S
[60] Protokoll 03 S
[61] Protokoll 06 S, 18 S
[62] Protokoll 07 S
[63] Protokoll 12 S

Betrachtet man diese Ergebnisse in Hinblick auf die oben genannte Fragestellung, wie viele Lehrkräfte ein von den Schülern benötigtes Vorwissen benennen, das auf ein tiefgehendes mathematisches Verständnis schließen lässt, ist man im ersten Moment ernüchtert. Demnach würde nur fast jeder zehnte Hamburger und nur fast jeder fünfte Züricher Lehrer in seinen Planungen zu einer Unterrichtseinheit der schriftlichen Subtraktion das Vorwissen seiner Schüler angemessen berücksichtigen.
Jedoch handelt es sich bei den beschriebenen Anteilen nur um die Darstellung einer - wenn auch plausiblen -Tendenz. Wollte man verlässlich Aufschluss über die Berücksichtigung von Schüler-Vorwissen in den Unterrichtsplanungen der Lehrkräfte gewinnen, wäre eine nachfolgende Untersuchung dazu erforderlich. In dieser müsste allerdings der Fokus explizit in einer oder mehrerer genau ausgerichteten Fragen auf das benötigte Vorwissen gerichtet werden.

6.2.9 Nicht bewertbare Antworten

Aus verschiedenen Gründen waren einige der Antworten von Lehrkräften zu verschiedenen Szenarien leider nicht analysierbar. Diese fallen zwar statistisch gesehen nicht ins Gewicht, sollen aber der Vollständigkeit halber kurz dargestellt werden:

Hamburg

3 der Angaben zu Frage 2 waren aus verschiedenen Gründen schwer bewertbar:

- Während der Antwort der Lehrkraft in Protokoll 12 H läutete es zum Stundenbeginn, und die Lehrkraft kürzte die Antwort merklich ab.
- Die Lehrkraft in Protokoll 27 H gab an, noch nie die schriftliche Multiplikation unterrichtet zu haben, und lehnte daher eine ausführlichere Darstellung der Herangehensweise ab.
- Eine Lehrkraft (41 H) bezog sich lediglich auf den äußeren Rahmen statt auf den Inhalt. Auf die Frage, wie sie den Fehler eliminieren könnte, ging sie nicht ein.

Zürich

---

[64] Protokoll 12 S
[65] Protokoll 13 S; die „Einerregel“ meint eine Art Gesetzmäßigkeit, mit der sich immer die Einerstelle verändert, wenn man mit einem anderen Einer addiert oder subtrahiert. Beispiel: „3 minus 7 ergibt immer eine 6“. 13-7 = 6, 43-7 = 36, 83-7 = 76 u.s.w.
[66] Protokoll 15 S, 18 S
[67] Protokoll 19 S

2 der Schweizer Antworten zu Szenario 2 waren nicht bewertbar:

- Die Lehrkraft des Interviews 19 S sagt aus, nur beschreiben zu können, wie sie die Multiplikation eingeführt hat - was sie dann jedoch nicht tut. Ihre Aussage ist sehr kurz und zurückhaltend. Auf mögliche Fehlerquellen geht sie nicht ein („Bin nicht eingelesen...“)
- Die Lehrkraft in Protokoll 21 S unterrichtet erst seit einem Jahr und hat diese Thematik noch nie behandelt. Mögliche Fehlerquellen kann sie nicht angeben („Also konkret kann ich es Ihnen nicht sagen.“).

6.2.10 Zusammenfassung und Interpretation der besonderen Beobachtungen - Schlussfolgerungen in Bezug auf die Hypothesen 1, 2 und 3

Nachdem schon im ersten Teil dieses Kapitels die Hypothese 1 Bestätigung gefunden hat, wird diese in den besonderen Beobachtungen zu den Aussagen der Lehrkräfte noch untermauert. Auch Hypothese 2, der die Annahme zu Grunde liegt, dass sich das Wissen der Lehrkräfte in Hamburg und Zürich in einer bestimmten Art unterscheidet, wird klar erkennbar. Folgende Erkenntnisse lassen sich resultierend aus den besonderen Beobachtungen formulieren:

- Es gibt Lehrkräfte, die verschiedene Erklärungsansätze zur schriftlichen Subtraktion miteinander vermischen, was auf ein fehlerhaftes mathematisches Verständnis des Algorithmus schließen lässt. Während dies auf fast jede zweite Hamburger Lehrkraft zutrifft (46,3%), ist der Anteil Züricher Lehrkräfte deutlich geringer: Nur etwa jede zehnte (9%) zeigt diese Besonderheit in ihrer Antwort zu Szenario 1.
- Das Phänomen der Vermischung ließe darauf schließen, dass eine größere Vielfalt der zur Verfügung stehenden Erklärungsansätze eine ihrer Ursachen ist. Eine Analyse mit dem Fokus der Quantität der verschiedenen Erklärungsmöglichkeiten ergibt aber ein ähnliches Verhältnis der verschiedenen Erklärungsvarianten. D.h. die Ursachen für die „Vermischung“ müssen in anderen Zusammenhängen zu suchen sein.
- Fast jeder fünfte der Hamburger Lehrer verwendet in seinen Erklärungen zur schriftlichen Subtraktion den Begriff „borgen“, der mathematisch in diesem Zusammenhang allerdings falsch und verwirrend ist. Keine der Schweizer Lehrkräfte nennt diesen Begriff.

- Der Begriff des „Stellenwertsystems“, der in Zusammenhang mit Szenario 1 und 2 eine besondere Bedeutung hat, da dessen richtiges Verständnis Grundlage für das der Algorithmen ist, findet in den Antworten verschiedenste Sinndeutungen. Während dies sowohl für die Züricher als auch für die Hamburger Lehrkräfte zutrifft, ist doch ein wichtiger qualitativer Unterschied zwischen den beiden Regionen zu erkennen: Während alle Züricher Lehrkräfte, die das Stellenwertsystem als wichtige Voraussetzung benennen, dies auch in ihren anschließenden Erklärungen sinnvoll mit einschließen, tun dies nur 10% derjenigen Hamburger Lehrkräfte, die das Stellenwertsystem ebenfalls als Voraussetzung genannt haben.
- 68,3% der Hamburger Lehrkräfte benennen keine konkret-operationalen oder ikonischen Erklärungshilfen, mit denen sie die Vermittlung der Algorithmen vereinfachen könnten. Dem stehen nur 40,9% der Züricher gegenüber, die ebenfalls auf diese Form der Erklärungshilfe verzichten.
- Sowohl die Züricher als auch die Hamburger Lehrkräfte benennen zum größten Teil kein vollständiges Vorwissen, das seitens der Schüler für ein Verständnis der schriftlichen Subtraktion nötig ist.
- Bei der Vermittlung von Szenario 2 bezieht sich keine Lehrkraft auf eventuelle Verständnisschwierigkeiten. Alle Kollegen beschränken sich auf eine für sie korrekte Schilderung der Vermittlung des Algorithmus, ohne die nötigen Voraussetzungen für das Verständnis des Algorithmus zu reflektieren.

Haben zunächst noch alle Antworten der Lehrkräfte gemeinsam, in der Mehrheit auf nicht-verständnisorientiertes Wissen der Lehrkräfte schließen zu können (Hypothese 1), macht die Zusammenfassung der besonderen Beobachtungen jedoch sehr deutlich, dass in der Qualität des verfügbaren Wissens durchaus Unterschiede zu erkennen sind (Hypothese 2). Die Beobachtungen vor allem des „Vermischens“, der Verwendung des Begriffes „Borgen“ und der qualitativ unterschiedlichen Verwendung des Begriffs „Stellenwertsystem“ sprechen für eine Bestätigung der Hypothese 3. Doch ist der in Abschnitt 6.2 festgestellte Unterschied wie dort erwähnt nicht signifikant; deshalb sind die besonderen Beobachtungen daher eher als „Indizien“ für eine Tendenz hin zur Annahme der Hypothese 3 zu sehen, deren Überprüfung in einer Untersuchung mit größerer Stichprobe und größerer überregionaler Reichweite durchaus lohnenswert erscheint.

6.3 Die Herangehensweise an ein bislang unbekanntes mathematisches Problem im Bereich der Geometrie als Eigenschaft von PUFM

In Kapitel 5.2. wurde zum Hauptgegenstand der Untersuchung, das Profound Understanding of Fundamental Mathematics, eine Reihe besonderer Fragen aufgeworfen. So stellt sich in Hinblick auf die in Kapitel 2 und 3 zusammengetragenen Erkenntnisse natürlich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen profundem Lehrerwissen und Schülerleistungen. Erbringen Schüler, die von Lehrkräften mit profundem Verständnis elementarer Mathematik unterrichtet worden sind, bessere Leistungen als die Schüler von Lehrern mit eher verfahrensorientiertem Wissen?

In Szenario 3 wird ein Bereich der Primarmathematik angesprochen, der, anders als die „traditionell“ vermittelten Algorithmen der verschiedenen Rechenoperationen, eine gewisse Sonderstellung einnimmt. Die Geometrie wird oft als ein „Randbereich“ wahrgenommen. Dies ist schon daran zu erkennen, dass sie auch in den üblichen Lehrwerken nur einen kleinen Teil, meist wenige Seiten, einnimmt.
Wie jedoch schon in Kapitel 4.6 dargestellt, sind geometrische Strukturen aus z.B. arithmetischen Erklärungen in der Grundschule nicht mehr wegzudenken. Und mehr noch: Wie nur in wenigen anderen Inhalten der Primarmathematik bieten sich im Bereich der Geometrie Situationen und exemplarische Problemstellungen an, die systematisches Denken schulen, das Formulieren von Begründungen oder Ordnungsschemata einfordern, zusammenfassend: für charakteristische mathematische Handlungsweisen sensibilisieren und trainieren.
Am Beispiel der in Kapitel 4 schon vorgestellten Problematik, einen angenommenen Zusammenhang zwischen der Zunahme des Umfangs und des Flächeninhaltes zu präzisieren, wurde eine qualitative Kategorisierung verschiedener Formen der Herangehensweise an eine (bislang für die Lehrkräfte unbekannte) Hypothese vorgestellt. Diese Kategorien, von Ma auch „vier Stufen des Verstehens“ genannt (vgl. Ma 1999, S. 93 ff), reichen von einer einfachen Widerlegung der Hypothese (der Flächeninhalt würde parallel zum Umfang immer wachsen) durch ein Gegenbeispiel bis zu einer systematischen Begründung, unter welchen Bedingungen dies der Fall ist und warum diese immer gelten.

Vor dem Hintergrund der vier Stufen des Verständnisses ergibt eine Analyse der Hamburger und Züricher Gesprächsprotokolle folgendes Bild:

3 der Hamburger Lehrkräfte erkennen den Irrtum und führen einen Gegenbeweis[68]. Auch ihre Schweizer Kollegen akzeptieren nicht die These der Schülerin[69].

> *„Ich würde ihr ein Gegenbeispiel nennen, z.B. ein Rechteck mit einer Kantenlänge 11cm x 1cm. Das hätte eine Fläche von 11cm, aber einen Umfang von 24cm. Damit würde ich ihre Theorie widerlegen.*
> *Das würde ich ihr sagen. Deine Theorie ist nicht richtig. Siehst du, es gibt ein Gegenbeispiel.“*[70]

In Hinblick auf die vier Stufen des Verstehens wären diese Antworten in die erste Stufe, die Widerlegung durch ein Gegenbeispiel, einzuordnen.
Eine dieser Schweizer Lehrkräfte lobt die Schülerin zudem ausdrücklich und macht Vorschläge zur weiteren Verwendung der Idee der Schülerin:

> *Also, ich würde ihr aus Gummi, ungefähr 16 cm, also ich würde Gummiband 16cm, und dann ..., dass es einen Knopf gibt, und dann würd` ich da mit Stecknadeln das einstecken. Dann würd` ich den Umfang – was hat sie da verdoppelt? Das hat sie verdoppelt. Dann würde ich... nein, ich würde mit dem arbeiten, dann würde ich... äh... ein langes Rechteck machen, oder? Also ich würde mit diesen 16 cm spielen, und immer die Fläche ausrechnen. Also das ist 4 mal 4, 16. Dann, wenn ich da 2 cm nehme und da 2, macht das 6, stimmt das? 2 x 6, 12. Und dann würd` ich das noch dünner machen, 1 cm, 1, 1, 7, und dann würde ich es noch dünner machen, dass es gar keine Fläche mehr gibt...*
> *Ich würde ihr aber sagen, sie soll weiter forschen. Oder, man sieht es ja auch: Also, ich muss sie ja enttäuschen, aber ich würde sie auch loben, dass sie das interessiert und eine solche Behauptung aufstellt und dass sie dann weiter interessiert, warum das nicht so ist, und im Moment käme mir nur die Gummi-Variante in den Sinn.“*[71]

Die Idee, sich zunächst einmal eine Variable zu suchen, die dann unverändert bleibt (in diesem Fall der Umfang mit Hilfe eines Gummibandes und eines Geodreiecks), stellt eine besondere Form der Systematik dar: Es wird eine Variable bewusst kontrolliert (Umfang) und geschaut, wie die anderen darauf „reagieren“. Nennt die Züricher Lehrkraft auch nicht explizit die Bedingungen, die eine Abnahme des Flächeninhalts bei Konstanthaltung des Flächenulmfangs zur Folge haben, so führt sie diese der Schüle-

[68] Protokoll 21 H, 30 H, 40 H
[69] 06 S (konkrete Vorschläge zur Verarbeitung der Idee der Schülerin, lobt die Sch.), 08 S, 17 S (lobt dennoch die Schülerin für ihr Engagement)
[70] 21 H

rin doch implizit vor Augen - und gibt ihr ein Instrument zur Hand, den Sachverhalt anschaulich und systematisch weiter zu verfolgen, zu ergründen, „warum das nicht so ist".
Bezogen auf die vier Stufen des Verstehens agiert diese Lehrkraft auf Stufe 3: Eine in Hinblick auf die Ergebnisse herausragende Ausnahme. Denn:

31 der Hamburger Lehrkräfte akzeptieren die Theorie der Schülerin[72], 9 der Schweizer sehen dies ebenso[73]:

> *„Finde ich hervorragend, komm an die Tafel und zeig uns, was du gefunden hast!*
> *Dabei können dann auch gleich die Begriffe Quadrat und Rechteck wiederholt werden."*[74]

> *"Bravo! Super! Ja! Also, wenn ein Kind von sich aus auf so etwas kommt, dann hat es nur Lob verdient. Denn die Lösung, die sie ja hier präsentiert, die ist ja richtig, oder? Doch, doch, doch – doch die Fläche stimmt ja auch, ist ja alles okay. 2 mal 8... ja stimmt."*[75]

21 der Hamburger Lehrkräfte erkennen nicht den Irrtum, loben aber dennoch die Schülerin ausdrücklich für ihr Engagement[76], bei den Züricher Lehrkräften waren dies 6[77]. Über die Richtigkeit dieses Verhaltens dürfte man geteilter Meinung sein. Zum einen ist die Tatsache, dass sich die Schülerin überhaupt selbstständig mit Hypothesenbildung und Problemlösen beschäftigt, selbstverständlich anzuerkennen. Zum anderen wird hierdurch eine Herangehensweise verstärkt, die in keiner Weise systematisch zu nennen sein dürfte. Eine Begründung für ihre Behauptung wird der Schülerin nicht abverlangt. Auch die Antworten einiger Lehrkräfte, die die Schülerin bitten, „das mal der Klasse vorzuführen" oder „an der Tafel vorzumachen", sind nicht als Aufforderung zur Begründung gemeint, sondern stellen vielmehr die Tatsachen, dass sich die Schülerin mit mathematischen Problemen beschäftigt (gegenüber vielleicht den Mitschülern), heraus.

---

[71] 06 S
[72] Protokoll 01 H, 02 H, 03 H, 04 H, 05 H, 06 H, 07 H, 08 H, 09 H, 10 H, 12 H, 13 H, 14 H, 15 H, 19 H, 20 H, 22 H, 24 H, 25 H, 26 H, 27 H, 28 H, 31 H, 32 H, 33 H, 34 H, 35 H, 36 H, 38 H, 39 H, 41 H,
[73] 01 S, 02 S, 03 S, 04 S, 09 S, 13 S, 14 S, 18 S, 20 S,
[74] 14 H
[75] 01 S
[76] 01 H, 02 H, 04 H, 06 H, 07 H, 08 H, 12 H, 13 H, 14 H, 20 H, 22 H, 24 H, 25 H, 27 H, 28 H, 31 H, 33 H, 34 H, 38 H, 39 H, 41 H

10 Hamburger und 3 Züricher Lehrkräfte akzeptieren die – ja doch fehlerhafte – Erkenntnis der Schülerin relativ kommentarlos.

12 Hamburger Lehrkräfte erkennen nicht den Irrtum, setzen aber die Erkenntnisse der Schülerin als Impuls im Unterricht ein[78]. Einige von ihnen hätten die Schülerin zuvor auch gelobt (diese werden also gewissermaßen „doppelt" gezählt, daher die additiv in sich zunächst nicht schlüssigen Prozentzahlen des Überblicks, s. Abb. 51). Eine Züricher Lehrkraft macht dies genauso[79].

Weder Züricher noch Hamburger Lehrkräfte geben der Schülerin Anregungen, andere Aufgabenstellungen auszuprobieren.

7 Hamburger Pädagogen sind sich unsicher, d.h. sie machen keine Angaben oder vermuten einen Gegenbeweis[80]. Dieser Antworttypus nimmt bei den Züricher Lehrern einen wesentlich größeren Teil ein (10 Lehrkräfte)[81].

> *„Ich denke, da müsste man z.B. Figuren suchen, die einen Umfang von 16 cm haben, und die Kinder überprüfen lassen: Ist das wirklich wahr? Bleibt dieser Inhalt dann immer kleiner als bei dieser zweiten Figur, die sie sich ausgesucht hat? (...) Und dann können sie selbst sehen: Hat sie nun Recht, diese Schülerin, mit ihrer Vermutung, oder ist das Zufall bei diesen beiden Figuren."*[82]

> *„Ich denke, ich würde ihr nicht sofort eine Antwort geben. So, wie ich das jetzt auch nicht mache. Sondern, ich würde sagen: „Das find ich ganz spannend, was du da herausgefunden hast, und was du da ausgerechnet hast, das stimmt auch. Also, ich nehme mir das gerne mit in meine Mittagspause und schau's mir dann mal an in aller Ruhe!" (...) Und dann würd` ich mit ihr anhand von mehreren Beispielen, die dann immer extremer werden, also eine Seite extrem lang, eine ganz kurz, oder Quadrate ausrechnen, würden*

[77] 01 S, 02 S, 09 S, 13 S, 14 S, 18 S
[78] 04 H, 05 H, 06 H, 10 H, 13 H, 14 H, 15 H, 20 H, 24 H, 26 H, 31 H, 39 H
[79] 03 S
[80] 11 H (vermutet Gegenbeweis), 16 H (versteht die Schülerin nicht, ist sich unsicher, dennoch Lob der Schülerin), 17 H (vermutet Gegenbeweis), 18 H (vermutet Gegenbeweis), 23 H (vermutet Gegenbeweis), 29 H (ahnt Gegenbeweis), 37 H (unsicher)
[81] 05 S, 07 S (unsicher, vermutet Gegenbeweis), 10 S (Lobt die Sch. für Forscherdrang, vermutet Gegenbeispiel), 11 S (Lobt die Sch., will die Aussage überprüfen, vermutet Gegenbeispiel), 12 S (würde mit den anderen Schülern zusammen eine Tabelle erstellen, um zu überprüfen, ob die Aussage der Sch. richtig ist), 15 S (unsicher über die Aussage der Schülerin, vermutet Gegenbeispiel), 17 S (bestätigt nur den konkreten Fall, legt sich nicht fest → vermutet Gegenbeispiel), 19 S (unsicher, Frage nach Lehrmittel), 21 S (Würde ihre Kollegin fragen), 22 S (unsicher, vermutet Gegenbeispiel)

wir miteinander herausfinden, ob es wirklich eine Regel gibt, dass man sagen kann, ja, das ist so, du hast Recht mit wie sie das sagt, dass sie dann herausgefunden hat, dass mit zunehmendem Umfang auch die Fläche größer wird, oder ob das nicht stimmt. Aber ich würde nicht sofort eine Antwort geben."[83]

Nach Einschätzung des Verfassers ist eine Antwort dieser Art höher einzuschätzen als der Versuch, im Stehgreif eine Entscheidung zu treffen. Inwieweit diese Lehrkräfte im Nachhinein nun tatsächlich eine systematische Herangehensweise entwickelt hätten, lässt sich nur vermuten. Das Signal an die Schülerin ist allerdings deutlich: Die Lehrkraft nimmt auf der einen Seite die Behauptung ernst (will sogar nach dem Unterricht in Ruhe darüber nachdenken) und lässt ihr damit eine gewisse Wertigkeit zukommen, auf der anderen Seite zeigt sie, dass Behauptungen sorgfältig geprüft sein wollen - und das braucht eben seine Zeit.

Fasst man die Ergebnisse in einem Diagramm zusammen, ergibt sich folgendes Bild (Abb. 51):

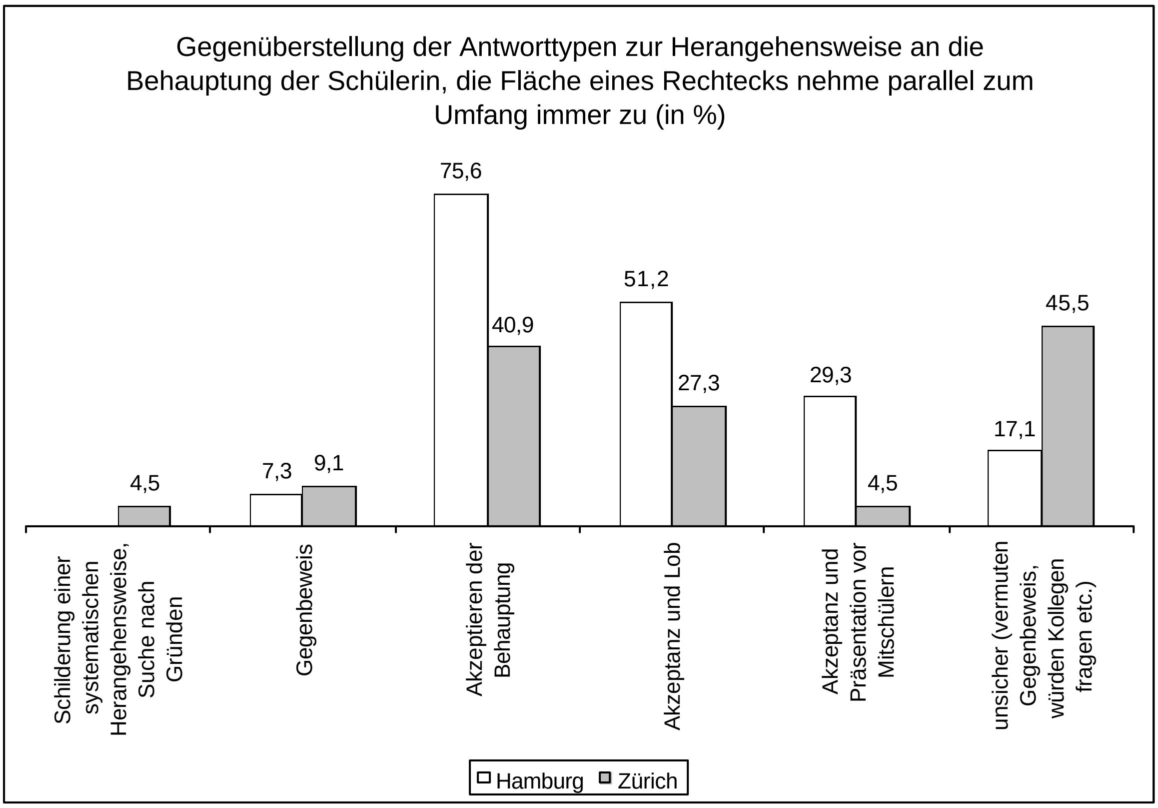


Abb. 51: Gegenüberstellung der Antworttypen zur Herangehensweise an die Behauptung der Schülerin, die Fläche eines Rechtecks nehme parallel zum Umfang immer zu (in %)

[82] 17 H
[83] 10 S

Die Übersicht führt buchstäblich vor Augen, dass ein sehr hoher Teil der Lehrkräfte die Theorie der Schülerin als „richtig“ beurteilt, ihre Aussage also akzeptiert (Akzeptieren der Behauptung) und somit die Problematik überhaupt nicht versteht. Dieser Anteil ist prozentual gesehen bei den Hamburger Lehrkräften (75,6%) gegenüber den Schweizer Kollegen (40,9%) fast doppelt so groß.

Nur ein kleiner Teil erkennt sofort den Gedankenfehler und würde der Schülerin aus dem Stehgreif ein Gegenbeispiel nennen können (Gegenbeweis). 3 Hamburger (7,3%) und zwei Schweizer Lehrkräfte (9,1%) argumentieren so.

Von den insgesamt 6 Lehrkräften, die die begrenzte Sichtweise der Schülerin erkennen, eröffnet nur eine (Schweizer) Lehrkraft der Schülerin Perspektiven und lässt so auf eine systematische Herangehensweise schließen (Schilderung einer systematischen Herangehensweise, Suche nach Gründen). Bezogen auf die „Stufen des Verstehens“ bedeutete dies Stufe 3.

Bemerkenswert ist nach Einschätzung des Verfassers der hohe Anteil der Schweizer Lehrkräfte, die angeben, in diesem Fall erst einmal mit Kollegen Rücksprache zu halten oder sich auf anderen Wegen zuerst einmal eingehend mit der Theorie der Schülerin beschäftigen zu wollen, bevor sie ihr eine verbindliche Antwort geben (unsicher, vermuten Gegenbeweis, würden Kollegen fragen etc.). Dieser Unterschied dürfte sich auf zwei Rahmenbedingungen der Lehrerarbeit und –ausbildung zurückführen lassen:

- Die Schweizer Lehrkräfte verbringen die Mittagspause, die abhängig vom jeweiligen Stundenplan ca. 90 Minuten dauert, zusammen und haben hier die Möglichkeit, in Ruhe über solche Dinge zu sprechen.
- Jungen Lehrkräften, die neu an einer Schule beginnen, wird eine erfahrene Lehrkraft zur Seite gestellt, die sie über eine längere Zeit offiziell berät. Über diese offizielle Zeit hinaus bleibt dieses Beratungsverhältnis jedoch sicher erhalten.

Mindestens auf diese beiden grundsätzlichen Unterschiede gegenüber Hamburger Schulen, aber auch auf das überwiegend offenere und herzlichere „Klima“ an Schweizer Schulen ist es vermutlich zurückzuführen, dass Gespräche oder Diskussionen zwischen Kollegen über erlebte oder problematische Unterrichtssituationen an Züricher Schulen häufiger sind.

Geht man davon aus, dass die Lehrkräfte, die zunächst verhalten reagieren und eher einen Irrtum der Schülerin vermuten, nach einer Beratung mit Kollegen oder Konsultierung anderer Informationsquellen einen Weg finden, die Schülerin angemessen auf ihren gedanklichen Fehler hinzuweisen, dann bekäme die Schülerin in der Schweiz zu 59,1% ein durchdachtes oder korrektes Feedback. In Hamburg dagegen hätte diese Wahrscheinlichkeit nur bei 24,4% gelegen.

Es mag erstaunen, mit welch profundem mathematischen Verständnis und mit welcher analytischen Fähigkeit chinesische Lehrkräfte die gleiche Fragestellung angegangen sind. Nur 8% akzeptierten die Behauptung der Schülerin fraglos. Keine gab an, nicht sicher zu sein, Kollegen fragen zu müssen oder noch einmal in Ruhe darüber nachdenken zu müssen (vgl. Ma 1999, S. 90ff). Alle verbleibenden 92% fingen sofort an, nach einer Strategie zu suchen, um die Behauptung der Schülerin zu prüfen. Dabei kamen 22% zu einem falschen Ergebnis („die Behauptung ist korrekt“), die verbleibenden 70% der chinesischen Lehrer konnten die Behauptung jedoch entweder widerlegen oder eingrenzen („unter bestimmten Bedingungen gültig“) (ebd.). Anders ausgedrückt: Das Resultat der Befragung Hamburger Lehrkräfte lässt sich im Vergleich mit ihren chinesischen Kollegen genau umdrehen: Genau so viele chinesische Lehrer entwickeln eine korrekte Strategie wie Hamburger Lehrkräfte die Behauptung fraglos akzeptieren - und umgekehrt!

Noch nachdenklicher mag die Qualität der Antworten chinesischer Lehrkräfte stimmen. Von den 50 (~70%) chinesischen Lehrerkräften, die der Schülerin eine korrekte Antwort geben konnten, geben nur 14 nur ein Gegenbeispiel. Acht gaben der Schülerin verschiedene Beispiele zur Hand, die zeigten, dass ihre Behauptung nur manchmal zutrifft, manchmal aber eben nicht. 26 erarbeiteten die *allgemeinen* Bedingungen, unter denen die Behauptung zutrifft, oder eben nicht; und sechs Lehrkräfte gingen sogar noch darüber hinaus und konnten erklären, *warum* bestimmte Bedingungen den Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt konstituieren (ebd.).

Im Vergleich zu den chinesischen Kollegen weisen auch die Schweizer Kollegen nur einen geringen Anteil an richtigen Antworten auf die Behauptung der Schülerin auf. Die Antwortstrategie gleicht jedoch eher der US-amerikanischer Lehrkräfte, die ebenfalls in der Studie von Ma zu dieser Situation interviewt wurden. Der weitaus größte Teil der US-Lehrkräfte (78%) ist sich nicht sicher, würde noch mal in Büchern nachschlagen wollen, sich beraten etc., was sich in einer Parallele bei den Schweizer Lehrkräften wiederfindet (45,5%). Nur drei amerikanische Lehrkräfte suchen nach einer Erklärung, eine schließlich entwickelt eine korrekte - gegenüber dreien in Zürich.

Die Resultate zeigen eindrucksvoll, wie unterschiedlich das profunde Wissen elementarer Mathematik von Lehrkräften in unterschiedlichen Kulturkreisen ausfällt. Vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse sieht der Verfasser die Hypothese 4 als bestätigt an.

6.4 *Hamburger Schulleistungstest HST 4/5: Ergebnisse*

Im Folgenden soll auf die in Abschnitt 6.2 aufgeworfenen besonderen Fragestellungen Bezug genommen werden. So stellt sich in Hinblick auf die in Kapitel 2 und 3 zusammengetragenen Erkenntnisse natürlich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen profundem Lehrerwissen und Schülerleistungen. Zeigen Schüler, die von Lehrkräften unterrichtet worden sind, deren Antworten auf ein Profound Understanding of Fundamental Mathematics schließen lassen können, bessere Leistungen als die Schüler von Lehrern mit eher verfahrensorientiertem Wissen?
Schon an dieser Stelle sei betont, dass bei der Interpretation der vom Verfasser gewonnenen Daten gewisse Einschränkungen hinsichtlich der Validität und Reliabilität berücksichtigt werden müssen. Am schwersten fällt dabei ins Gewicht, dass Schülerleistungen in jedem Fachbereich von zahlreichen Faktoren abhängen. Neben den fachwissenschaftlichen Aspekten, die der Verfasser fokussiert, können Variablen wie Klassenmanagement, Lehrerpersönlichkeit oder auch außerunterrichtliche Einflüsse, Schulkontexte, die fachwissenschaftlichen Kenntnisse einer Lehrkraft als Einflussgröße auf die Schülerleistung deutlich überlagern (vgl. Helmke 2004, S. 34f. sowie Kap. 2).
Um den Schulkontext als Störfaktor bei der Auswertung gewonnener Daten eliminieren zu können, wurden die Daten zum Einkommen der Eltern, Ausländeranteil und Arbeitslosigkeit beim Statistischen Landesamt in Hamburg erfragt[84]. Ausgehend davon, dass die Schüler nach Zufallsprinzip auf die einzelnen Klassen einer Schule verteilt werden, konnte so auf eine Erhebung mittels Fragebogen innerhalb der Klassen verzichtet werden.
Darüber hinaus war abzusehen, dass eine zusätzliche Erhebung persönlicher Daten zu einer geringeren Akzeptanz der Untersuchung und zu einer höheren Zahl von Absagen geführt hätte. Vor diesem Hintergrund gesehen kann der Verfasser nicht ausschließen,

[84] Aus datenschutzrechtlichen Gründen dürfen diese Daten leider nicht veröffentlicht werden. Der Verfasser musste sich bei der Beantragung der Untersuchung in Hamburg schriftlich verpflichten sicherzustellen, dass keinerlei Inhalte der Arbeit auf eine bestimmte Schule und somit einzelne Lehrkräfte zurückzuverfolgen sind. Dies wäre bei einer Zuordnung der Schulkontextdaten jedoch der Fall: Die Leser wären in der Lage, die beteiligten Schulen zu identifizieren.

dass die sozialen Kontextdaten innerhalb einiger Klassen von den ermittelten Schulkontextdaten abweichen; auch diese sind daher mit Vorsicht zu betrachten.
Vor dem Hintergrund der Anzahl der immerhin 39 getesteten Schulklassen, also ca. 1000 Schüler, war allerdings zu erwarten, dass sich diese Abweichungen statistisch weitestgehend eliminieren.
Ebenfalls soll an dieser Stelle nochmals deutlich betont werden, dass mit dem vorliegenden Design nicht beabsichtigt ist, einen Ursache-Wirkungs-Zusammenhang festzustellen. Vielmehr geht es nur darum herauszufinden, ob Lehrkraftantworten und Schülerleistungen korrelieren. In welcher Weise dann das Fachwissen der Lehrkräfte tatsächlich und worauf direkt Auswirkungen hat, kann auch in dieser Studie nicht eindeutig nachgewiesen werden. Denkbar sind natürlich auch Zusammenhänge wie z.B. ein Einfluss des Fachwissens auf das Selbstbild der Lehrkraft, die mit so gewonnenem Selbstbewusstsein eine Art von Autorität versprüht, die wiederum einen Schüler dazu anhalten könnte, besonders gute Leistungen zu erzielen - um nur eins von vielen Beispielen möglicher Zusammenhänge zu nennen.
Bevor ein Zusammenhang zwischen den Antworten der Lehrkräfte und den Leistungen der Schüler näher betrachtet wird, soll im folgenden Abschnitt daher kurz der deutliche Einfluss der außerunterrichtlichen Faktoren auf die Schülerleistungen dargestellt werden.

6.4.1 Einfluss des sozialen Umfeldes auf die Schülerleistungen

Die Durchführung des Schulleistungstests in 39 Hamburger 4. Grundschulklassen hat die Ergebnisse verschiedener Studien, u.a. Pisa, bestätigt: Die schulischen Leistungen scheinen in hohem Maße vom sozialen Umfeld und den Fördermöglichkeiten durch das Elternhaus abzuhängen. In der Erhebung des Verfassers wurden das Einkommen der Eltern und der Ausländeranteil berücksichtigt. Dabei ergaben sich hohe Übereinstimmungen mit den Leistungen der Schüler: Je höher das Einkommen der Eltern und je niedriger der Anteil ausländischer Kinder, desto bessere Ergebnisse wurden im Leistungstest erzielt. Das kommt in den folgenden beiden Abbildungen sehr anschaulich zum Ausdruck (vgl. Abb. 52 und 53).

Zusammenhang zwischen den Einkünften der Erziehungsberechtigten und dem durchschnittlichen Klassen-Prozentrang des HST 4/ 5

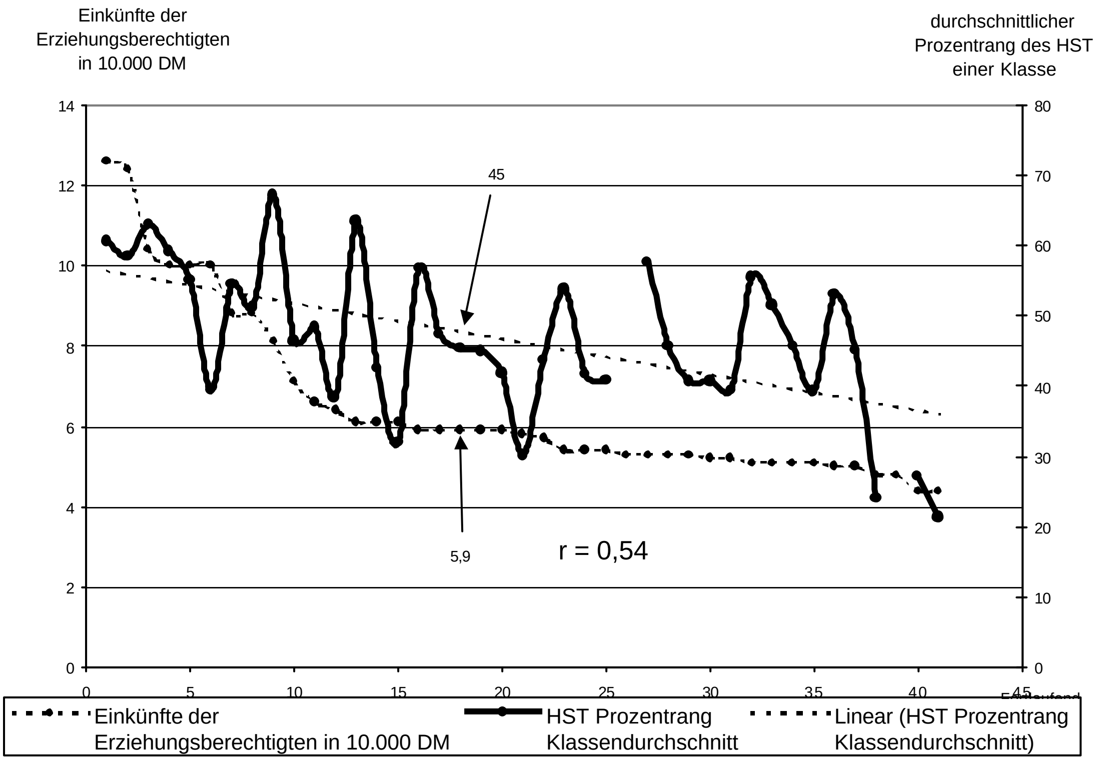


Abb. 52: Zusammenhang zwischen Einkünften der Erziehungsberechtigten und dem durchschnittlichen Prozentrang einer Klasse

Erklärung zu Abb. 52: Zu sehen ist der Zusammenhang zwischen den Einkünften der Erziehungsberechtigten (in 10.000 DM, gepunktete Linie, z.B. 5,90 = 59000 DM) und dem durchschnittlichen Prozentrang einer Klasse. Prozentrang meint hier den prozentualen Anteil der Schülerinnen und Schüler der Eichstichprobe dieses Verfahrens, die bessere oder schlechtere Leistungen erzielt haben. Der Datenpunkt „45“ meint also, der Durchschnitt der Klasse war besser als 45% bzw. 55% der Schüler aus der Eichstichprobe 1999. Die gestrichelte Gerade ist die Trendlinie des HST-Prozentranges, die von ca. 58 auf ca. 35 sinkt., korrelierend mit den Einkünften der Eltern (r=0,54). Die Werte der X-Achse sind als durchlaufende Zähler zu sehen. 5 steht z.B. für die fünfte (von insgesamt 49) Klassen. Zwei Datensätze fehlen, hierin sind die beiden Lücken im Graphen zum durchschnittlichen Prozentrangplatz zu erklären.

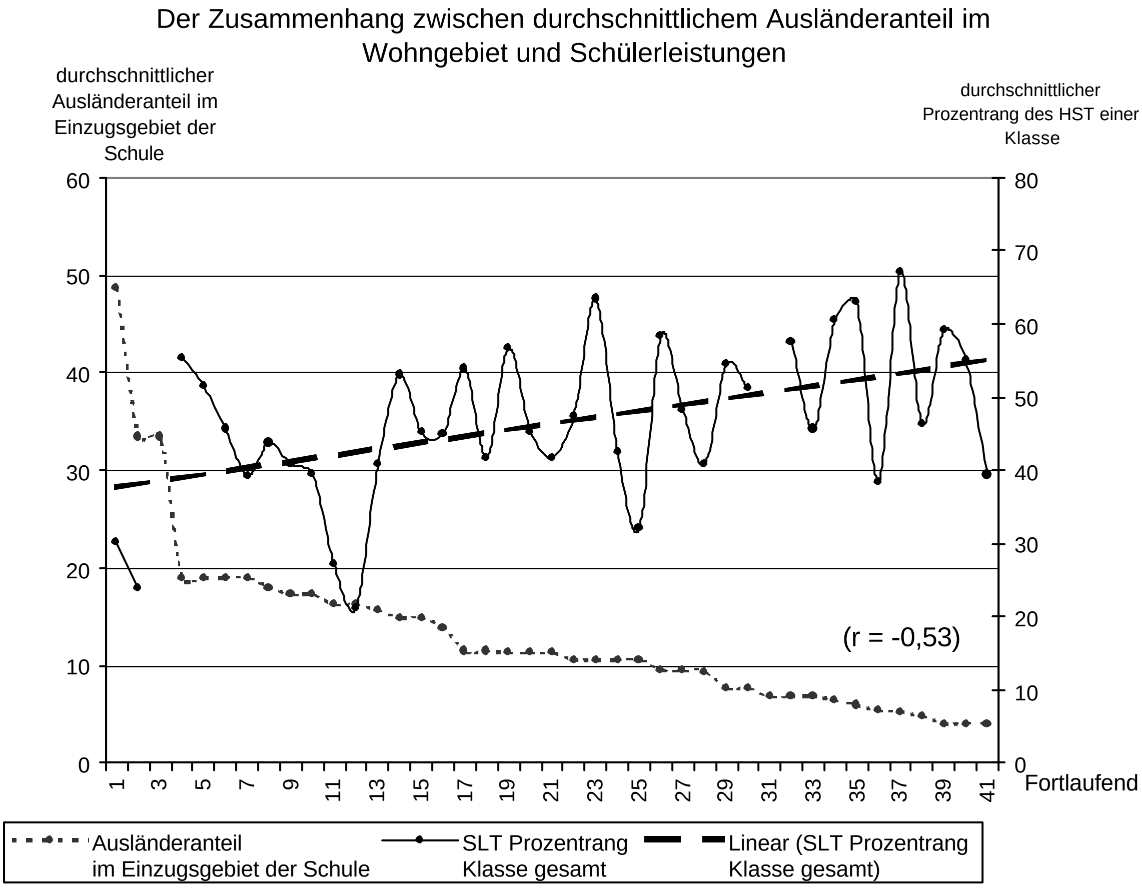


Abb. 53: Zusammenhang zwischen durchschnittlichem Ausländeranteil im Einzugsgebiet der Schule und Schülerleistungen

Erklärung zu Abb. 53: Zu sehen ist eine negative Korrelation (r=-0,53) zwischen dem durchschnittlichen Ausländeranteil im Einzugsgebiet einer Schule (unterer Graph) und den Leistungen der Schüler (obere Kurvenlinie). Die Bezeichnung „Fortlaufend" an der x-Achse meint auch hier wieder eine Art fortlaufende Nummerierung der beteiligten Klassen, z.B. 13. Klasse u.s.w.

Dabei ist allerdings zu bedenken, dass die beiden Variablen Elterneinkommen und Ausländeranteil nicht unabhängig voneinander sind. Bekanntlich finden sich Verteilungen Hamburger Wohngebiete nach Einkommensklassen, die in hohem Maße mit dem jeweiligen Ausländeranteil korrelieren. Der Effekt der sozialen Bedingungen, in denen die Schüler im jeweiligen Wohngebiet aufwachsen, – in Hamburg werden, von privaten Konfessions- und Weltanschauungsschulen einmal abgesehen, die Kinder stadtteilbezogen eingeschult – überlagert offenbar den Effekt der Unterrichtsgestaltung, ohne –

auch das lässt sich anschaulich den beiden Grafiken entnehmen – die Streuungen um die theoretische Zusammenhangskurve erklären zu können.

Signifikante Zusammenhänge zwischen den Antworten der Lehrkräfte und den Leistungen der Schüler innerhalb der gesamten Stichprobe konnten im ersten Angang also nicht festgestellt werden. Die äußeren Einflüsse, zu denen neben „Einkünften der Eltern“ und „Soziales Umfeld“ auch verschiedene andere Faktoren zählen, sind sehr stark. Sie sind bedauerlicherweise statistisch im Rahmen dieser finanziell und zeitlich begrenzten Studie kaum kontrollierbar. Solange aber diese intermittierenden Variablen nicht isoliert werden, lässt sich der Zusammenhang zwischen dem Unterrichtskonzept und der fachlichen Kompetenz der Lehrer als unabhängige und der Schülerleistung als abhängige Variable nicht valide und reliabel bestimmen.

Dennoch gibt es Tendenzen, die die Annahme eines Zusammenhangs zwischen verfahrensorientiertem bzw. verständnisorientiertem Unterricht und Schülerleistungen aufrechterhalten lassen. Die Streuungen um die theoretische Kurve des Zusammenhangs zwischen sozialen Faktoren und Schülerleistung stützen diese Annahme.
Wünschenswert wäre daher, z.B. mit Hilfe von sogenannten „Laborklassen“ Faktoren wie z.B. Lehrerpersönlichkeit (die Schüler besonders motivierende Charaktereigenschaften u.a.), Klassenraumeinrichtungen (Bibliothek, Computer etc.), allgemeines Klassenklima oder auch Unterrichtsmethodik („geöffneter“- oder „frontaler“ Unterricht) als Variable auszuschließen. Denkbar wäre auch, die Lehrkraft- und Schülergruppen in so großer Anzahl zu wählen, dass sich diese Faktoren statistisch selbst eliminieren.

6.4.2 Zusammenhänge zwischen Antworten der Lehrkräfte und Leistungen der Schüler

Anhand der ungefilterten Gesamtstichprobe sind wegen der genannten Störfaktoren signifikante Zusammenhänge zwischen den Leistungen der Schüler und den Antworttypen der Lehrkräfte nicht zu identifizieren. Dies hängt unter anderem auch mit der für diese Untersuchung ungünstigen Verteilung der verschiedenen Lehrkrafttypen auf Gebiete mit unterschiedlichen Schulkontexten zusammen. Auch hier zeigt die Stichprobengröße der Untersuchung Grenzen auf: Eine weitaus höhere Zahl an untersuchten Schulen wäre aussagekräftiger gewesen.
An einigen Schulen konnte der Verfasser allerdings mehrere Lehrkräfte interviewen. Somit ergab sich die Möglichkeit, die Leistungen der Schüler, gemessen am durch-

schnittlichen Prozentrang[85], in Bezug auf die Lehrkraftantworten innerhalb *einer* Schule zu untersuchen. Die Darstellung dieser Untersuchung ist aus Gründen der Übersichtlichkeit in den Anhang verlegt worden (s. Anhang 2 „Schülerleistungen (Prozentrang) im Vergleich, begrenzt auf Schulen“).

An insgesamt zehn Schulen hatte der Verfasser die Möglichkeit, zwei oder mehr Lehrkräfte zu interviewen. Dabei konnte ein Zusammenhang zwischen den Leistungen der Schüler und den Lehrkraftaussagen ermittelt werden; in den überwiegenden Fällen zeigten die Schüler einer Klasse, die von einer Lehrkraft mit fundierteren mathematischen Kenntnissen unterrichtet wurden, auch die besseren Ergebnisse. Das zeigen die folgenden Beispiele (s. auch Abb. 54 und 55):

- Lehrkraft 23H
  Die L. wird in der Beantwortung der Situation 1 (Subtraktion) in Kategorie 2 eingeordnet. Diese Einstufung wird jedoch einerseits relativiert durch die Darstellung ihrer Antwort in Situation 2 (Multiplikation), die sie sehr verständnistief erklärt, indem sie diverse Verbindungen zu anderen mathematischen Bereichen herstellt. Dabei profitiert sie eventuell von Kenntnissen aus ihrer fachwissenschaftlichen Ausbildung (Fakultas Mathematik). In Situation 3 (Geometrie: Flächenberechnung) reagiert sie offen und schließt einen Gegenbeweis nicht aus, für den sie nach eigener Angabe jedoch mehr Zeit benötigen würde. In diese Überlegungen würde sie ihre Schüler mit einbeziehen.
- Lehrkraft 28 H
  Die L. vermischt bei der Beantwortung zu Situation 1 verschiedene Erklärungsansätze, wird daher Kategorie 2 zugeordnet. Diese Einstufung wird in der Beantwortung von Situation 2 auch nicht relativiert, da die Lehrkraft hier nur verfahrensorientierte Hilfen äußert. In Situation 3 wird die Schülerin gelobt und ihre Theorie vorbehaltlos akzeptiert.
- Lehrkraft 01 H
  Die Antworten dieser L. wurden sowohl in Situation 1 als auch 2 Kategorie 4 zugeordnet. In Situation 3 wird die Schülerin gelobt und bestärkt, „weiter so an solche Probleme heranzugehen“.

Dabei ist selbstverständlich zu beachten, dass hier nicht auf eine statistische Beweisführung, sondern lediglich auf eine anschauliche, immerhin plausible Darstellung abgehoben wird.

[85] Vergleich mit der bundesdeutschen Eichstichprobe. Prozentrang 60 bedeutet, dass 60% des

Bei einer Betrachtung der Punktzahlen in den verschiedenen Teilaufgaben schneiden die Schüler der Lehrkraft, deren Antworten am wenigsten auf ein Profound Understanding of Fundamental Mathematics schließen ließen, am schlechtesten ab.

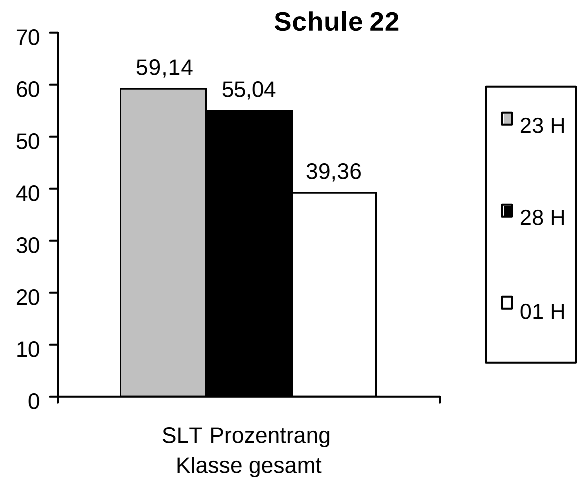


Abb. 54: Prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 22, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

Bsp.: 59,14 % der Schüler der Lehrkraft 23 H waren im Durchschnitt besser als die Schüler der Eichstichgruppe des HST 4/5.

An einer anderen Schule konnte der Verfasser zwei Lehrkräfte interviewen. In Abb. 55 erkennt man deutlich das höhere Leistungsniveau der Schüler, die von Lehrkraft 06 H unterrichtet werden. Diese vermengt zwar verschiedene Erklärungsansätze, ist aber eher in der Lage, verständnisorientierter zu unterrichten als Lehrkraft 09 H, die rein verfahrensorientierte Erklärungen gibt und hierbei auch noch Unsicherheiten erkennen lässt.

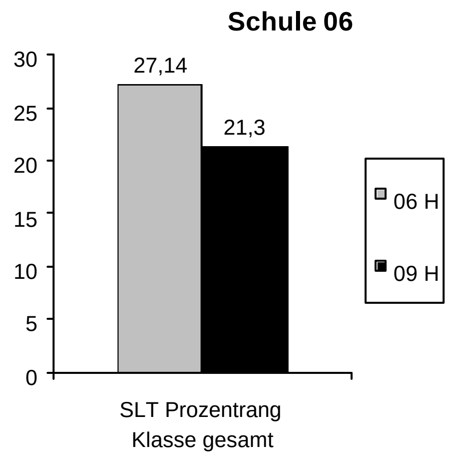


Abb. 55: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 06, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

Bundesdurchschnitts schlechter abgeschnitten haben

An den zehn Schulen, an denen der Verfasser die Möglichkeit hatte, mehr als eine Lehrkraft zu interviewen, konnte an einer Schule[86] mit drei Fachlehrkräften eine Verbindung zwischen Qualität der Lehrkraftaussagen und Schülerleistungen nur bedingt nachgewiesen werden.

An zwei Schulen konnten die Ergebnisse nicht miteinander verglichen werden; an einer der beiden[87] war eine der teilnehmenden Klassen eine Integrationsklasse, was einen Vergleich mit den Daten einer Regelklasse nicht zulässt.

An der anderen[88] waren Teilantworten der Lehrkräfte aus verschiedenen Gründen nicht bewertbar, obwohl auch hier Tendenzen ablesbar sind.

An 7 dieser Schulen[89] lässt sich beobachten, dass die Leistungen der Schüler immer bei den Lehrkräften am größten sind, deren Antworten im Interview eine größere, eher verständnistiefe Qualität erkennen ließen. Die Lehrkräfte der Schule 08 gaben beide eher verfahrensorientierte Antworten, eine von beiden arbeitet jedoch erklärtermaßen ohne Schulbuch – was auf einen besseren Überblick über die mathematischen Inhalte der Primarstufe schließen lassen könnte.

Geht man von dem ungünstigsten Fall aus, dass die Ergebnisse der Befragung an drei Schulen nicht bewertet werden können (Integrationsklasse etc.) und an einer Schule keine Zusammenhänge zwischen Antwort der Lehrkraft und Schülerleistungen festgestellt werden konnten, während dies bei 6 Schulen der Fall ist, so ist der Zusammenhang von Lehrkraftantworten und Schülerleistungen im Rahmen des HST 4/5 signifikant ($a = 0{,}0547$).

6.5 *Zusammenhang zwischen Fakultas Mathematik und Profound Understanding of Fundamental Mathematics.*

Im Rahmen der Lehrerinterviews wurden die Lehrkräfte auch nach ihrer universitären Ausbildung befragt. Zunächst ist das Fach Mathematik - einmal abgesehen von Pflichtseminaren im Bereich „Anfangsunterricht“ (dieser Begriff dürfte von Universität zu Universität und Bundesland stark differieren) - in den meisten Bundesländern keine Voraussetzung, um Lehrkraft an einer Grundschule zu werden. Nach den Einblicken in die komplexen mathematischen Zusammenhänge der elementaren Mathematik lässt dies

[86] Schule 17
[87] Schule 02
[88] Schule 10
[89] Schule 08, 18, 09, 15, 22, 06, 04

erstaunen, geht man einmal davon aus, dass ein Großteil der Lehrkräfte später ein Ordinariat übernehmen wird, in dessen Rahmen sie dann - meistens - aufgrund der wichtigen „Kernstunden“ die drei „Hauptfächer“ Deutsch, Mathematik und Sachunterricht lehren werden. Für wie viele Lehrkräfte ist diese Situation heute Alltag?
Unter den Lehrkräften, die im Rahmen der Untersuchung des Verfassers befragt wurden, fanden sich zehn, die an der Universität Mathematik als Fach studiert hatten. Bei einer Gesamtzahl von immerhin 41 befragten Lehrkräften lassen sich die so ermittelten knapp 25% durchaus als repräsentativ ansehen. Die besondere Fragestellung (2) findet hier ihre eher ernüchternde Beantwortung: Drei von vier in der Grundschule Mathematik unterrichtenden Lehrkräfte haben dies nicht als Unterrichtsfach studiert – sieht man einmal von den Pflichtstunden des „Anfangsunterrichts“ ab, die an den meisten Universitäten zum Pflichtbereich gehören mögen.
Es stellt sich die Frage, ob zwischen der besonderen fachlichen Ausbildung der Mathematiklehrer und der Qualität der gegebenen Antworten ein Zusammenhang besteht. (vgl. besondere Fragestellung 3, Kap. 5.2.). Eine Analyse der Lehrerbefragung ergibt folgendes Bild:

					Szenario 1					Szenario 2					3
Alter	Dienstzeit	Fachlehrer Mathematik	Schulbuch	Kennziffer	Kategorie 1: Verständnisorientiert korrekt	Kategorie 2: Verständnisorientiert fehlerhaft	Kategorie 3: Verfahrensorientiert	Kategorie 4: Verfahrensorientiert fehlerhaft	nicht bewertbar	Kategorie 1: Verständnisorientiert korrekt	Kategorie 2: Verständnisorientiert fehlerhaft	Kategorie 3: Verfahrensorientiert	Kategorie 4: Verfahrensorientiert fehlerhaft	nicht bewertbar	Korrigiert die Schülerin und erbringt einen Gegenbeweis
total		ja			1	6	2	1	-	5	3	2	-	-	1
35	5	ja	1	15 H	o					o					
52	30	ja	1	23 H		o				o					
47	22	ja	1	31 H		o						o			
39	11	ja	1	40 H		o					o				o
32	4	ja	2	38 H				o				o			
55	30	ja	3	04 H		o				o					
35	5	ja	3	18 H		o				o					
55	30	ja	4	02 H			o			o					
53	27	ja	4	33 H		o					o				
40	12	ja	5	19 H			o				o				
total		nein			8	11	5	5	2	8	9	10	2	2	2
43	21	nein	1	01 H				o					o		
32	4	nein	1	05 H	o					o					
54	10	nein	1	07 H					o			o			
53	33	nein	1	08 H				o					o		
60	30	nein	1	10 H	o						o				
51	28	nein	1	14 H	o					o					
52	30	nein	1	21 H			o					o			o
58	33	nein	1	22 H			o					o			
31	3	nein	1	26 H	o							o			
54	33	nein	1	28 H		o						o			
55	32	nein	1	32 H		o				o					
53	17	nein	1	35 H			o					o			
48	19	nein	1	36 H				o		o					
61	36	nein	1	37 H		o					o				
40	18	nein	2	03 H				o			o				
41	8	nein	2	06 H		o					o				
61	30	nein	2	11 H	o						o				
55	28	nein	2	12 H		o								o	
45	15	nein	2	25 H		o					o				
60	38	nein	2	29 H	o					o					
41	11	nein	2	30 H		o					o				o
41	13	nein	2	34 H		o						o			
40	14	nein	3	09 H				o				o			
52	35	nein	3	13 H	o						o				
45	23	nein	3	20 H			o					o			
35	4	nein	3	24 H		o				o					
42	10	nein	3	27 H	o							o			
49	19	nein	4	16 H		o				o					
45	18	nein	4	39 H		o					o				
46	20	nein	5	17 H					o	o					
56	30	nein	5	41 H			o							o	

Abb. 56: Kreuztabelle zur Analyse der Lehrerbefragung in Bezug auf Alter, Dienstzeit, Fakultas Mathematik, verwendetes Schulbuch und Einstufung der Antworten zu den verschiedenen Szenarien. Der Kreis (o) markiert hierbei die Zuordnung einer Lehrkraft zu einer bestimmten Kategorie. Aufschlüsselung der Ziffern in der Spalte Schulbuch: 1= Zahlenbuch; 2 = Denken und Rechnen (neueste Ausgabe); 3 = Kopien aus verschiedenen Werken/Sonstige; 4 = Mathebaum; 5 = Welt der Zahl

Zehn der 41 befragten Lehrkräfte (24,4%) gaben an, im Rahmen ihres Studiums im Fach Mathematik ausgebildet worden zu sein. Nach dem schon in den ersten Abschnitten dieses Kapitels dargestellten Analyseschema verteilen sich diese Lehrkräfte folgendermaßen auf die vier Kategorien:

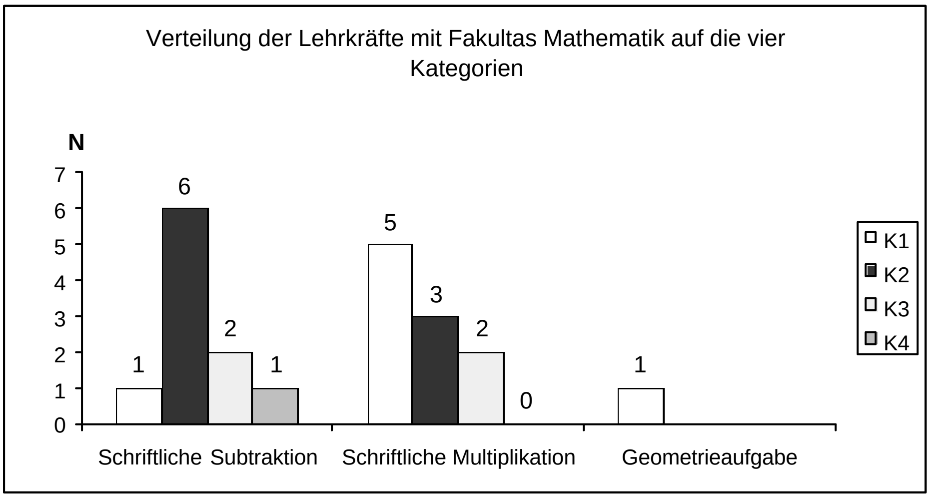


Abb. 57: Verteilung der Lehrkräfte mit Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien

K1, K2,... stehen für die vier Kategorien. Auffallend ist, dass nur die Antwort einer einzigen Lehrkraft und dies auch nur einem Szenario der Kategorie 4 zuzuordnen ist; was auf der anderen Seite allerdings auch erstaunen mag, sollte die Profession in diesem Fach diese Kategorie doch eigentlich ausschließen. Eine der Lehrkräfte, die im Rahmen der Flächenberechnung ein Gegenbeispiel einbrachte, ist ebenfalls eine „Fachlehrkraft“.

Ein Blick auf den Vergleich mit der Gruppe der Nicht-Fachlehrer mag diesen Eindruck etwas relativieren: Ein weitaus größerer Teil dieser Lehrkräfte ist in Szenario 1 zu verständnisorientierten Antworten in der Lage gewesen (vgl. Abb. 58).

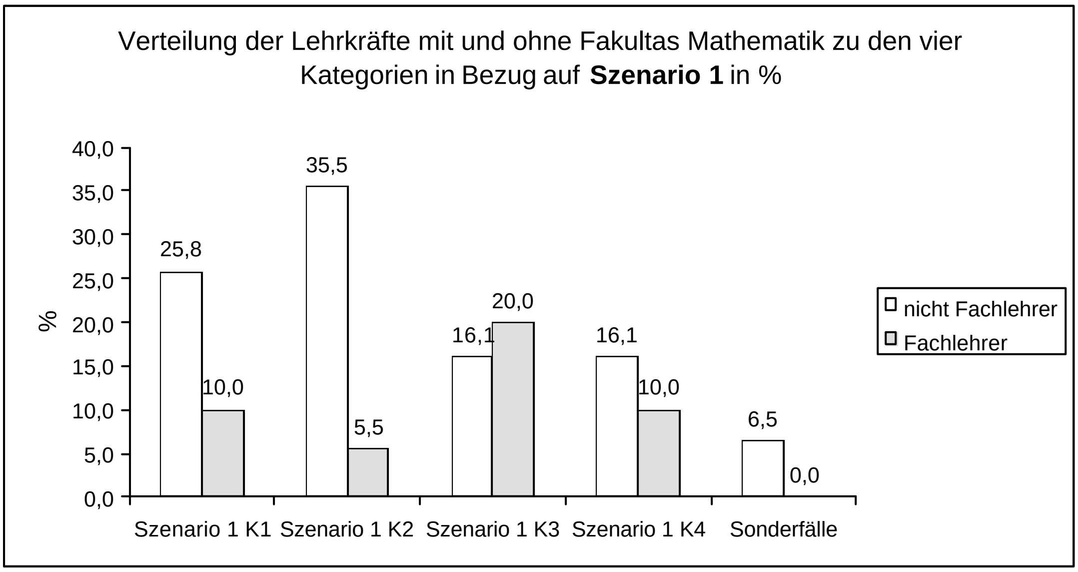


Abb. 58: Verteilung der Lehrkräfte mit und ohne Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien in Bezug auf Szenario 1 in %

Abb. 58 zeigt die Verteilung der Antworten aller 41 Hamburger Lehrkräfte auf die vier Kategorien und die Sonderfälle. Allein anhand dieser Zahlen lässt sich der Unterschied von immerhin über 15% mehr Nicht-Fachlehrer in Kategorie 1, der auf den ersten Blick erstaunen mag, nicht erklären. Hierfür wären weitere Nachforschungen notwendig und sicher wünschenswert. Genauso bemerkenswert ist, dass jeweils um die 60% Fach- und Nicht-Fachlehrer Antworten in den Kategorien 1 und 2 gegeben haben und auch die Anzahl der Antworten in den Kategorien 3 und 4 fast gleich groß ist.
Die Antworten zu Szenario 2 stellen sich folgendermaßen dar:

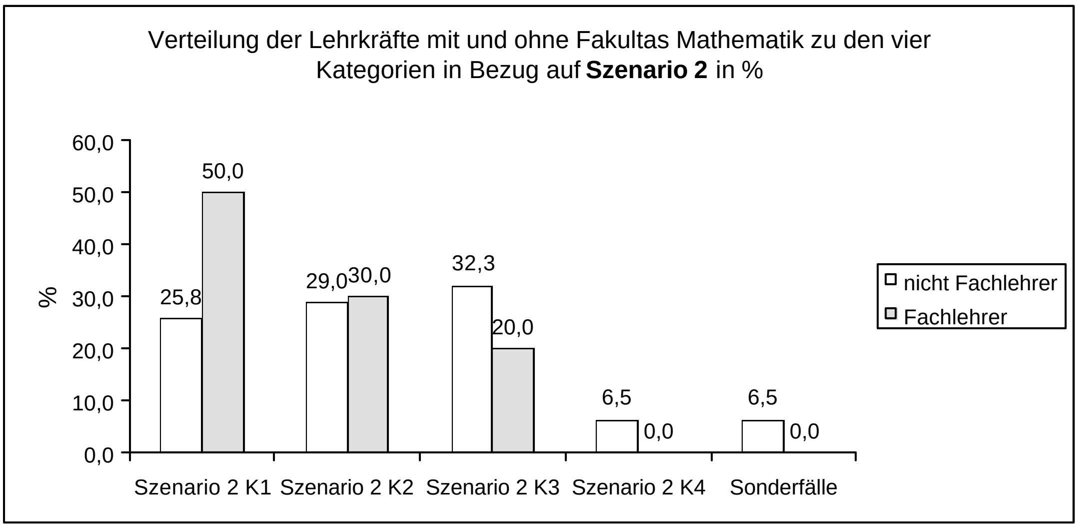


Abb. 59: Verteilung der Lehrkräfte mit und ohne Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien in Bezug auf Szenario 2 in %

Hier ergibt sich ein Bild, wie man es aufgrund der mathematischen Vorbildung von Fachlehrkräften eigentlich erwarten würde: Vor allem die Fachlehrer (fast 50% der 10

Lehrkräfte) geben Antworten im Bereich der Kategorie 1. Die Anzahl der Antworten von Fachlehrkräften nimmt von Kategorie zu Kategorie ab, die Zahlen der Nicht-Fachlehrkräfte sind genau gegenläufig. Schließlich finden sich in Kategorie 4 überhaupt keine Antworten von Fachlehrkräften mehr.

Die prozentualen Angaben mögen die tatsächlichen Zahlen etwas verwischen. Um hier einen neutralen Vergleich darstellen zu können, hätte es einer viermal so großen Gruppe von Fachlehrkräften bedurft. Ein Blick auf die totalen Zahlen (N=41), im Folgenden für die Antworten zu Szenario 1, verschafft einen Blick für die tatsächlichen Zahlenverhältnisse.

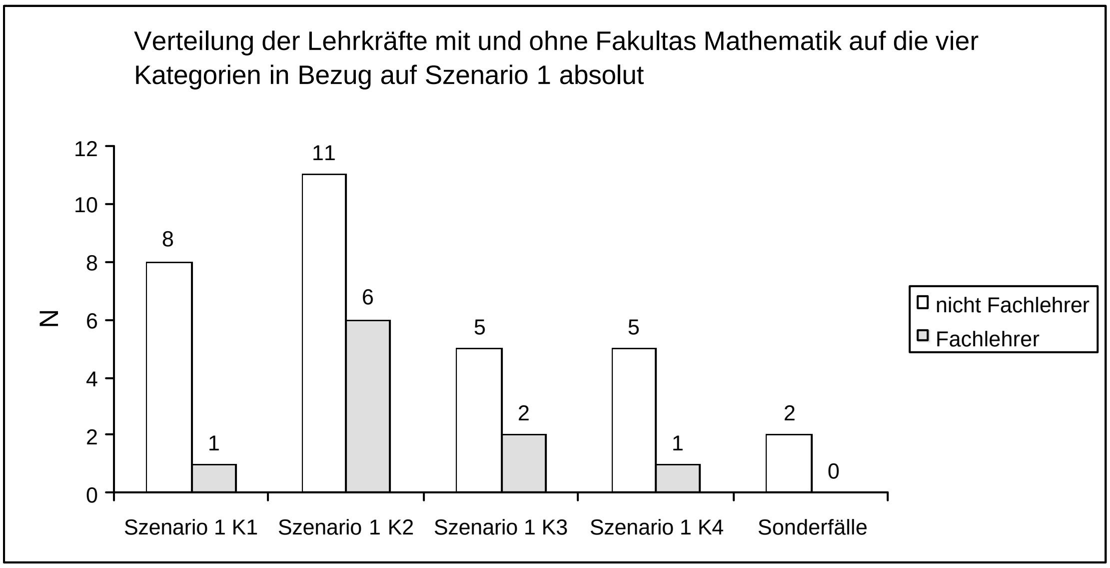


Abb. 60: Verteilung der Lehrkräfte mit und ohne Fakultas Mathematik auf die vier Kategorien in Bezug auf Szenario 1 absolut

Es bleibt also Spekulation, wie die Verteilung ausgesehen hätte, wäre die Gruppe der Fachlehrkräfte genauso groß gewesen wie die der Nicht-Fachlehrkräfte. Auf jeden Fall reicht die Zahl von zehn Lehrkräften mit Fakultas Mathematik vor allem bei der vorliegenden Streuung nicht aus, um eine statistisch signifikante Aussage treffen zu können.

Wie in Abb. 56 erkennbar, lässt auch ein Vergleich von Alter der befragten Lehrkräfte oder verwendetem Schulbuch mit den Antworten der Lehrkräfte keine signifikanten Zusammenhänge erkennen. Ein Fokus auf Schulbuch und zugeordnete Kategorie mag dies verdeutlichen (Abb. 61). So scheint z.B. auf den ersten Blick ein bemerkenswert großer Teil der Lehrkräfte, die mit dem Zahlenbuch arbeitet, auch eher verständnisorientierte Antworten zu geben, ein Blick auf die Zahlenverhältnisse relativiert jedoch diesen Eindruck sofort: Der Anteil an Lehrkräften, die in Bezug auf Szenario 1 eher verständnisorientierte Antworten geben und gleichzeitig das Zahlenbuch verwenden, ist gegenüber denen, die eher verfahrensorientiert antworten, zwar doppelt so groß, doch entspricht dies auch dem in Abb. 38 dargestellten allgemeinen Verhältnis und verliert somit jegliche Aussagekraft. Ein demgegenüber ungleiches Verhältnis bei den Lehrkräften, die das Lehrwerk „Denken und Rechnen" verwenden (2:5:0:2), hat aufgrund der Gesamtzahl der Lehrkräfte bezogen auf die einzelnen Kategorien (nur 2 in der Kategorie 1) keinerlei statistische Aussagekraft.

	Szenario 1					Szenario 2					Flächenberechnung
	Kategorie 1: Verständnisorientiert korrekt	Kategorie 2: Verständnisorientiert fehlerhaft	Kategorie 3: Verfahrensorientiert	Kategorie 4: Verfahrensorientiert fehlerhaft	nicht bewertbar	Kategorie 1: Verständnisorientiert korrekt	Kategorie 2: Verständnisorientiert fehlerhaft	Kategorie 3: Verfahrensorientiert	Kategorie 4: Verfahrensorientiert fehlerhaft	nicht bewertbar	Korrigiert die Schülerin und erbringt einen Gegenbeweis
Zahlenbuch	5	6	3	3	1	6	3	7	2	0	2
Denken und Rechnen	2	5	0	2	0	1	5	2	0	1	1
Mathebaum	0	3	1	0	0	2	2	0	0	0	0
Welt der Zahl	0	0	2	0	1	1	1	0	0	1	1
Zusammenstellungen aus verschiedenen Werken	2	3	1	1	0	3	1	3	0	0	0

Abb. 61: Anzahl der Lehrkräfte, die ein bestimmtes Schulbuch verwendet haben, im Vergleich zur zugeordneten Kategorie.

Gleichwohl kann die Tatsache, dass kein Zusammenhang feststellbar ist, für sich genommen wiederum als ein bemerkenswertes Resultat der Untersuchung gedeutet werden. Offenbar scheint es für die Qualität des Unterrichts nicht ausschlaggebend zu sein, welches Lehrwerk verwendet wird - geht man einmal davon aus, dass der von den Lehrkräften geplante Unterricht maßgeblich vom Lehrwerk beeinflusst wird. Auf der anderen Seite wird anhand dieses Untersuchungsergebnisses der Vermutung, die bereits in Abschnitt 6.2.1. vom Verfasser geäußert wurde, neue Nahrung gegeben: Es findet sich die Tendenz bestätigt, dass sich eine Vielzahl von Lehrkräften offenbar mehr von ihrem in ihrer eigenen Schulzeit erworbenen Faktenwissen leiten lässt, als von dem, welches in den Lehrerhandreichungen dargeboten wird.

Reichen die hier gewonnen Daten auch nicht aus, um signifikante Zusammenhänge ermitteln zu können, so reichen sie doch hin, auf den großen fachdidaktischen Forschungsbedarf, der auf diesem Feld besteht, hinzuweisen. Unter diesem Gesichtspunkt sei auch das folgende Kapitel zu verstehen, dass sich eingehender mit der Qualität von Unterrichtswerken befasst. Eine vollständige, umfangreich theoriebasierte Auswertung der in Deutschland zur Verfügung stehenden Unterrichtswerke stellte für sich genommen schon eine eigenständige, aufwendige Untersuchung dar. Die in Kapitel 7 dargestellten Analysen sind daher eher als Hinweis auf sich offenbar lohnende, detaillierte Nachfolgeuntersuchungen zu verstehen.

7 Die fachdidaktische Qualität von Lehrerhandbüchern zum Mathematikunterricht

Ein sehr großer Teil der Lehrkräfte, die in der Grundschule Mathematik unterrichten, hat seine fachlichen Kenntnisse nicht im Rahmen der Lehrerausbildung – sei es an der Universität oder sei es im Rahmen des Referendariats im begleitenden Studienseminar – erworben. Neben eventuellen Fortbildungen, die vor dem Hintergrund heutiger Einsparmaßnahmen selten geworden sind, bieten lediglich Beratungsgespräche mit Kollegen oder das Selbststudium mit Hilfe didaktisch-methodischer Literatur die Möglichkeit, einen tieferen Einblick in das Fach Mathematik zu gewinnen.

Zu einem Dilemma kann sich hier die fehlende Einsicht entwickeln, dass man eine Fortbildung überhaupt nötig hat. Die in der Schule selbst gelernte Rechenfertigkeit und das "Beherrschen" einiger Algorithmen in Zusammenhang mit einigen gelungenen Illustrationen in den Schulbüchern können durchaus dazu verleiten, an ein eigenes "Können" zu glauben. In diesem Fall mag auch die Motivation fehlen, sich mit Kollegen über Unterrichtsinhalte auszutauschen oder besser noch, über "richtig" und "falsch" mit Hilfe entsprechender Fachliteratur zu diskutieren.

Untersuchungen über die Form, in der fehlende fachwissenschaftliche Grundbildung von Mathematiklehrern nachgeholt oder zumindest teilweise kompensiert wird, sind nicht bekannt. Die naheliegendste Variante ist denn auch die Vorbereitung von Unterrichtsstunden mit Hilfe der schülerbuch-begleitenden Lehrerhandbücher oder "Methodisch-didaktischen Kommentare". Hier finden in Deutschland Lehrer allerdings eine breite Auswahl an Veröffentlichungen. Allein in der Bibliothek des Instituts für Lehrerfortbildung in Hamburg lagen 11 aktuelle Lehrwerke neuerer Zeit von verschiedenen Verlagen aus.

Doch ist nach aller Erfahrung anzunehmen, dass sich die wenigsten Kollegen abstimmen und eingehend beraten, welches der Lehrwerke eine gute Basis für verständnisorientierten Unterricht bietet. Im Schulalltag spielen oft andere Dinge eine wichtigere Rolle: Welches Lehrwerk ist an der Schule vorhanden (das, was vor zwei Jahren von einem Vorgänger angeschafft worden war)? Wie viel Geld steht für die Beschaffung neuer Bücher zur Verfügung – kann man sich ein bestimmtes Lehrbuch kaufen? Oder bekommt man von einem Verlag vielleicht auf ein bestimmtes Buch einen besonderen Rabatt? Ist der Vertreter besonders sympathisch und kann das Buch besonders gut "verkaufen"? Ist die Aufmachung ansprechend und schülergemäß? Sind genügend Übungsaufgaben ("Päckchen") enthalten? Vor allem die letzte Frage ist oft zu hören von Lehrkräften, die sich noch nicht tiefgehend mit elementarer Mathematik beschäftigt haben.

Im Umkehrschluss bedeutet dies: Die Qualität der didaktischen Entscheidungen einschließlich der Güte der Erklärungen von Lehrkräften für die Schüler hängt wahrscheinlich zu einem großen Teil von der Qualität der sogenannten didaktisch-methodischen Kommentare ab.

Andere Länder (z.B. China) oder Regionen anderer Länder (z.B. Zürich/Schweiz) lassen keine freie Lehrmittelwahl zu. In Zürich ist beispielsweise ein Lehrbuch für alle Schulen verbindlich vorgeschrieben. Dieses ist dafür auch mit großer Sorgfalt entworfen, eingehend kritisch geprüft und mit einem Lehrerbegleitband versehen, der auch unerfahrenen Lehrern gute Möglichkeiten zum Selbststudium bietet.

An dieser Stelle an die Ergebnisse der eigenen Untersuchung zur fachlichen und didaktisch-methodischen Kompetenz von Grundschul-Mathematiklehrern anknüpfend, erscheint es aufschlussreich, die Qualität vorliegender Handreichungen (im Sinne eines Ersatzes für die fehlende fachwissenschaftliche Grundqualifizierung) zu prüfen. Schließlich ist davon auszugehen, dass ein nicht unerheblicher Teil der befragten Lehrer über diesen Umweg im Selbststudium fehlende fachliche Grundbildung kompensiert hat. Dazu mag es genügen, die Analyse von Lehrerhandbuch-Erklärungen inhaltlich und objektzahlenmäßig einzugrenzen. Inhaltlich richtet sich die Untersuchung auf die schriftliche Subtraktion als Thema der dargestellten Erhebung zum Unterrichtskonzept, formal auf die 11 Lehrwerke, die im Institut für Lehrerfortbildung in Hamburg (Stand November 2000) vorgehalten werden. Diese Teiluntersuchung trägt eher vorwissenschaftlichen Charakter. Sie könnte allerdings Anlass für eine tiefergehende, intensivere und umfassendere Untersuchung geben.

7.1 Analyse

Die methodisch-didaktischen Kommentare zur schriftlichen Subtraktion der vorliegenden Lehrerhandbücher wurden unter folgenden Fragestellungen ausgewertet:

1. Nennen die Autoren fachliche Voraussetzungen, über die die Schüler mit dem Ziel der Vermittlung eines „Profound Understanding of Fundamental Mathematics“ verfügen müssen? Wenn ja, reichen diese aus, um einer Lehrkraft ohne tiefgehendes Verständnis die Möglichkeit zu geben, sich die Grundlagen für „gute“ Erklärungen zu erarbeiten?
2. Welches Verfahren wird primär vermittelt (gleichsinniges Ergänzen, Auffüllen u.s.w.)? Wie wird der darin enthaltene Übertrag hergeleitet?
3. Bietet das Lehrwerk Alternativen zum primär vermittelten Verfahren an (um den Schülern oder dem Lehrer z.B. einen tieferen Einblick in die Bedeutung der Stellenwerte zu geben)?
4. Heben die Erläuterungen im Lehrerhandbuch auf ein tiefes Verständnis ab oder bleiben sie eher (oberflächlich) handlungsanweisend?
5. Wie sind die Erklärungen auf den Schülerbuchseiten gestaltet? Kann ein Schüler mit ihrer Hilfe eventuelle Verständnislücken aus dem vormittäglichen Unterricht in Hausarbeit schließen?
6. Gibt es Widersprüche oder sogar fehlerhafte Darstellungen in den Erklärungen für die Lehrer?

Jedes der 11 Lehrwerke wurde nach diesen 6 Kriterien analysiert und beurteilt. Die Analyseergebnisse sind in Form einer Tabelle im Anhang 5 zusammengefasst und werden aus Gründen der Übersichtlichkeit an dieser Stelle nicht wiedergegeben. Die Tabelle wird im Folgenden interpretiert; dabei werden auffällige Ergebnisse besonders erörtert.

7.2 *Auswertungsergebnisse*

7.2.1 Verschiedenartigkeit der Verfahrensauswahl

Bei der Analyse der Lehrwerke[90] fällt als erstes eine gewisse Heterogenität der Darstellungen und Erklärungswege auf:

- 7 Lehrwerke vermitteln das Ergänzungsverfahren und den Übertrag mit Hilfe des gleichsinnigen Ergänzens.
- 4 stellen den Algorithmus mit Hilfe des Ergänzungsverfahrens dar, erklären den Übertrag jedoch mit Hilfe der „Auffülltechnik“
- 2 Lehrwerke nennen das Abziehverfahren als Möglichkeit zur Vermittlung des Algorithmus und erklären den Übertrag mit Hilfe des Eintauschens in niedrigere Wertebenen.
- 9 Lehrwerke beschränken sich auf die Darstellung eines einzigen Lösungsweges, während
- 2 Lehrwerke eine Alternative nennen.

Abgesehen davon, dass die Lehrwerke in ihrer Gesamtheit ein sehr heterogenes Bild bieten, weil die Auswahl des vermittelten Verfahrens von Werk zu Werk variiert, fällt vor allem die Homogenität in der *Anzahl* der dargestellten Verfahren auf: Mehr als vier Fünftel der untersuchten Lehrwerke beschränken sich auf die Vermittlung nur eines Lösungsweges! Lediglich zwei stellen Alternativen bereit, wobei nur ein einziges (Lorenz 2002) auch zu der Alternative verständnisorientierte Erklärungen bereit hält.

7.2.2 Güte der methodisch-didaktischen Kommentare

Auch in der Güte der methodisch-didaktischen Kommentare sind deutliche Unterschiede zu erkennen:

- 2 der lehrwerkbegleitenden Kommentare benennen ausreichend von den Schülern benötigte Vorkenntnisse,
- 4 nennen Vorkenntnisse, jedoch nicht vollständig,
- In 5 fehlt jedwede Angabe über die von den Schülern benötigten Vorkenntnisse,

[90] eine detaillierte Auflistung der Buchtitel sowie deren Qualitätsmerkmale in bezug auf die schriftliche Subtraktion befindet sich in Anlage 5

- 3 Lehrerhandbücher beinhalten gute, verständnistiefe und ausführliche, gut nachvollziehbare Erklärungen zum Verständnis des Algorithmus,
- 8 geben nur allgemeine methodisch-didaktische Hinweise oder konkrete Handlungsanweisungen
- In 5 finden sich widersprüchliche Darstellungen oder sogar sachliche Fehler.

7.2.3 Lehrwerke mit enthaltenen verständnistiefen Erklärungen

In nur 3 Lehrerhandbüchern findet man Texte oder Darstellungen, die es einer Lehrkraft ermöglichen, auf der Basis nur dieses Lehrerhandbuches ein tieferes Verständnis des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion zu erlangen.
Ein Beispiel hierfür sollen die Ausführungen in dem Lehrerbegleitband des Lehrwerkes „LolliPop - Mathematik 3“ sein (vgl. Eccarius/Kurhofer/Manthey/Quandt 2001).
In den fachlichen und methodischen Vorüberlegungen (vgl. ebenda, S. 186) werden zunächst die Verständnis- und Wissensvoraussetzungen genannt, über die die Schüler verfügen sollten, bevor die Lehrkraft beginnen kann, den Algorithmus zu vermitteln:

a) *Kenntnisse über das dekadische Stellenwertsystem,*
b) *Sicherheit im Einspluseins,*
c) *die Kenntnis des Ergänzens als ein Aspekt der Subtraktion,*
d) *die Kenntnis des Gesetzes von der Konstanz der Differenz. (Wenn beide Zahlen um den gleichen Wert erhöht werden, ändert sich der Unterschiedsbetrag nicht.)*

(ebenda, S. 186)

Schon an dieser Stelle wird deutlich, dass das Lehrwerk auch bei den Erklärungen für die Hand des Lehrers auf Verständnisorientierung großen Wert legt. Auch Fachbegriffe wie „Konstanz der Differenz“ werden noch einmal erläutert.
Im Anschluss an die genannten Voraussetzungen steht eine sehr detaillierte Schilderung der Funktionsweise des Algorithmus:

> *„Die unter d) genannte Gesetzmäßigkeit findet ihre Anwendung in der schriftlichen Subtraktion beim Ergänzen zu einer kleineren Zahl im Minuenden und führt zum Übertrag. Kann nämlich eine Ergänzung (innerhalb einer Stelle) nicht erfolgen, weil die Zahl, zu der ergänzt werden soll, zu klein ist, erhöht man beide Ausgangszahlen um den gleichen Betrag, allerdings nicht in der gleichen Stelle. So wird erreicht, dass eine stellenweise Ergänzung doch erfolgen kann.“* (ebenda)

Besonders hilfreich für ein gutes Verständnis ist in dieser Erklärung die deutliche Trennung zwischen Zahl und Stellenwert. Der Lehrkraft wird noch einmal deutlich vor Augen geführt, dass vom Subtrahenden aus die ganze Zahl stellenweise ergänzt wird und nicht innerhalb von Spalten von einer Zahl zur nächsten.
Im Anschluss an allgemeine Erläuterungen findet man ein Beispiel zur Verdeutlichung. Interessant ist, dass dieses Beispiel in der Ich-Form geschrieben ist. Dies ermöglicht eine direkte Übertragung der Formulierung in eine Unterrichtssituation und sichert ein schnelles Verständnis seitens der Lehrkraft. Beispiel (ebenda):

Schließlich findet sich am Schluss aller Erläuterungen noch ein Literaturhinweis, mit

10

4
7
2

-
3
4
9

1

1
2
3

9 plus ? gleich 2 geht nicht. Ich erweitere die obere Zahl in der Einerspalte mit 10.
Jetzt rechne ich 9 plus **3** gleich 12. Ich schreibe 3.
Damit der Unterschied zwischen beiden Zahlen gleich bleibt, muss ich auch in der unteren Zahl um 10 erweitern. Das tue ich, indem ich einen Zehner hinzufüge (übertrage).

In der Zehnerspalte rechne ich jetzt: 1 plus 4 gleich 5 plus **2** gleich 7. Ich schreibe 2. Die Hunderter sind problemlos durch einfaches Ergänzen zu ermitteln: 3 plus **1** gleich 4. Ich schreibe 1.

dessen Hilfe man die gewonnenen Kenntnisse der schriftlichen Subtraktion noch weiter vertiefen kann.
Auf den folgenden Seiten des Lehrerhandbuches finden sich passend zu einer methodischen Anleitung die Abbildungen der Schülerbuchseiten in verkleinerter Form. Sie zeigen ikonische und darauf bezogene formal-abstrakte Darstellungen, die der Lehrkraft und vor allem später auch dem Schüler zusätzlich helfen, die Erklärungen zu verstehen. In Tabellen, die mit Spielgeld ausgelegt sind, ist zunächst die schriftliche Subtraktion durch Ergänzen ohne Übertrag dargestellt, später mit Übertrag. Dabei ist deutlich zu erkennen, wie der Übertrag durch gleichsinniges Ergänzen entsteht:
Erfreulicherweise finden sich auch auf den Schülerseiten selbst einfache, kurze Erklärungen, die den Kindern bei der Hausarbeit das Nachvollziehen des Erlernten erleichtern.
Auf den folgenden Seiten wird alternativ noch das Ergänzungsverfahren mit Hilfe der Entbündelung eines Stellenwertes vorgestellt.

7.2.4 Beschränkung methodisch-didaktischer Kommentare auf direkte Handlungsanweisungen

In 3 (Mathematik 3, Mathematikus 3, Xalando) Lehrerhandbüchern ist der methodisch-didaktische Kommentar auf eine direkte Handlungsanweisung zur Vermittlung beschränkt. Ein Beispiel (Keller/Pfaff 2003 – Mathematik 3):

> ***Erarbeitung***
> ***Erste Stufe***
> *Aufgabe 1 wird mit Demonstrationsgeld (o.ä. Material) an der Tafel erarbeitet. Dabei tritt das Problem auf, dass man 8 DM nicht zu 4 DM ergänzen kann. Lösungsvorschläge werden diskutiert, wobei vom Ergänzen nicht abgewichen werden darf. Wenn die Lösung nicht von den Schülern vorgeschlagen wird, muss sie vom L. erfolgen:*
> *In **beiden** Zahlen werden 10 DM hinzugefügt, bei der oberen Zahl als 10 Markstücke, bei der unteren Zahl als Zehnmarkschein. Das Ergebnis bleibt gleich (gleichsinniges Verändern: Konstanz der Differenz). Die Aufgabe kann jetzt bei den dargestellten Zahlen gelöst werden. Auf der Zahlenebene wird der Erweiterungsvorgang analog notiert (vgl. Seite 62), bei den Einern +10 und bei den Zehnern +1.*
>
> ***Zweite Stufe***

Aufgabe 2 wird gemeinsam gelöst (Schüler an den Tischen mit Material, L. zur Kontrolle an der Tafel).

Ein Hinweis auf benötigte Voraussetzungen fehlt. Darüber hinaus wäre es hilfreich, wenn mögliche Lösungsvorschläge, die von den Schülern diskutiert werden sollen, zuvor der Lehrkraft in verschiedenen Varianten vor Augen geführt würden.
Dies würde ihr über die Möglichkeit, das Klassengespräch besser zu führen, hinaus noch einen tieferen Einblick in das Konzept des Algorithmus eröffnen. Zudem könnte sie auf „andere“ Lösungen, die manchmal von Kindern über ihr Elternhaus vorgestellt werden, besser reagieren. Und schließlich ist von „der“ Lösung die Rede, die von der Lehrkraft genannt werden soll. Dies suggeriert unerfahrenen Unterrichtenden, dass es tatsächlich nur einen Lösungsweg gibt.
Die Seiten im Schülerbuch beinhalten zwar auch eine ikonische (Geld) und formal-abstrakte Darstellung, eine verbale Erklärung für die Schüler fehlt jedoch. Die Funktionsweise des Algorithmus zu Hause nachzuvollziehen, wenn sie im Unterricht noch nicht richtig verstanden wurde, wird dadurch erschwert. Auch die Lehrkraft erhält durch die Schülerbuchseite nur beschränkt Hilfe zur Erklärung des Algorithmus.

7.2.5 Betonung der verfahrensorientierten Vermittlung.

Gegenüber jenen im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Werken, in denen vor allem direkte Handlungsanweisungen zu finden sind, gehen einige Lehrbuch-Autoren noch weiter und betonen ausdrücklich die verfahrensorientierte Vermittlung. So heißt es z.B.:

„Jedes Abweichen von diesem vorgeschriebenen, formalisierten Lösungsweg führt zu Fehlern. Aus diesem Grunde ist darauf zu achten, dass die Schreib- und Sprechweise penibel eingehalten wird. Abweichungen sind auch „genialen“ Schülern nicht zuzugestehen.“
(ebenda, S. 181)

Derlei Anweisungen finden sich in 3 Lehrerhandbüchern. In Kombination mit einer nicht ausreichenden verständnistiefen Erklärung wird eine Lehrkraft in diesem Fall nach Einschätzung des Verfassers geradezu angehalten, den Algorithmus verfahrensorientiert zu vermitteln.

7.3 *Zusammenfassung*

Neben einer gewissen Vielfalt der Verfahren, die in den Lehrwerken zur Vermittlung durch die Lehrkraft angeboten werden - jedoch pro Lehrwerk überwiegend nur eines - lässt sich feststellen, dass 8 von 11 Lehrwerken nur bedingt für eine Lehrkraft geeignet sind, sich ein tieferes Verständnis des Algorithmus anzueignen.
Die Texte und Darstellungen in den Büchern fallen derart unterschiedlich aus, dass es leicht zu Missverständnissen kommen kann, wenn sich zwei Lehrkräfte über ihr Wissen austauschen, jedoch unterschiedliche Lehrwerke benutzen.
An dieser Stelle lässt sich schon einmal auf ein Ergebnis der eigenen Untersuchung verweisen, hier bezüglich der Erklärungsvarianten durch die Lehrkräfte (Kapitel 6.1.1). Ein großer Teil der Lehrkräfte verwendet den Begriff des „Borgens“, erklärt also den Übertrag mit Hilfe des Eintauschens von Werten einer nächsthöheren Ebene. Diese Technik wird jedoch nur von zwei Lehrwerken dargestellt (LolliPop, Mathematikus 3), die zudem von keiner Lehrkraft als „ihr“ Lehrwerk genannt wurde.
Es ist zu vermuten, dass ein großer Teil der Lehrkräfte in erster Linie sein als Schüler erworbenes Wissen nutzt, um den Algorithmus zu erklären. Damit wird allerdings der fachwissenschaftliche Fortschritt ausgeblendet, wenn nicht ignoriert. Zu Recht wenden Radatz und Schipper ein:

> *"Als Lehrer(in) sollte man Abstand gewinnen von seinen eigenen Grundschulerfahrungen in Mathematik, die überwiegend doch nichts anderes beinhalten als das Lernen von rechnerischen Begriffen und Techniken." (Radatz/Schipper 1983, S. 21)*

Nimmt man die 11 Handbücher also insgesamt in den Blick, so ist das Ergebnis zur Erklärungsqualität der fachlichen Zusammenhänge zumindest am Beispiel der untersuchten Subtraktion ernüchternd. Lediglich 3 Büchern ist zuzugestehen, dass sie einen verständnisorientierten Ansatz pflegen. Die große Mehrzahl der untersuchten Bücher jedenfalls vermag nicht auszugleichen, was eine fachwissenschaftliche Grundlegung über Studium und Referendariat zu leisten vermag[91]. Sie bieten ansatzweise methodische Hilfen, informieren über einen fachwissenschaftlichen Erklärungsansatz und sind damit auf einem eher pragmatisch zu nennenden denn als fachwissenschaftlich fundiert zu bezeichnenden Niveau anzusiedeln.

---

[91] Dabei wird unterstellt, dass das Studium praxisorientiert gestaltet wird und einen reflektierten Umgang mit Theorie einschließt, wie Czerwenka und Nölle als Realisierungsbedingung für professionelle Lehrerkompetenz nachgewiesen haben (2003). Ihre Befunde zum methodischen Wissen dürften durchaus auf das hier betrachtete Fachwissen zu übertragen sein.

8 Zusammenfassung der wesentlichen Erkenntnisse und Resumée

8.1 Die wesentlichen Erkenntnisse im Überblick

Die Ergebnisse der drei internationalen Vergleichsstudien TIMSS, PISA und IGLU haben den deutschen Schülern, im Vergleich zu ihren Mitschülern aus anderen Ländern, im Bereich der mathematischen Grundbildung unterdurchschnittliche Leistungen bescheinigt. In einer breiten öffentlichen Diskussion wird seitdem nach Ursachen gesucht und werden Vorschläge diskutiert, die einen Weg aus dem Bildungstal zeigen sollen.

An diese Diskussion knüpft die vorliegende Arbeit an. Der Verfasser ist selbst als Lehrer an einer Grundschule tätig und wirft vor dem Hintergrund der in Kapitel 1 dargestellten Forschungsergebnisse die Frage auf, wie die Unterrichtsqualität an deutschen Schulen, die für den Unterrichtserfolg und somit die Leistungen der Schüler fraglos den entscheidenden Beitrag leistet, verbessert werden kann. Er konzentriert sich dabei auf den Bereich, den er als Lehrkraft maßgeblich selbst beeinflussen kann - Unterricht – und untersucht in diesem Kontext das Fachwissen des Lehrers als Voraussetzung für „guten“ Unterricht, seinerseits Voraussetzung für „gute“ Schülerleistungen.

„Gute“ Schülerleistungen werden neben einer Reihe äußerer Faktoren wie etwa Motivation der Schüler, soziales Umfeld u.a. maßgeblich durch „guten“ Unterricht bestimmt, in dessen Zentrum - nicht zuletzt deshalb, weil Unterricht einen interaktiven Prozess darstellt, der von Menschen für und mit Menschen gestaltet wird - wiederum die Lehrkraft steht.

In Kapitel 2 wurde daher der Frage nachgegangen, welche Kriterien eine „gute“ Lehrkraft erfüllen muss, um als solche zu gelten. Mit dieser Frage beschäftigt sich die fachwissenschaftliche Diskussion schon seit geraumer Zeit, eine Fülle von Studien- und Untersuchungsergebnissen bezeugen die intensive Suche nach „dem“ Lehrer. Demnach verfügt eine gute Lehrkraft über besondere Selbst- und Sozialkompetenzen sowie über spezielle didaktische Kompetenzen, die sie zum „Experten für die Gestaltung ergiebiger Lernprozesse“ machen.
Als „state of the art“ gelten auch heute noch die von Brophy & Good (1986) als Ertrag der internationalen Forschung zusammengetragenen 23 Kriterien der „teacher effectiveness“. Das Resümee des Kapitel 2 mag erstaunen: Nur wenige Studien fokussieren das Fachwissen, nimmt es doch als Bestandteil der „didaktischen Kompetenz“ neben

dem „methodischen Wissen“ einen nicht zu vernachlässigenden Platz ein. Vielmehr wird es in den meisten Fällen als selbstverständlich vorausgesetzt - und deshalb zu wenig beachtet, wenn nicht gar übersehen.

In Kapitel 3 wurde daher die Bedeutung eines profunden Fachwissens herausgearbeitet. Dazu wurde zunächst die Frage beantwortet, wie Schüler effektiv und nachhaltig lernen: Es ist das tiefgehende, möglichst weit und vielfältig vernetzende, *verstehende* Lernen, das ein ebensolches Wissen schafft (Ausubel).
Es spricht vieles dafür, dass tiefes Fachwissen nur der erzeugen kann, der selbst darüber verfügt. Der Nachweis konnte darüber bislang offenbar nicht geführt werden, möglicherweise wird auch das fehlende Fachwissen durch intelligente Methodik mindestens kompensiert, wenn nicht gar überkompensiert (vgl. das entsprechende Resumée von Helmke 2004, S. 59 f.). Vor diesem Hintergrund konzentriert sich der Verfasser in Kapitel 3 zunächst auf eine Entwicklung, schließlich auf die Definition eines verständnisorientierten Lernbegriffs. Dieser bleibt auf den Fokus der Arbeit, das mathematische Fachwissen von Grundschullehrkräften begrenzt: das „profunde“ oder „tiefgehende Verständnis elementarer Mathematik“ (Profound Understanding of Fundamental Mathematics, **PUFM**).

Lehrkräfte mit profundem Verständnis elementarer Mathematik verfügen nicht nur über eine tiefe Einsicht in mathematische Strukturen und Verbindungen, sie sind darüber hinaus auch in der Lage, mathematisch-charakteristisch zu arbeiten und sich dementsprechend systematisch bislang unbekannten (mathematischen) Problemstellungen zu nähern.
Die in der eigenen Untersuchung vorgenommene Evaluierung des mathematischen Wissens von Lehrkräften richtet sich auf das Fachwissen in den primarmathematischen Bereichen „schriftliche Subtraktion“, „schriftliche Multiplikation“ und „Flächenberechnung“ (Geometrie). Die fachwissenschaftlichen Grundlagen hierfür werden in Kapitel 4 referiert. Dabei wird zunächst die Komplexität der Grundlagen zum tiefen Verständnis der verschiedenen Algorithmen der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation vor Augen geführt. Die Darstellungen zur Flächenberechnung holen dagegen fachwissenschaftlich nicht so weit aus. Vielmehr wird hier der zweite Aspekt des PUFM betont: die Herangehensweise an ein bislang unbekanntes Problem. Eine (gedachte) Schülerin stellt eine Hypothese über den Zusammenhang von Umfang und Fläche eines Rechtecks auf. Mögliche Reaktionen und Erklärungen zu dieser fiktiven Situation und eine Kategorisierung derselben in verschiedene „Stufen des Verstehens“ sollen reflektie-

rendes, systematisches - mathematisches - Handeln, eine Komponente des PUFM, verdeutlichen.

Kapitel 5 und 6 sind der eigenen Untersuchung gewidmet. Vor dem Hintergrund der in Kapitel 2 herausgearbeiteten Merkmale des „guten“ Lehrers werden die zentralen Fragestellungen der Untersuchung in Form von Hypothesen formuliert:

- Wie viele Lehrkräfte, die in einer Grundschule Mathematik unterrichten, verfügen über ein profundes Verständnis elementarer Mathematik?
- Unterscheidet sich das Wissen Hamburger Grundschullehrkräfte von dem ihrer Schweizer (Züricher) Kollegen?
- Reagieren die Lehrkräfte auf eine bislang unbekannte (mathematische) Problemstellung reflektierend und systematisch und lassen somit eine wichtige Teilkomponente des PUFM erkennen?

Im Anschluss an die Interviews der Lehrkräfte wurden in Hamburg die jeweiligen Schüler getestet. Erhebungsinstrument war der sogenannte „Hamburger Schulleistungstest HST 4/5“. Ausgehend von der Überlegung, dass „profundes Fachwissen“ eine der Voraussetzungen „guten“ Unterrichts ist, wird daher in Kapitel 5 eine besondere Fragestellung formuliert:

- Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Antworten der Lehrkräfte und den Leistungen der Schüler? Lässt sich daraus ein Zusammenhang zwischen dem Fachwissen der Lehrer und dem Verständnis der Schüler begründen?

Die in Kapitel 6 dargestellten Ergebnisse lassen eher ernüchtern. Sowohl in Hamburg als auch in Zürich ist nur der weitaus kleinere Teil der Lehrkräfte zu einer Erklärung zum Algorithmus der schriftlichen Subtraktion im Sinne eines Profound Understanding of Fundamental Mathematics in der Lage. Während dies in Hamburg 20% sind, erklären immerhin 36% der Züricher Lehrkräfte auf diesem Niveau.
Bei der Annäherung an eine bislang unbekannte Theorie, der Behauptung eines immer linearen Zusammenhangs zwischen Umfang und Fläche, erkennen die meisten Lehrkräfte die problematische Begründungsstrategie der Schülerin noch nicht einmal: 75,6% der Hamburger und 40,9% der Schweizer Lehrkräfte akzeptieren die Behauptung. 17,1% der Hamburger und 45,5% der Züricher Kollegen sind sich nicht sicher und geben an, Schulbücher konsultieren zu müssen oder Kollegen fragen zu wollen etc. Nur 7,3% der Hamburger und 13,6% der Züricher Lehrkräfte erkennen überhaupt die Problematik der Schülerbehauptung. Von diesen wenigen ist für alle Hamburger

und fast alle Züricher Lehrkräfte die Erklärung für die Schülerin mit einem Gegenbeweis beendet. Nur eine einzige Schweizer Lehrkraft äußert eine Möglichkeit, wie die Schülerin mit Hilfe eines Geobrettes den Zusammenhang Umfang und Fläche weiter erforschen könnte.

So ernüchternd die Antworten beider Gruppen von Lehrkräften sind, so deutlich wird doch auch ein qualitativer Unterschied. Ein weitaus größerer Teil der Züricher Lehrkräfte ist im Stande, verständnisorientierte Erklärungen zu geben. Neben diesem qualitativen ist aber auch ein quantitativer Unterschied zu beobachten: Die Schweizer Lehrkräfte antworten insgesamt homogener, „vermischen" weniger Erklärungsansätze miteinander, benutzen häufiger gleiche Materialien und häufiger einen ähnlichen Erklärungsansatz - Quantitäten, die in ihrer Häufigkeit auch Qualität bedeuten.

Worin der Grund für die qualitativen Unterschiede in den Antworten der Züricher Lehrkräften gegenüber denen in Hamburg zu suchen ist, kann wiederum nur vermutet werden. Qualitativ hochwertigere Lehrwerke (vgl. Kap. 7), die von den Lehrkräften zum Zwecke des Selbststudiums verwendet werden können, könnten hier genauso als Erklärung dienen wie auch ein unterschiedliches Ausbildungssystem (vgl. Abschnitt 5.4.) oder darüber hinausgehende Variablen, die im Rahmen dieser Studie gar nicht erfasst worden sind.
Das Design der vorliegenden Untersuchung reichte nicht aus, um wissenschaftliche Erklärungen für den Unterschied in den Antworten zu finden, genauso wenig, wie hiermit das unterschiedliche Abschneiden der Schweizer und Deutschen Schüler in den internationalen Vergleichsuntersuchungen erklärt werden kann. Die ermittelten Unterschiede haben somit eher deskriptiven Charakter und sollen - bezugnehmend auf die Suche nach Ursachen - auf den großen fachdidaktischen Forschungsbedarf hinweisen, der auf diesem Gebiet besteht.

Die Auswertung der Schulleistungstests in Hamburg erbrachte zunächst einmal die Bestätigung der (nicht neuen) Erkenntnis, dass Faktoren wie „Einkünfte der Eltern" oder „Ausländeranteil" einen erheblichen Einfluss auf die schulische Leistung der Kinder haben. Aufgrund dieser starken, im Rahmen dieser Studie nicht kontrollierbaren Einflussfaktoren wurde die Auswertung schließlich auf Schulen begrenzt, in denen mehrere Lehrkräfte interviewt werden konnten. Dies ermöglichte den weitestgehenden Ausschluss äußerer sozialer Einflussfaktoren bei einem Fokus auf einen Zusammenhang zwischen Schülerleistung und Antworten der Lehrkräfte.

Hierbei konnte gezeigt werden, dass es einen Zusammenhang zwischen eher verständnisorientiert unterrichtenden Lehrkräften und Schülerleistungen gibt: Die Durchschnittswerte der Klassen, in denen Lehrkräfte mit eher profundem Fachwissen unterrichten, waren höher als die der Lehrkräfte mit weniger profundem Fachwissen. Zu einem sicheren Beweis allerdings reicht die Versuchsanordnung nicht hin: Hier hätten die Schülerleistungen zum Ausgangszeitpunkt des Unterrichtens erhoben und mit denen zum Zeitpunkt des Interviews verglichen werden müssen, um den so ermittelten Lernfortschritt dem profunden Wissen des Lehrers zumessen zu können.

Zudem ist denkbar, dass andere Kontextvariablen in diesem Zusammenhang eine nicht unbedeutende Rolle gespielt haben. Prozessmerkmale wie „Lehrerpersönlichkeit" oder „Unterrichtsklima" konnten nicht erhoben werden. Zu einer genaueren Analyse dieses Zusammenhangs wären z.B. experimentelle Forschungsdesigns nötig - und aufgrund der gezeigten Zusammenhänge auch wünschenswert.

Die Ergebnisse der vorliegenden Studie mögen nachdenklich stimmen. Natürlich ist - wie in den einführenden Kapiteln herausgearbeitet - die Verständnistiefe elementaren mathematischen Wissens nur ein Merkmal unter vielen, das einen „guten" Lehrer ausmacht. Dass es dennoch *wichtig* ist (wie jedes andere Merkmal selbstverständlich auch), steht außer Frage.

Es sei an dieser Stelle aber auch unmissverständlich klargestellt, dass es in dieser Arbeit nicht um eine „Schuldzuweisung" gehen kann! Der allergrößte Teil der dem Verfasser bekannten Lehrerinnen und Lehrer ist engagiert, motiviert, interessiert an neuen Methoden und Fortbildungen und sieht an erster Stelle das Vorankommen ihrer Schüler. Doch woran liegt es dann, dass ein so beträchtlicher Teil über kein ausreichendes mathematisches Fachwissen verfügt?

Es ist bekannt, dass ein großer Teil der Lehrkräfte, die in der Grundschule Mathematik unterrichten, keine universitäre Ausbildung in diesem Fach erhalten hat, vielleicht auch in der zweiten Phase der Lehrerausbildung, dem Referendariat, keine professionelle fachliche Anleitung erhielt. Wie gelingt es diesen Lehrkräften, grundschulmathematisches Wissen an ihre Kinder zu vermitteln?

Zwei Möglichkeiten scheinen plausibel:

1. Sie bereiten die Unterrichtseinheiten mit Hilfe der methodisch-didaktischen Kommentare der an ihrer Schule zur Verfügung stehenden Lehrwerke vor. Diesem Gedanken folgend wurden 11 Lehrwerke, die zum Zeitpunkt der Lehrerinterviews in der Bibliothek des Instituts für Lehrerfortbildung in Hamburg auslagen, einschließlich der Lehrerbegleitkommentare im Rahmen einer Teiluntersuchung auf ihre fachdidaktische Qualität hin untersucht.
   Die Ergebnisse mögen abermals erstaunen:
   a) Nur drei der 11 Lehrwerke scheinen für ein wirklich verständnistiefes Studium geeignet (vgl. Kap. 7) und
   b) viele der Lehrkräfte, die angaben, ein bestimmtes Lehrwerk zu verwenden, richteten sich in ihren Erklärungsansatz nicht nach dessen Methodik (vgl. Kap. 7)
2. Die Lehrkräfte reaktivieren ihr eigenes Schülerwissen und erklären mathematische Algorithmen oder Zusammenhänge mit Hilfe des in ihrer eigenen Schulzeit gelernten Fachwissens. Die große Anzahl der Hamburger Lehrkräfte, die den Begriff des „Borgens" im Zusammenhang mit dem Algorithmus der schriftlichen Subtraktion zur Erklärung benutzt, könnte als Indiz hierfür gesehen werden (vgl. Kap. 7.2.3). Heute taucht in der Mathematikdidaktik dieser Begriff nur noch selten, als Bezeichnung für das Eintauschverfahren („Borge-Verfahren") auf.

8.2 *Resumée und Forderungen an eine weiterführende Erforschung des Zusammenhangs zwischen profundem Fachwissen des Lehrers und vertieftem Verständnis des Schülers*

Die Ergebnisse stimmen ernst. Es drängt sich die Frage auf, wie man Lehrkräfte in Zukunft besser als *Fach*frau oder *Fach*mann qualifizieren kann. An erster Stelle steht die Qualität des Studiums. Wie viel profundes Fachwissen bringt eine Lehrkraft aus der ersten und zweiten Phase, dem Studium und dem Referendariat, mit?

Es ist zunächst einmal eine Frage, ob die Lehrkraft eine fachwissenschaftliche Qualifizierung an der Universität oder im Referendariat überhaupt durchlaufen hat. Aber dass die Qualität dabei sehr unterschiedlich sein kann, belegt eine Untersuchung von Czerwenka und Nölle (vgl. Czerwenka/Nölle, 2003). Sie kommt zu dem nicht unbedingt zu erwartenden Resultat, dass ein stärker praxisorientiertes Studium die Lehrkräfte sowohl während ihrer Ausbildung als auch in der späteren Unterrichtstätigkeit stärker auf Theorien rekurrieren lässt als eine konventionelle, von der späteren Lehrertätigkeit weitgehend abgehobene Ausbildung. Hier wird ein Zusammenhang zwischen praxisintegrierender Ausbildung einerseits und theoretisch fundierterer Reflexion des eigenen Handelns von Lehrkräften andererseits hergestellt, der wohl nicht nur für die methodische Kompetenz, sondern auch für das Fachwissen gelten dürfte. In dieser Richtung wäre weitergehende Forschung wünschenswert.

Als zweites Feld fachlicher Professionalisierung gilt die Lehrerfortbildung. Ihr Beitrag zur Vertiefung des Fachwissens bedarf nach Einschätzung des Verfassers ebenfalls der eingehenden Erforschung. Dabei rücken zunehmend Fragen der Effizienz in den Diskussionsfokus: Rechtfertigen die aus Fortbildung resultierenden Qualifikationsverbesserungen den mit dem Besuch von Fortbildungskursen verbundenen Aufwand? Schließlich ist ein Lehrer in der Zeit, in der er sich fortbildet, nicht in der Schule, nicht im Unterricht.

Da ist z.B. die Unterrichtszeit am Vormittag, die eine Vollzeitkraft ausnahmslos und ohne tatsächliche Pause unterrichtet, inzwischen bis zu 33 Schulstunden in der Woche. Danach gibt es oft einen institutionalisierten Grund, noch in der Schule zu verbleiben (Konferenzen am Nachmittag, Elternsprechtage). Am Nachmittag haben die meisten Grundschullehrkräfte Zeit für die Vorbereitung der darauffolgenden Unterrichtstage - zu Hause, denn in der Schule ist für sie meistens kein adäquater Arbeitsplatz vorhanden. Die Vor- und Nachbereitung dauert meist etwas länger als der Unterricht selbst. Die Wahrscheinlichkeit, hierbei oder danach aufgrund einer fachwissenschaftlichen Frage einen Kollegen oder eine Kollegin „noch mal eben schnell“ zu konsultieren, womöglich noch ihn zu besuchen und sich ausgiebig über eine unterrichtliche Thematik zu unterhalten, sinkt entsprechend.

Fortbildung aufgrund schulinterner Fachgespräche, sozusagen auf Gegenseitigkeit, entfällt also bei nicht vorhandenen Zeitfenstern. Fortbildung im Selbststudium ist auf geeignete Literatur – in Buch- oder Programmform, papieren oder elektronisch aufbereitet – angewiesen. Hier hat sich in der vom Verfasser durchgeführten Teiluntersuchung aber leider ein eklatanter Mangel heraus geschält.

Vieles „hängt am Geld“ – und das ist bekanntlich in den vergangenen Jahren für bestimmte Vorhaben immer weniger geworden. Wer Fortbildung für Lehrkräfte fordert, muss die Honorarforderungen der *ausbildenden* Lehrkraft ebenso bedenken wie den durch die Absorption des Fortbildungsteilnehmers entstehenden Vertretungsaufwand. Nimmt Fortbildung – wie in der neuen Hamburger Lehrerarbeitszeitverordnung – einen zeitlich bestimmten festen Anteil ein, dann ist dieser Anteil wiederum in Stellen umzurechnen, zu deren Schaffung aber kaum Finanzmittel zur Verfügung stehen. Dass dies in anderen Ländern anders ist, mag Hoffnungen nähren.

So sieht das Schulsystem im Kanton Zürich für alle, Lehrkräfte und Schüler, eine Mittagspause von bis zu zwei Stunden vor. Dafür waren im Durchschnitt am Vormittag nur drei bis vier, am Nachmittag ein bis zwei Stunden Unterricht zu leisten. Da sich der Heimweg für die meisten nicht lohnt, wird Essen individuell in einer Küche gekocht oder von zu Hause mitgebracht. Der Effekt ist eine institutionalisierte Zeit, in der alle zwangsläufig Zeit für Fachgespräche haben. Allerdings sind die hier besuchten Züricher Schulen auch entsprechend räumlich ausgestattet und möbliert.

Neben solchermaßen festgelegten Begegnungs-Zeiträumen, in denen durch mehr oder weniger zufällige Gespräche unter Kollegen wertvolle Unterrichtshinweise weitergegeben werden können, und der außerschulischen oder außerunterrichtlichen, organisierten Fort- und Weiterbildung stellt sich auch in der Schweiz die Frage nach der Effizienz der Lehrerausbildung selbst. Hier dürfte wie in der Berufsbildung im dualen System gelten, dass der Erstausbildungszeitanteil im internationalen Maßstab außergewöhnlich hoch, für den Weiterbildungsanteil aber – von Instituten für Lehrerfortbildung abgesehen – kein institutionell ausgearbeitetes System verfügbar ist.

Die in dieser Arbeit behandelte Fragestellung ist in einen mehrstufigen Wirkungszusammenhang eingebettet, der

– von der Lehrerausbildung in Studium und Referendariat, in denen die personalen Voraussetzungen für die Qualifikation der Lehrkräfte geschaffen werden,
– über die fachliche und methodische Kompetenz der Lehrer
– in den Unterricht reicht, der verständnis- oder verfahrensorientiert gestaltet werden und
– bei den Schülern tiefe oder flache Spuren in der Leistung(sfähigkeit) hinterlassen kann, die
– sie zu einer mehr oder minder entfalteten Teilhabe am Arbeits- und am gesellschaftlichen Leben befähigen mag.

Aus dieser Wirkungskette wurde hier der mittlere Teil herausgegriffen und am Beispiel des Mathematikunterrichts in vierten Grundschulklassen einer eingehenden Untersuchung unterzogen:

– profundes Fachwissen der Lehrkräfte,

– verständnisorientierte Gestaltung des Unterrichts und
– vertieftes Verständnis der Schüler

wurden für sich genommen ermittelt und zueinander in Beziehung gesetzt. Letzteres geschah interpretativ, eine experimentelle Versuchsanordnung war ebenso wie eine Zeitreihen-Untersuchung nicht vorgesehen. Hier sind weiterführende Untersuchungen nicht nur erwünscht, sondern im Blick auf die Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien und die empirische Qualität und Professionalität in anderen Wissenschaftsbereichen (Medizin, Pharmakologie, Physik etc.) dringend notwendig. Der Zusammenhang zwischen Lehrerausbildung und –verständnis wurde erfragt; um zu curricularen Folgerungen zu gelangen, wären auch hier vertiefende Erhebungen nötig.

Offensichtlich ist Schule seit Jahrzehnten einem heftigen Bedeutungswandel unterworfen. Galt sie über Jahre als Ort, an dem Kinder und Jugendliche für ein erfülltes Leben in der Gemeinschaft heran gebildet wurden, kommt ihr in den Vorstellungen vieler Eltern zunehmend der Charakter einer „Verteilungsapparatur für Sozialchancen" zu (wie der Kölner Soziologe Helmut Schelsky es bereits in den fünfziger Jahren prägnant zum Ausdruck brachte). Nicht zuletzt deshalb sind die Ergebnisse der internationalen Vergleichsstudien so heftig in das Bewusstsein der Bevölkerung gedrungen und nachgerade als „PISA-Schock" attribuiert worden. Diesen Bedeutungswandel der Schule muss berücksichtigen, wer nach Verbesserungsmöglichkeiten der Schülerleistungen sucht. Und eines ist in dieser Arbeit an vielen Stellen deutlich geworden: Nachhaltige Verbesserungen sind nur über ein mehrdimensionales, mehrperspektivisches Konzept erreichbar, das die wesentlichen Kategorien des Schulsystems, von den äußeren organisatorischen Bedingungen über die Lehreraus- und –weiterbildung bis zu den Arbeitsbedingungen im Klassenzimmer erfasst und auf wissenschaftlich fundierte Studien zurückgreift. Nicht zuletzt bedarf es der Konsequenz, des Ideenreichtums und der Fähigkeit im effizienten Einsatz finanzieller Mittel, um den gut gemeinten Konzepten auch eine gute Wirkung nachfolgen zu lassen.

9 Literaturverzeichnis

Abele, A.; Kalmbach, H. et al. (1994) — Handbuch zur Grundschulmathematik 3. und 4. Schuljahr. Klett : Stuttgart

Anderson, J.R. (1985) — Cognitive psychology and its implication. 2. Auflage. Freeman : New York :

Anselm, H. (1979) — Mathematikunterricht in der Grundschule. Oldenbourg : München

Ausubel, D.P. (1974) — Psychologie des Unterrichts. Bd. 1 und 2. Beltz : Weinheim

Ausubel, D.P. et al. (1980) — Psychologie des Unterrichts. Band 1, völlig überarbeitete Auflage, Beltz : Weinheim

Ausubel, D.P.; Novak, J.D.; Hanesian, H. (1981) — Psychologie des Unterrichts. Band 2. 2., völlig neu überarbeitete Auflage. Beltz : Weinheim und Basel

Bauersfeld, H. (1993) — Grundschul-Stiefkind Geometrie. In: Die Grundschulzeitschrift 62/1993, S. 8-11

Baumert, J. et al. (Hrsg.) (2001) — Deutsches PISA-Konsortium: Pisa 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Leske + Budrich : Opladen

Baumert, J.; Lehmann, R.; Lehrke, M.; Schmitz, B.; Clausen, M.;Hosenfeld, I; Köller O.; Neubrand, J. (1997) — TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Leske + Budrich : Opladen

Beck, U. (2000) — Zahlenreise 3. Mathematikbuch für die 3. Klasse. Lehrerhandbuch. Volk und Wissen : Berlin

Becker, G.; Henning, J.; Lindenau, V.; Mai, K.-D.; Schindler, M. (1983) — Neue Beispiele zum Anwendungsorientierten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Klinkhardt : Bad Heilbrunn/Obb.

Berliner, D.C. (1986) — In pursuit of the expert pedagogue. In: Educational researcher, 15, pp. 5-13

Berliner, D.C. (1987) — Der Experte im Lehrberuf: Forschungsstrategien und Ergebnisse. In: Unterrichtswissenschaft, 15, S. 295-305

Bessoth, R. (1994) — Lehrerberatung – Lehrerbeurteilung. 3. Aufl., Luchterhand : Neuwied [u.a.]

Blankertz, H. (1972) — In memoriam Saul B. Robinsohn 1916 - 1972. Mentor der Curriculumforschung in der Bundesrepublik Deutschland. In: Die Deutsche Berufs- und Fachschule 68 (1972) 10, S. 806 ff.

Bloom, B.S. (1966) — Twenty-five years of educational research. In: American Educational Research Journal, 3, pp. 206-219

Bloom, B.S. (1973) — Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. Beltz : Weinheim und Basel

Bloom, B.S. et al. (1956) — Taxonomy of educational objectives, Handbook I: Cognitive domain. McKay : New York

Bongard, M.; Mink, J.; Stein, G. vom (Hrsg.) (1997) — Xalando 3 Abenteuer Mathematik. Lehrerhandbuch Ausgabe A. Ferdinand Schöningh : Paderborn

Bos, W. (2003) — Das Hauptproblem liegt in der Sekundarstufe : E & W-Gespräch mit dem Bildungsforscher Prof. Wilfried Bos über Konsequenzen aus der IGLU-Studie. In: Erziehung und Wissenschaft, Bd. 55, 5, S. 10-14

Bos, W., u.a. (2001) — Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften in der Grundschule - welche Leistungen erbringen deutsche Grundschulkinder? : die Internationale-Grundschul-

	Lese-Untersuchung (IGLU/PIRLS) und ihre nationale Erweiterung (IGLU/E). Institut für Internationale und Interkulturelle Vergleichende Erziehungswissenschaft : Hamburg
Bos, W.; u.a. (2004)	IGLU : einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich. Waxmann : Münster
Bromme, R. (1992)	Der Lehrer als Experte - Entwurf eines Forschungsansatzes. In: H. Neber, (Hrsg.), Angewandte Problemlösungsstrategie, S. 127-151. Aschendorff : Münster
Brookhart, S. M.; Loadman, W.E. (1992)	Teacher Assessment and Validity: What do we want to know? In: Journal of Personnel Evaluation in Education, S. 347-357
Brophy, J.E.; Evertson, C.H. (1974)	The Texas Teacher Effectiveness Project: Presentation of non-linear relationships and summary discussion (Research Report No. 74-6). The Research & Development Center for Teacher Education : Austin, Texas
Brophy, J.E.; Good, T.L. (1986)	Teacher behavior and student achievement. In: M.C. Wittrock (Ed.), Research on Teaching, S. 328-374. Macmillan : New York
Bruner, J.S. (1973)	Relevanz der Erziehung. Beltz: Ravensburg
Carpenter, T.P.; Fennema, E.; Franke, M.L.; Levi, L.; Empson, S. B. (1999)	Children’s Mathematics. Cognitively guided instruction. Heinemann: Portsmouth, NH

Coleman, J.S. ; Campbell, E.R.; Hobson, C.J.; Mc. Partland, J.; Mood, A.; Weingold, F.D.; York, R.L. (1966)	Equality of educational opportunity. Government Printing Office : Washington, D.C.
Czerwenka, K. (im Druck)	Schulentwicklung und Schulprofil. In: Einsiedler, W.; Götz, M.; Hacker, H.; Kahlert, R. W.; Sandfuchs, U. (Hrsg.), Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik. Klinkhardt : Bad Heilbrunn/Obb., im Druck
Czerwenka, K.; Nölle, K. (2003)	Probleme des Erwerbs professioneller Kompetenz im Kontext universitärer Lehrerausbildung. DFG-Forschungsprojekt. Abschlussbericht
Czerwenka, K.; u.a. (1990)	Schülerurteile über die Schule : Bericht über eine internationale Untersuchung. Lang : Frankfurt am Main [u.a.]
Deutscher Bildungsrat (1970)	Strukturplan für das Bildungswesen. Klett : Stuttgart.
Die Zeit (2003a)	Die Zeit, 10. April 2003, S. 35 f.
Die Zeit (2003b)	Die Zeit, 17. April 2003, S. 1
DIPF (2003)	Bildungsbericht für Deutschland: Erste Befunde (Zusammenfassung). Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF) : Frankfurt am Main, Berlin
Ditton, H. (2000)	Qualitätskontrolle und -sicherung in Schule und Unterricht. Ein Überblick über den Stand der empirischen Forschung. In: Helmke, A, Hornstein, W. & Terhart, E (Hrsg.), Qualität und Qualitätssicherung im Bildungsbereich: Schule, Sozialpädagogik, Hochschule. Zeitschrift für Pädagogik, 48 (2), S. 262-286
Doyle, W. (1977)	Paradigms for research on teacher effectiveness. In: Review of research in Education, 5, pp. 163 – 198
Duit, R.; Gräber, W. (Hrsg.) (1993)	Kognitive Entwicklung und Lernen der Naturwissenschaften. IPN : Kiel
Dunkin, M.J.; Biddle, B.J. (1974)	The study of teaching. Holt, Rinehart and Wilson : New York
e&w (2001)	„Konservative Mythen“ In: Zeitschrift „e&w“ der Gewerkschaft für Erziehung und Wissenschaft, 28. November 2001
Eccarius, D.; Kurhofer, D, Manthey, R.; Quandt, J. (2001)	Lollipop Mathematik 3. Handbuch für den Unterricht mit Kopiervorlagen. Cornelsen : Berlin
Ericsson, K.; Charness, N. (1994)	Expert performance. Its structure and acquisition. In: American psychologist, 49, pp. 725 - 747
Evertson, C.M., Emmer, E.T., Sanford, J.P., Clements, B.S. (1983)	Improving Classroom Management. An Experiment in Elementary School Classrooms. In: The Elementary School Journal, Vol. 84, Nr. 2, pp. 173-188
FAZ (2001)	Schlechte Noten auch für deutsche Eltern. In: Frankfurter Allgemeine Zeitung (FAZ), 16. Dezember 2001
Fraedrich, A.M. (2001)	Planung von Mathematikunterricht in der Grundschule: aus der Praxis für die Praxis. Spektrum Akademischer Verlag : Heidelberg
Fraser, B.J.; Walberg, H.J.; Welch, W.W.; Hattie, J.A. (1987)	Syntheses of educational productivity research. In: International Journal of Educational Research, 11, pp. 75-91
Freudenthal, H. (1973)	Mathematik als pädagogische Aufgabe. Klett : Stuttgart
Frey, K. (1991)	Die Projektmethode. 4. Aufl., Beltz : Weinheim und

	Basel
Frigelj, K. (2002)	Wie Lernen Spaß machen kann. In: Süddeutsche Zeitung, 16. Januar 2002
Gage, N.L. (1984)	What do we know about teaching effectiveness? In: Phi delta kappan: a journal for the promotion of leadership in education, Bd. 66, pp. 87-90
Gage, N.L.; Berliner, D.C. (1996)	Pädagogische Psychologie. Psychologie Verlags Union : Weinheim
Gage, N.L.; Needels, M.C. (1989)	Process Product Research on Teaching: A Review of Criticisms. In: The elementary school journal, Vol. 89, Nr. 3, pp. 253-300
Gardner, H. (1993)	Der ungeschulte Kopf : wie Kinderdenken. Klett-Cotta : Stuttgart
Gast, M. (1998)	Wann ist ein Lehrer erfolgreich? MPG-Spiegel: Aktuelle Informationen für Mitarbeiter und Freunde des Max-Planck Institutes. Max-Planck- Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften : München.
Gerster, H.-D. (1982)	Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren-Diagnose und Therapie. Herder : Freiburg
Graumann, G.; Hölzl, R.; Krainer, K.; Neubrand, M.; Struve, H. (1996)	Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. In: JMD 17, 3/4, S. 163-237. B.G. Teubner : Stuttgart

Grell, J. (2000)	Direktes Unterrichten. Ein umstrittenes Unterrichtsmodell. In: Wiechmann, J. (Hrsg.), Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis, 2. Aufl., Beltz : Weinheim, S. 35-49
Grey, E.; Tall, D. (1993)	Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. In: Mathematics teaching. Association of Teachers of Mathematics : Derby
Guder, R.; Habeck, H.; Alphéus, S. (1994)	Fördern und Differenzieren in der Grundschule. Niedersächsisches Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung. Dekla-Verlag : Hannover
Gudjons, H. (1994)	Handlungsorientiert lehren und lernen. Projektunterricht und Schüleraktivität. 4. Aufl., Klinkhardt : Bad Heilbrunn
Haapasalo, L.; Kadijevich, D. (2000)	Two types of mathematical knowledge and their relation. In: Journal für Mathematikdidaktik, Jahrgang 21, Heft 2, S. 139-157
Haenisch, H. (1983)	Überblick über Forschungsergebnisse zum Lehrerverhalten in heterogenen Lerngruppen. In: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.): Lehrerverhalten und Binnendifferenzierung in heterogenen Lerngruppen der Sekundarstufe I - Anregungen für die Praxis (Handreichungen für die Gesamtschule, Heft 8). Soest, S. 9-41
Haenisch, H. (2000)	Merkmale erfolgreichen Unterrichts. Forschungsbefunde als Grundlage für die Weiterentwicklung von Unterrichtsqualität. In: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.), Was ist guter Unterricht, S. 42-53. Bönen, Druckverlag Kettler
Harnach-Beck, V. (2003)	Psychosoziale Diagnostik in der Jugendhilfe. Grundlagen und Methoden für Hilfeplan, Bericht und Stellungnahme. 4. Aufl., Juventa : München
Helmke, A. (2004)	Unterrichtsqualität erfassen, bewerten, verbessern. 2. Aufl., Kallmeyer : Seelze
Helmke, A.; Schrader, F.W. (1987)	Interactional effects of instructional quality and teacher judgement accuracy on achievement. In: Teaching and Teacher Education, 3, pp. 91-98
Helmke, A.; Schrader, F.W. (1988)	Successful student practice during seatwork: Efficient management and active supervision are not enough. In: Journal of Educational Research, 82, pp. 70-75

Hiebert, J. (1986)	Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, Inc. : Hillsdale, New Jersey
Hiebert, J. ; Carpenter, T.P., Fennema, E. et al. (1997)	Making Sense. Teaching and Learning Mathematics with Understanding. Heinemann : Portsmouth, NH
Hofe, R. vom (1995)	Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum Akad. Verl. [u.a.] : Heidelberg
Hofe, R. vom (1996)	Über die Ursprünge des Grundvorstellungskonzepts in der deutschen Mathematikdidaktik. In: JMD 17 (96) 3 /4, S. 238-264
Hofe, R. vom (2003)	Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren : die Zeitschr. für d. Unterricht in allen Schulstufen, 118, S. 4-8
Hohl, W.; u.a. (2000)	Mathematik 4. Schülerbuch des Kantons Zürich. Lehrbuchverlag des Kantons Zürich : Zürich
Hübner, G. et al. (2000)	Das Mathebaum-System. Mathebaum 3. Schroedel : Hannover
Hundt, D. (2000)	BD@Bildung.de. In Mathe Mangelhaft. Bundesvereinigung der Deutschen Arbeitgeberverbände : Berlin.
Jennings, S. ; Dunne, R. (1998)	Teaching Mathematics in Primary Schools. Letts Educational : London
Kaiser, F.-J. (1972)	Entscheidungstraining. Klinkhardt : Bad Heilbronn/Obb.
Keller, K.-H.; Pfaff, P. (Hrsg.) (2003)	Mathematik 3. Mildenberger : Offenburg
Kerstan (2000)	Neues aus der Schule. In: Die Zeit 48/2000
Kitcher, P. (1984)	The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford University Press : Oxford
Klieme, E. (2001)	TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht : Forschungsbefunde, Reforminitiativen ; Praxisberichte und Video-Dokumente. Bundesministerium für Bildung und Forschung : Bonn
Köck, P.; Ott, H. (1997)	Wörterbuch für Erziehung und Unterricht. Auer : Donauwörth
Kounin, J.S. (1976)	Techniken der Klassenführung. Huber : Bern
Krauthausen, G. (1998)	Lernen. Lehren. Lehren lernen. Zur mathematikdidaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Klett : Leipzig
Krauthausen, G.; Scherer, P. (2001)	Einführung in die Mathematikdidaktik. Spektrum Akademischer Verlag : Heidelberg.
Kutscha, G. (2001)	Bildungsnotstand – Qualifikationslücke – betriebliches Ausbildungsmarketing. Aspekte einer vernachlässigten Dimension der Berufsbildungsforschung. In: Berufsbildung in Wissenschaft und Praxis 4/2001, S. 41 – 45
Lampert, M. (1990)	When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. In: American Educational Research Journal, Vol. 27, No. 1, pp. 29-63
Lampert, M.; Ball, D.B. (1998)	Teaching, Multimedia and Mathematics. Teachers College Press : New York and London
Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.) (2000)	Was ist guter Fachunterricht? Beiträge zur fachwissenschaftlichen Diskussion. Verlag für Schule und Weiterbildung: DruckVerlag Kettler

Lauter, J. (1995)	Fundament der Grundschulmathematik. Verlag Ludwig Auer : Donauwörth
Lauter, J. (2001)	Methodik der Grundschulmathematik. Auer : Donauwörth
Leinhardt, G. (1987)	Development of an Expert Explanation: An Analysis of a Sequence of Subtraction Lessons. Reprinted from "Cognition and Instruction", Vol. 4, No. 4, S. 225-282
Leinhardt, G. (1989)	Math Lessons: A Contrast of novice and expert competence. In: Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, No. 1, pp. 52-75
Leinhardt, G.; Greeno, J.G. (1986)	The cognitive skill of teaching. In: Journal of Educational Psychology, 78, pp. 75-95
Leinhardt, G.; Smith, D.A. (1985)	Expertise in Mathematics Instruction: Subject Matter Knowledge. In: Journal of Educational Psychology, Vol. 77, No. 3, pp. 247-271
Leininger, P. et al. (1993)	Nussknacker. Lehrerband. Regionalausgabe 2. Ernst Klett Schulbuchverlag : Stuttgart
Lesgold, A.M. (1984)	Acquiring expertise. In: J.R. Anderson & M. Koslyn (Hrsg.), Tutorials in learning memory: Essays in honor of Gordon Bower, pp. 31-60, Freeman : San Francisco
Lienert, G. (1969)	Testaufbau und Testanalyse, Beltz : Weinheim
Lingelbach, H. (1995)	Unterrichtsexpertise von Grundschullehrkräften. Kovac : Hamburg
Lipowsky, F.; Thußbas, C.; Klieme, E.; Reusser, K.; Pauli, C. (2003)	Professionelles Lehrerwissen, selbstbezogene Kognitionen und wahrgenommene Schulumwelt – Ergebnisse einer kulturvergleichenden Studie deutscher und Schweizer Mathematiklehrkräfte. In: Unterrichtswissenschaft, 31, H. 3, S. 206-237
Lorenz, J.H. (1997)	Kinder entdecken die Mathematik. Westermann Schulbuchverlag GmbH : Braunschweig
Lorenz, J.H. (Hrsg.) (2002)	Mathematikus 3. Lehrerband. Westermann Schulbuchverlag GmbH : Braunschweig
Lorenzen, P. (1984)	Elementargeometrie: Das Fundament der Analytischen Geometrie. Bibliographisches Institut : Mannheim; Wien; Zürich
Ma, L. (1999)	Knowing and Teaching elementary Mathematics. Teachers´ Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. Mahwah, New Jersey
Melchior, D.; Eidt, H.; Klöpfer, D.: Lamnek, R. (1997)	Denken und Rechnen. Lehrerhandbuch. Westermann Schulbuchverlag GmbH : Braunschweig
Merton, R.K.; Kendall, P.L. (1979)	Das fokussierte Interview. In: Hopf, C.; Weingarten, E. (Hrsg.), Qualitative Sozialforschung, Klett : Stuttgart. S. 171-203
Mietzel, G. (1986)	Psychologie in Erziehung und Unterricht. Verlag für Psychologie - Dr.C.J. Hogrefe : Göttingen
Mosel-Göbel, D.; Stein, M. (2002)	Leonardo. Mathematik 3. Kommentare und Kopiervorlagen. Moritz Diesterweg : Frankfurt am Main
Müller, G.; Wittmann, E.Ch. (1984)	Der Mathematikunterricht in der Primarstufe ; Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele. 3., neubarb. Aufl., Vieweg : Braunschweig
Nesher, P.; Kilpatrick, J. (1990)	Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathe-

matics Education. Cambridge University Press : Cambridge

Neubrand, J. (1998) Japanischer Unterricht aus mathematikdidaktischer Sicht. In: Mathematik Lehren, 98, Nr. 90, S. 52-56

Neubrand, M. (2000) Reflecting as a Didactic construction: Speaking about mathematics in the mathematics classroom. In: I. Westbury, St. Hopmann & K. Riquarts(Eds.): Teaching as a Reflective Practice: The German Didactic Tradition. Lawrence Erlbaum Associates : Mahwah, N.J. and London, pp 251 – 265

Neubrand, M. (2003) Mathematical literacy/Mathematische Grundbildung : Der Weg in die Leistungstests, die mathematikdidaktische Bedeutung, die Rolle als Interpretationshintergrund für den PISA-Test. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 6 (3), S. 338-356

Neubrand, M. (Hrsg.) (1998) Beiträge zum Mathematikunterricht : Vorträge auf der 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6. März 1998 in München. Franzbecker : Hildesheim

Neubrand, M.; Möller, M. (1999)	Einführung in die elementare Arithmetik : ein Arbeitsbuch für Studierende des Lehramts. 3.,überarb., aktualisierte und erg. Aufl., Franzbecker : Hildesheim [u.a.]
OECD (2001)	Lernen für das Leben. Erste Ergebnisse der Internationalen Schulleistungsstudie PISA 2000, OECD-Bericht (Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung) (Hrsg.). Leske + Budrich : Opladen
Padberg, F. (1997)	Einführung in die Mathematik. Band 1 (Arithmetik) und Band 2 (Geometrie). Spektrum : Heidelberg
Pauli, C.; Reusser, K. (2003)	Unterrichtsskripts im schweizerischen und im deutschen Mathematikunterricht. In: Unterrichtswissenschaft, 31, H. 3, S. 238-272
Radatz, H. (1989)	Die Geometrie nicht vernachlässigen! In: Grundschule 12/1989, S. 17-19
Radatz, H.; Schipper, W. (1983)	Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover : Schroedel
Renkl, A. (1991)	Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldegestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik. Dissertation zur Erlangung des Grades eines Dr. phil. an der Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften der Universität Heidelberg.
Rinkens, H.-D.; Hönisch, K. (1999)	Welt der Zahl. Praxisbegleiter. 3. Schuljahr. Schroedel : Hannover
Robinsohn, S. B. (1967)	Bildungsreform als Revision des Curriculums. Luchterhand : Neuwied
Rowan, B.; Fang-Shen Chiang; Miller, R.J. (1997)	Using Research on Employees' Performance to Study the Effects of Teachers on Students' Achievement. In: Sociology of education. Bd. 70, No.4, pp. 256-284
Rutter, M. (1983)	School effects on pupils' progress: Research findings and policy implications. In: Child development, 54, 1-29
Schäfer, W.; Georgi, K.; Trippler, G. (1999)	Mathematik-Vorkurs : Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger. 4. Aufl., Teubner : Stuttgart
Schaub, H.; Zenke, K.G. (2000)	Wörterbuch Pädagogik. 4., grundlegende überarb. und erw. Aufl., Deutscher Taschenbuchverlag : München
Scheid, H. (2001)	Elemente der Geometrie. 3. Aufl., Spektrum, Akad. Verl. : Heidelberg, Berlin

Schoenfeld, A.H. (1988)	When good teaching leads to bad results: The disaster of "Well-Taught" mathematics courses. In: Educational Psychologist, 23(2), pp. 145-166
Schreckenberg, W. (1980)	"Guter" Unterricht – "schlechter" Unterricht. Schwann : Düsseldorf
Schulz, A. (1995)	Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht der Grundschule. Paetec : Berlin
Schwarz, B.; Prange, K. (1997)	Qualität von Lehrern und Unterricht im Spiegel der empirischen Forschung. In: Schlechte Lehrer/innen : zu einem vernachlässigten Aspekt des Lehrberufs. Beltz : Weinheim [u.a.]
Shulman, L.S. (1986)	Those who understand: Knowledge growths in teaching. In: Educational Researcher, Bd 15, pp. 4-14
Shulman, L.S. (1986)	Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In: M.C. Wittrock (ed.), Handbook of Research on Teaching Mamillan : New York, S. 3-35
Shulman, L.S. (1987)	Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. In: Harvard Educational Review, Bd 57, pp. 1-22
Siegler, R.S. (1996)	Emerging Minds. The process of change in children's thinking. Oxford University Press : New York
Skowronek (1969)	Lernen und Lernfähigkeit. Juventa : München
Steinhöfel, W.; Reichhold, K., Frenzel, L. (1988)	Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht. Hergestellt im Wissenschaftlich-Technischen Zentrum der Pädagogischen Hochschule "Karl Liebknecht" Potsdam
Stern, E. (1998)	Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Pabst Science Publishers : Laengerich
Süddeutsche Zeitung (2001a)	Bulmahn setzt auf mehr Ganztagsschulen. In: Süddeutsche Zeitung, 14. Dezember 2001
Süddeutsche Zeitung (2001b)	Eltern fehlt Interesse am Lernerfolg. In: Süddeutsche Zeitung, 16. Dezember 2001
Sweller, J.; van Marrienboer, J.J.G.; Paas, F.G.W.C. (1998)	Cognitive Architecture and Instructional Design. Educational Psychology Review, Vol. 10, No. 3, 251-296
Upitis, R.; Pillips, E.; Higginson, W. (1997)	Creative Mathematics. Exploring children's understanding. In: Routledge : London and New York
Vinner, S. (1997)	The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. In: Educational Studies in Mathematics 34: pp. 97-129.
Wagenschein, M. (1999)	Verstehen lehren. Beltz : Weinheim und Basel
Waxman, H.C.; Walberg, H.J. (1982)	The relation of teaching and learning: A review of reviews of Process-Product Research, in: Contemporary Education Review, S. 103-120
Weinert, F.E.; Helmke, A. (1996)	Der gute Lehrer: Person, Funktion oder Fiktion? In: Zeitschrift für Pädagogik: Beiheft ; 34. Beltz : Weinheim und Basel, S. 223 - 232
Weinert, F.E.; Helmke, A. (1997)	Entwicklung im Grundschulalter. Psychologie Verlags Union : Weinheim
Weinert, F.E.; Schrader, F.W.; Helmke, A. (1989)	Quality of instruction and achievement outcome. In: International Journal of Educational research, 13, 895-914.
Weinert, F.E.; Schrader, F.W.; Helmke, A. (1990)	Unterrichtsexpertise - ein Konzept zur Verringerung der Kluft zwischen zwei theoretischen Paradigmen.

	In: Alisch, L.M., Baumert, J., Beck, K., Professionswissen und Professionalisierung, S. 173-206
Wellenreuther, M. (2000)	Quantitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft. Juventa : Weinheim und München
Wellenreuther, M. (2001)	Unterrichtspädagogik. Ein Reader über neue Formen des Lehrens und Lernens sowie über Prozesse effektiven Unterrichts. Seminarbegleitender Reader, Lüneburg, 30.03.2001
Wellenreuther, M. (2004)	Lehren und Lernen - aber wie? Empirisch experimentelle Forschung zum Lehren und Lernen im Unterricht. Schneider : Hohengehren
Wellenreuther, M.; Zech, F. (1994)	Stützpfeiler Mathematik. Cornelsen : Berlin
Wertheimer, J. (2001)	Wir Ernsthaften!. In: Frankfurter Allgemeine Zeitung, 17. Dezember 2001
White, P.; Mitchelmore, M. (1996)	Conceptual Knowledge in Introductory Calculus. In: Journal for research in mathematics education. JRME : Reston
Wiechmann, J. (2000)	Unterrichtsmethoden. Vom Nutzen der Vielfalt. In: Wiechmann, J. (Hrsg.), Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis. 2. Aufl., Beltz : Weinheim, S. 9-19
Winter, H. (1984)	Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 2/Febr. 84, S. 4-18
Wittmann, E. Ch. (1987)	Elementargeometrie und Wirklichkeit: Einführung in geometrisches Denken. Vieweg : Braunschweig, Wiesbaden
Wittmann, E. Ch. et al. (1996)	Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr. Lehrerband. Ernst Klett Schulbuchverlag : Leipzig
Zech, F. (1995)	Mathematik erklären und verstehen. Cornelsen : Berlin
Zech, F. (1996)	Grundkurs Mathematikdidaktik. Beltz : Weinheim und Basel:
Zeitschrift der GEW (2001a)	10x Qualität für bessere Schule. In: Zeitschrift der GEW, 4. Dezember 2001
Zeitschrift der GEW (2001b)	Am Geld allein liegt's nicht. In: Zeitschrift der GEW, 10. Dezember 2001

Das profunde Verständnis fundamentaler Mathematik von Lehrkräften als Ausgangspunkt für eine Verbesserung der Unterrichtsqualität

- eine empirische Analyse unter Einschluss eines länderübergreifenden Vergleichs

Anhang

vorgelegt von

Christofer Seyd
geb. 01. Juni 1971 in: Hamburg

Hamburg, 03. Mai 2004

Inhalt

1 Abbildungsverzeichnis 5

2 Anhang: Schülerleistungen (Prozentrang) im Vergleich, begrenzt auf Schulen 6

3 Anlage: Interviewbogen 16

4 Anlage: Testdurchführungs-Anleitung 18

5 Anlage: Analyse der methodisch-didaktischen Kommentare in Lehrerhandbüchern 21

6 Anlage: Interviewprotokolle Hamburg 25

6.1 Protokoll 01 H 25
6.2 Protokoll 02 H 29
6.3 Protokoll 03 H 32
6.4 Protokoll 04 H 36
6.5 Protokoll 05 H 42
6.6 Protokoll 06 H 50
6.7 Protokoll 07 H 55
6.8 Protokoll 08 H 58
6.9 Protokoll 09 H 61
6.10 Protokoll 10 H 63
6.11 Protokoll 11 H 66
6.12 Protokoll 12 H 71
6.13 Protokoll 13 H 75
6.14 Protokoll 14 H 78
6.15 Protokoll 15 H 81
6.16 Protokoll 16 H 87
6.17 Protokoll 17 H 91
6.18 Protokoll 18 H 93
6.19 Protokoll 19 H 98
6.20 Protokoll 20 H 104
6.21 Protokoll 21 H 110
6.22 Protokoll 22 H 113
6.23 Protokoll 23 H 116
6.24 Protokoll 24 H 122
6.25 Protokoll 25 H 129

6.26 Protokoll 26 H ... 135
6.27 Protokoll 27 H ... 139
6.28 Protokoll 28 H ... 143
6.29 Protokoll 29 H ... 146
6.30 Protokoll 30 H ... 151
6.31 Protokoll 31 H ... 155
6.32 Protokoll 32 H ... 159
6.33 Protokoll 33 H ... 165
6.34 Protokoll 34 H ... 168
6.35 Protokoll 35 H ... 170
6.36 Protokoll 36 H ... 174
6.37 Protokoll 37 H ... 179
6.38 Protokoll 38 H ... 183
6.39 Protokoll 39 H ... 186
6.40 Protokoll 40 H ... 190
6.41 Protokoll 41 H ... 193

7 Anlage: Interviewprotokolle Zürich / Schweiz ... 195

7.1 Protokoll 01 S ... 195
7.2 Protokoll 02 S ... 197
7.3 Protokoll 03 S ... 201
7.4 Protokoll 04 S ... 204
7.5 Protokoll 05 S ... 208
7.6 Protokoll 06 S ... 213
7.7 Protokoll 07 S ... 218
7.8 Protokoll 08 S ... 222
7.9 Protokoll 09 S ... 226
7.10 Protokoll 10 S ... 229
7.11 Protokoll 11 S ... 231
7.12 Protokoll 12 S ... 234
7.13 Protokoll 13 S ... 237
7.14 Protokoll 14 S ... 240
7.15 Protokoll 15 S ... 243
7.16 Protokoll 16 S ... 246
7.17 Protokoll 17 S ... 248
7.18 Protokoll 18 S ... 255
7.19 Protokoll 19 S ... 258
7.20 Protokoll 20 S ... 261

7.21 Protokoll 21 S ... *264*
7.22 Protokoll 22 S ... *268*

1 Abbildungsverzeichnis

Abb. A 1: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 22 ... 6

Abb. A 2: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 17 ... 7

Abb. A 3: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 18 ... 8

Abb. A 4: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 06, ... 9

Abb. A 5: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 09 ... 10

Abb. A 6: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 04 ... 11

Abb. A 7: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 15 ... 12

Abb. A 8: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 08 ... 13

Abb. A 9: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 10 ... 14

Abb. A 10: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 02 ... 15

Abb. A11: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 43

Abb. A12: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 44

Abb. A13: 3. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 44

Abb. A14: 4. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 44

Abb. A15: 5. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 44

Abb. A16: 6. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 45

Abb. A17: 7. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 46

Abb. A18: 8. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H ... 48

Abb. A19: begleitende Handskizze der Lehrkraft 15 H ... 84

Abb. A20: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 18 H ... 94

Abb. A21: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 18 H ... 96

Abb. A22: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 06 S ... 214

Abb. A23: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 06 S ... 215

Abb. A24: begleitende Handskizze der Lehrkraft 16 S ... 246

Abb. A25: begleitende Handskizze der Lehrkraft 17 S ... 249

Abb. A26: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 22 S ... 268

Abb. A27: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 22 S ... 270

2 Anhang: Schülerleistungen (Prozentrang) im Vergleich, begrenzt auf Schulen

Vergleichend betrachtet werden Lehrkräfte, die an der gleichen Schule unterrichten. Als Vergleichsgrundlage wird hierfür eine Gesamteinschätzung jeder Lehrkraft verwendet, die alle im Lehrerinterview enthaltenen Unterrichtsszenarien mit einschließt. Die Gesamteinschätzung ist jedem dazugehörigen Diagramm vorangestellt.

1. Schule 22

- Lehrkraft 23H
  Die L. wird in der Beantwortung der Situation 1 (Subtraktion) in Stufe 2 eingeordnet („verständnisorientiert fehlerhaft"). Diese Einstufung wird jedoch relativiert durch die Darstellung ihrer Antwort in Situation 2 (Multiplikation), die sie sehr verständnistief erklärt, diverse Verbindungen zu anderen mathematischen Bereichen herstellt und somit doch auf ein eher tiefgehendes Verständnis schließen lässt. Dabei profitiert sie eventuell von Kenntnissen aus ihrer fachwissenschaftlichen Ausbildung (Fakultas Mathematik). In Situation 3 (Geometrie: Flächenberechnung) reagiert sie offen und schließt einen Gegenbeweis nicht aus, für den sie nach eigener Angabe jedoch mehr Zeit benötigen würde. In diese Überlegungen würde sie ihre Schüler mit einbeziehen.
- Lehrkraft 28 H
  Die L. vermischt bei der Beantwortung zu Situation 1 verschiedene Erklärungsansätze, wird daher Stufe 2 zugeordnet. Diese Einstufung wird in der Beantwortung von Situation 2 nicht relativiert, da die Lehrkraft hier nur verfahrensorientierte Hilfen äußert. In Situation 3 wird die Schülerin gelobt und ihre Theorie vorbehaltlos akzeptiert.
- Lehrkraft 01 H
  Die Antworten dieser L. wurden sowohl in Situation 1 als auch 2 Stufe 4 (verfahrensorientiert fehlerhaft) zugeordnet. In Situation 3 wird die Schülerin gelobt und bestärkt, „weiter so an solche Probleme heranzugehen".

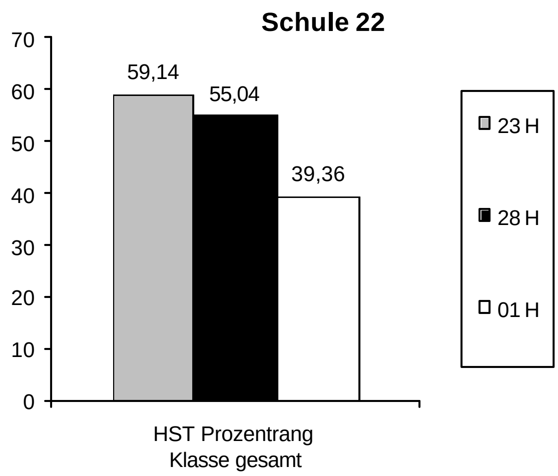


Abb. A 1: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 22, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

Bsp.: 59,14 % der Schüler der Lehrkraft 23 H waren im Durchschnitt besser als die Schüler der Eichstichgruppe des HST 4/5.

2. Schule 17

Alle drei an dieser Schule befragten Lehrkräfte haben im Rahmen ihrer Lehrerausbildung Mathematik als Fach studiert.

- Lehrkraft 02 H
  Die L. vermittelt den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion (Szenario 1) verfahrensorientiert ohne Anknüpfungspunkte in „benachbarte“ Bereiche der Primarmathematik, was dann auf ein PUFM schließen lassen könnte. Dass sie hierzu allerdings durchaus in der Lage ist, ist in der Antwort zu Szenario 2 zu erkennen, an welches sie verständnisorientiert herangeht. In Situation 3 würde die Lehrkraft die Schülerin loben und ihre Theorie akzeptieren, jedoch auch um eine Herleitung des Gedankenganges bitten.
- Lehrkraft 15 H
  Sowohl bei der Herangehensweise an Szenario 1 als auch 2 ließ diese Lehrkraft eine ausgeprägte Verständnistiefe erkennen. Die Schülerin in Szenario 3 wird gelobt, ihre Theorie akzeptiert und sie wird gebeten, ihre Erkenntnisse der Klasse vorzutragen. Allein Aufgrund der Antworten zu Szenario 1 und 2, die ein recht ausgeprägtes PUFM erkennen lassen, müssten die Schüler gemäß meiner Annahme eigentlich mit den Schülern der Lehrkraft 02 H vergleichbare Ergebnisse bringen. Allerdings haben in dieser Klasse 11 (!) Schüler die Aufgabe 14 nicht bearbeiten können (auf den entsprechenden Antwortbögen waren auch keine Fehlversuche oder falsch beantwortete Fragen zu erkennen). Durch die im Maximalfall jeweils fehlenden 5 Punkte sind diese 11 Schüler auch in schlechteren Prozenträngen gelandet als normalerweise möglich gewesen wäre. Leider hat der Tester keine Angaben zu eventuellen Unregelmäßigkeiten während des Ablaufs gemacht, die fehlenden Punkte sind daher zunächst nur mit mangelnder Zeit zu erklären.
- Lehrkraft 33 H
  Die L. vermischt bei der Beantwortung von Szenario 1 verschiedene Erklärungsansätze und wird daher Stufe 2 zugeordnet. Die gleiche Zuordnung erfolgt in bezug auf Szenario 2: Hier würde die L. versuchen, den Schülern mit Erklärungen zu helfen, die jedoch keine Anknüpfungspunkte an angrenzende Bereiche der Elementarmathematik und somit auch kein PUFM erkennen lassen. In Szenario 3 wird die Schülerin gelobt und ihre Annahme ausdrücklich bestätigt (die L. vollzieht den Gedankengang der Schülerin nach).

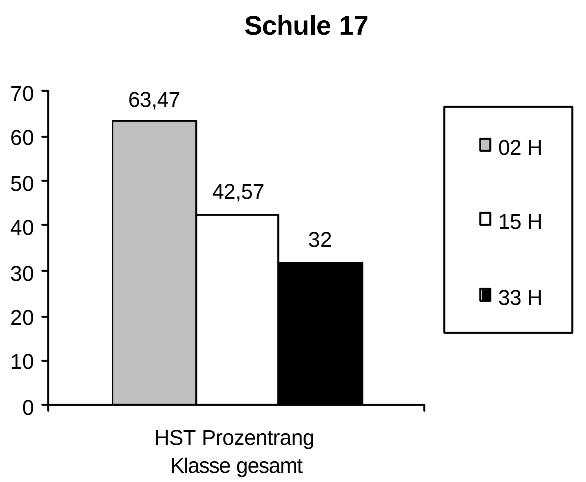


Abb. A 2: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 17, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

3. Schule 18

- Lehrkraft 38 H
  Die L. hat in ihrer Ausbildung Mathematik als Fach pflichtgemäß studiert, äußerte jedoch, dass dies nicht in ihrem Sinne war und sie andere Fächer bevorzugt hätte, wäre dies möglich gewesen. Die Ausführungen zu Szenario 1 wurden als verfahrensorientiert fehlerhaft (Stufe 4) eingestuft, jene zu Szenario 2 als verfahrensorientiert (Stufe 3). In Szenario 3 wird die Schülerin gelobt und gebeten, den Erkenntnisweg zu schildern. Es folgen keine weiteren Impulse. Insofern ist es - gemäß meiner Annahme - erstaunlich, dass die Schüler dieser Klasse die besten Testergebnisse erzielten.
- Lehrkraft 25 H
  Aufgrund der Vermischung verschiedener Erklärungsansätze wurde diese Lehrkraft in bezug auf Situation 1 (Subtraktion) Stufe 2 zugeordnet. Diese Stufe ist auch in Situation 2 (Multiplikation) erkennbar. Bei den Ausführungen zu Szenario 3 wird die Schülerin gelobt und ihre Theorie akzeptiert.
- Lehrkraft 34 H
  Die L. nennt zunächst eine breite Basis an Voraussetzungen, die zur Lösung der Aufgaben in Szenario 1 nötig wären. Diese werden jedoch entweder nicht in die folgenden Ausführungen eingebunden oder bleiben an einer verfahrensorientierten Oberfläche. Wichtige Erklärungen, z.B. wie der Übertrag entsteht, bleiben aus. Aufgrund der von der Lehrkraft genannten Voraussetzungen erfolgte hier eine Zuordnung zu Stufe 2, es ist jedoch vorstellbar, dass der Algorithmus im Unterricht auch „nur“ verfahrensorientiert vermittelt wird. Auf dieser Ebene bewegen sich denn auch die Erklärungen zu Szenario 2, die sich auf einem ausschließlich verfahrensorientierten Niveau bewegen. Szenario 3 wird sehr kurz beantwortet. Die Schülerin wird gelobt und ihre Theorie akzeptiert.
- Lehrkraft 03 H
  Die L. schildert ihre Herangehensweise in Szenario 1 auf verfahrensorientiert fehlerhaftem Niveau („Man leiht sich eine Zehnerzahl und gibt sie dann hinterher wieder zurück.“). Auch die Versuche in Szenario 2 (Zuordnung in Stufe 2) den Algorithmus mit Hilfe der halbschriftlichen Multiplikation zu erklären, haben eher verfahrensorientierte Merkmale. In Szenario 3 wird die Theorie der Schülerin akzeptiert, es erfolgt jedoch kein Lob und auch kein weiterführender Impuls.

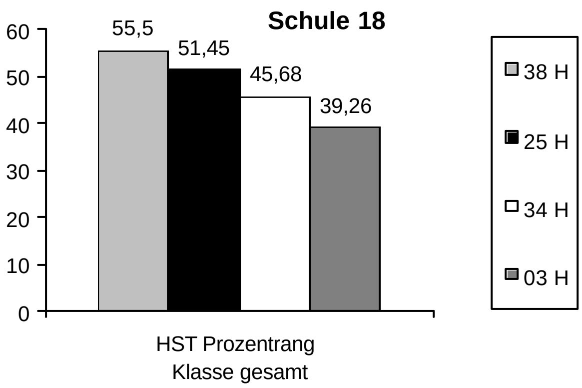


Abb. A 3: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 18, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

4. Schule 06

- Lehrkraft 06 H
  Die L. vermischt bei den Ausführungen zu Szenario 1 zwei Erklärungsansätze (Eintauschen und gleichsinniges Ergänzen). Sie wird daher Stufe 2 (verständnisorientiert fehlerhaft) zugeordnet. Diese Einstufung erfolgt auch in bezug auf Szenario 2. Die Theorie der Schülerin in Szenario 3 wird akzeptiert und ihre Bemühungen gelobt. Darüber hinaus wird sie gebeten, ihre Erkenntnisse der Klasse vorzustellen.
- Lehrkraft 09 H
  Der Algorithmus der schriftlichen Subtraktion wird von der L. verfahrensorientiert fehlerhaft vermittelt (Stufe 4: „Jetzt habe ich mir den Zehner geliehen, deswegen muss ich da jetzt eine kleine 1 hinschreiben.“). In Szenario 3 würde der Algorithmus erneut verfahrensorientiert (Stufe 3) geübt. Die Schülerin in Szenario 3 erfährt ausdrückliche Bestätigung, ihre Theorie wird von der Lehrkraft akzeptiert.

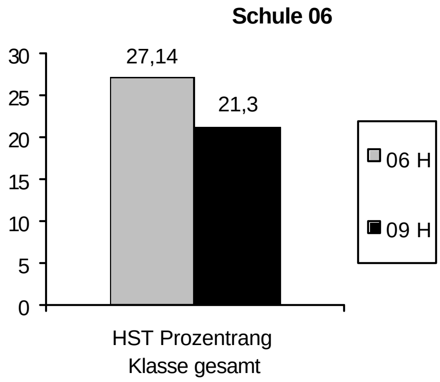


Abb. A 4: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 06, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

5. Schule 09

Sowohl Lehrkraft 27 H als auch 10 H antworten verständnisorientiert und lassen erkennen, wie sie verschiedene elementarmathematische Inhalte miteinander verknüpfen. Dementsprechend klein fällt auch der Unterschied zwischen diesen beiden aus. Allerdings scheint die L. 27 H vermehrt ikonische Hilfen oder mathematikdidaktisches Material einzusetzen, was auch diesen kleinen Unterschied erklärbar machte.

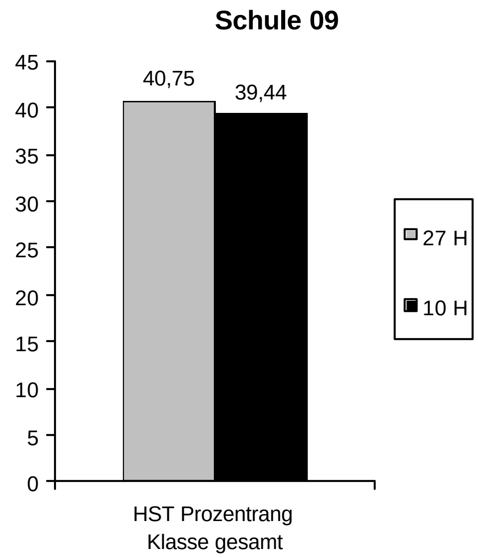


Abb. A 5: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 09, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

6. Schule 04

- Lehrkraft 11 H
  Die L. schildert ihre Herangehensweise an die schriftliche Subtraktion (Szenario 1) verständnisorientiert korrekt (Stufe 1) und ist auch in der Lage, dies mit Hilfe veranschaulichender Materialien (Plättchen und Geld) zu tun. Im Rahmen ihrer Ausführungen zu Szenario 2 ist diese Ausführlichkeit dagegen nicht zu erkennen (daher Zuordnung zu Stufe 2), eventuell wird aufgrund der ausführlichen Erläuterungen zu Szenario 1 auch nicht darauf eingegangen. In Szenario 3 vermutet die Lehrkraft einen möglichen Gegenbeweis und gibt an, die Theorie der Schülerin in der fiktiven Situation erst einmal mit verschiedenen Figuren ausprobieren zu wollen.
- Lehrkraft 12 H
  Die L. vermischt in ihren Ausführungen zur schriftlichen Subtraktion (Szenario 1) verschiedene Erklärungsansätze (gleichsinnig Ergänzen / Eintauschen) miteinander und wurde daher Stufe 2 zugeordnet. Die Antworten zu Szenario 2 und 3 waren schwer bewertbar, da die Lehrkraft in Zeitdruck (Unterrichtsbeginn) geriet. Die vorhandenen Transkribtionen lassen jedoch ebenfalls eher auf Antworten im Rahmen der Stufe 2 schließen.

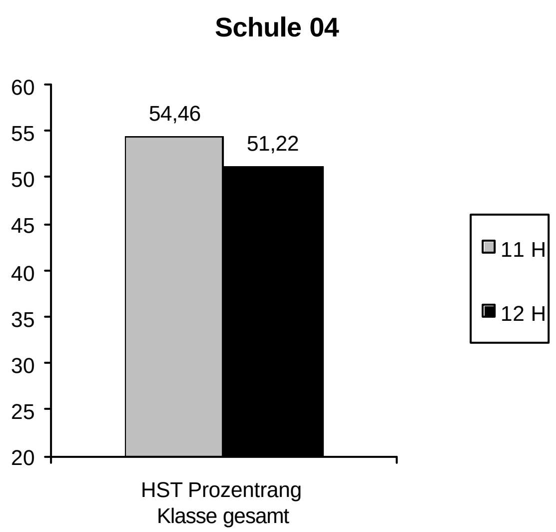


Abb. A 6: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 04, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

7. Schule 15

- Lehrkraft 37 H
  In Szenario 1 vermischt die Lehrkraft verschiedene Erklärungsansätze und wird daher Stufe 2 (verständnisorientiert fehlerhaft) zugeordnet. In den Ausführungen zu Szenario 2 würde die Lehrkraft den Schülern ausschließlich verfahrensorientierte Hilfen geben und auf keine anderen primarmathematischen Inhalte zugreifen. Die Erkenntnis der Schülerin in Szenario 3 wird zwar zunächst akzeptiert und ihre Bemühungen gelobt, jedoch nur für diesen speziellen Fall (Quadrat und Rechteck). Es wird - auch gegenüber der fiktiven Schülerin - die Vermutung geäußert, dass ihre Theorie nicht auf alle geometrischen Formen (z.B. Kreis, Dreieck) zutreffen muss.
- Lehrkraft 21 H
  Die L. erklärt den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion (Szenario 1) verfahrensorientiert, ebensolche Erklärungen finden sich auch in Szenario 2 (Multiplikation). Der fiktiven Schülerin in Szenario 3 bietet sie ein Gegenbeispiel an - Impulse zur Weiterführung der Thematik, Anregungen für die Schülerin oder Lob und Ermutigung werden jedoch nicht genannt.

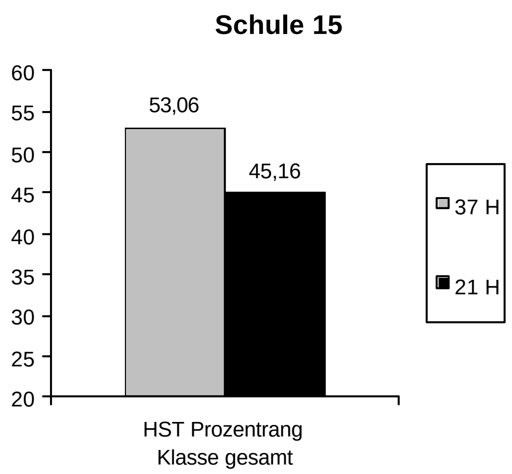


Abb. A 7: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 15, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

8. Schule 08

Beide Lehrkräfte antworten in bezug auf die vorgelegten Szenarien gleichermaßen verfahrensorientiert. Allerdings äußert die Lehrkraft 07 H kein Schulbuch zu benutzen, sondern sich aus verschiedenen Lehrwerken einen eigenen Lehrgang zusammenzustellen. Dies ist m.E. nach nur möglich, wenn man sich im Bereich der Primarmathematik gut genug auskennt. In jeder Schule ist gewöhnlich ein Lehrwerk vorhanden, dass unerfahrenen Lehrkräften aufgrund der curricularen Strukturierung eine mehr oder weniger gute Hilfestellung geben kann. Die Entscheidung, dieses Lehrwerk nicht zu verwenden, lässt eher auf eine vorangegangene intensive Auseinandersetzung mit der Fachwissenschaft schließen. Hierauf weist auch die Angabe der Lehrkraft hin, in den ersten vier Jahren 2 mal wöchentlich schulbegleitend Mathe-Fortbildungen besucht zu haben. Dies so vorhandene mathematische Fachwissen könnte hier bei den Ergebnissen der Schüler den Ausschlag gegeben haben.

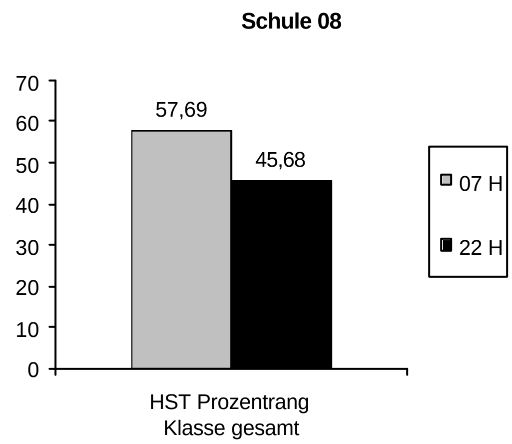


Abb. A 8: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 08, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

9. Schule 10

- Lehrkraft 17 H
  Während die Lehrkraft Szenario 1 noch sehr kurz beantwortet, hier jedoch schon Ansätze für verständnisorientierte Erklärungen erkennen lässt, würde sie den gedachten Schülern in Szenario 2 Hilfen anbieten, die gut mit anderen Inhalten der Primarmathematik verknüpft sind. Hier erfolgte daher Zuordnung zu Stufe 1. Mit der Problematik in Szenario 3 beschäftigt sich die Lehrkraft eingehend und kommt zu dem Schluss, dass es vermutlich noch andere Formen gibt, auf die die Theorie der Schülerin nicht zutrifft. Diese Überlegung würde sie mit der Schülerin zusammen anstellen und offenbart somit einen wichtigen Impuls zur Weiterarbeit für die Schülerin.
- Lehrkraft 41 H
  Die L. präsentiert verfahrensorientierte Erklärungen im Rahmen des ersten Szenarios und bietet in ihren Erklärungsansätzen zum zweiten Szenario keine Ausführungen, die die Zuordnung zu Stufe 3 relativieren könnten. Die erdachte Schülerin in Szenario 3 wird gelobt und ihre Theorie akzeptiert.
- Lehrkraft 19 H
  Die L. erklärt die Subtraktionsaufgaben eher verfahrensorientiert und legt großen Wert auf „Training“ mit mathematikdidaktischen Materialien oder Computerprogrammen. Die Zuordnung zu Stufe 3 im Rahmen dieses Szenarios wird in der zweiten Situation (Multiplikation) eher bestätigt (Stufe 2: verständnisorientiert fehlerhaft). In der dritten Situation akzeptiert die L. die Theorie der Schülerin und würde sie bestätigen („Ja, so haben wir das doch auch immer schon ausgerechnet.“).

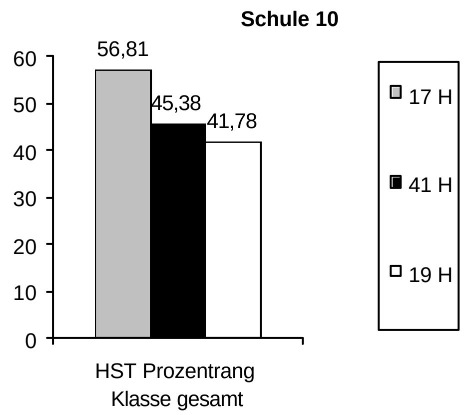


Abb. A 9: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 10, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

10. Schule 02

- Lehrkraft 08 H
  Die L. wurde in bezug sowohl auf Szenario 1 als auch 2 Stufe 4 (verfahrensorientiert fehlerhaft) zugeordnet. Der Schülerin in Szenario 3 begegnet sie mit Lob und Akzeptanz ihrer Theorie.
- Lehrkraft 05
  Im Gegensatz zu Lehrkraft 08 H antwortet diese im Rahmen der Szenarien 1 und 2 verständnisorientiert korrekt und zeigt ein tiefgehendes Verständnis elementarer Mathematik. Die getestete Klasse wurde jedoch - wie sich später herausstellte - integrativ beschult, d.h. etwa 7 Kinder mit Lernbehinderungen, die während der Schulzeit im gleichen Klassenraum von einer zusätzlichen Lehrkraft betreut werden, haben den Test mitgeschrieben, was sich in den Ergebnissen ablesen lässt und die Daten daher nicht vergleichbar macht.

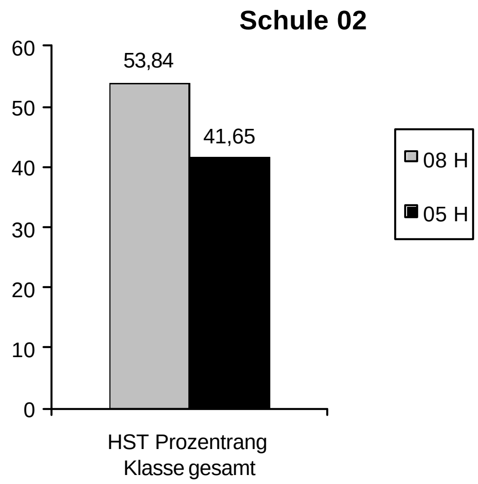


Abb. A 10: prozentualer Anteil des Durchschnitts der Schüler einer Klasse an der Schule 02, die besser waren als die Schüler der Eichstichgruppe 1999 (eigene Darstellung)

3 Anlage: Interviewbogen

1. Schriftliche Subtraktion mit Übertrag

Lassen Sie uns eine Weile ein Thema betrachten, mit dem Sie im Unterricht häufiger zu tun haben: schriftliche Subtraktion mit Übertrag. Schauen Sie sich diese Aufgaben an:

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 91 \\ -\ 79 \\ \hline \end{array}$$

Wie würden Sie an solche Probleme herangehen, wenn Sie in einer dritten Klasse unterrichten? Was müssten Kinder Ihrer Meinung nach verstehen oder tun können, bevor Sie beginnen können, die schriftliche Subtraktion mit Übertrag im Unterricht zu behandeln?

2. Schriftliche Multiplikation

Stellen Sie sich folgende Situation vor:
Einige Lehrer in der sechsten Klassenstufe bemerken, dass mehrere ihrer Schüler bei der schriftlichen Multiplikation den gleichen Fehler machen. Bei dem Versuch, die Aufgabe

123 x 645 =

1	2	3	x	6	4	5	=	1	8	4	5	

zu rechnen, scheinen die Schüler zu vergessen, die Zahlen (also die Teilprodukte) immer eine Spalte weiter „zu rücken". Sie rechnen so

				7	3	8						
				4	9	2						
				6	1	5						
			1	8	4	5						

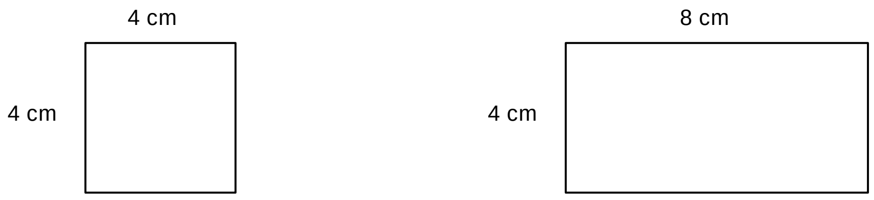
1	2	3	x	6	4	5	=	7	9	3	3	5
		7	3	8								
			4	9	2							
				6	1	5						
		7	9	3	3	5						

anstatt so:

Während die Lehrer sich einig sind, dass dies ein Problem ist, werden sie sich jedoch nicht einig darüber, was zu tun ist.
Was würden Sie tun, unterrichteten Sie in einer sechsten Klasse und beobachteten, dass mehrere Schüler so rechnen?

3. Geometrie

Stellen Sie sich vor, eine Schülerin aus der vierten Klasse kommt aufgeregt in den Unterricht. Sie sagt Ihnen, dass sie eine Theorie ausgeknobelt hat, die Sie der Klasse niemals erzählt haben. Sie erklärt, dass sie herausgefunden hat, dass mit dem Zunehmen des Umfanges einer geschlossenen Figur auch gleichzeitig die Fläche größer wird. Sie zeigt Ihnen dieses Bild, um zu beweisen, was sie macht:



Umfang: 16cm
Fläche: 16 cm^2

Umfang: 24cm
Fläche: 32 cm^2

Wie würden Sie der Schülerin antworten?

4 Anlage: Testdurchführungs-Anleitung

Testdurchführung – Anleitung

Begrüßen Sie die Klasse freundlich. Die Kinder sind höchstwahrscheinlich sehr aufgeregt (so wie Sie vielleicht auch?). Vielleicht hat die Klassen- oder Fachlehrerin Sie schon vorgestellt, ansonsten sollten Sie dies nachholen. Vermeiden Sie aber die Darstellung Ihrer „Lebensgeschichte“ und kommen Sie zügig zur Sache – die Zeit ist knapp bemessen.

Vergewissern Sie sich, dass die Schülerinnen und Schüler Schreibwerkzeug (Bleistift und Radiergummi oder Füller und Tintenkiller) auf dem Tisch bereitliegen haben. Legen Sie sich selbst auf einem Tisch (am besten dem Lehrerpult) eine ausreichende Anzahl angespitzter Ersatzbleistifte und Nebenrechnungsblätter („Schmierblätter“, also einfache DIN A4-Blätter) zurecht.
Sollte während des Testablaufs eines der Kinder Schwierigkeiten mit einem Stift haben oder ein Rechenblatt benötigen, können Sie ihm dies schnell anbieten. Die Schülerin oder der Schüler verliert so keine Zeit bei der Bearbeitung der Aufgaben.

Stellen Sie sicher, dass es eine Uhr gibt, die Sie einsehen können. Wenn Sie eine genau gehende Armbanduhr haben, können Sie diese vor sich auf den Tisch legen, damit Sie nicht immer „offensichtlich“ zur Uhr schauen müssen. Für die Einführung in die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie 12 Minuten Zeit, der Test selbst dauert 33 Minuten.

Bitte teilen Sie zunächst die Testhefte und die Antwortbogen aus und versichern Sie sich, dass die Kinder, die nebeneinander sitzen, unterschiedliche Testformen erhalten haben.

Alle umrahmten Testanweisungen sind so verfasst, dass sie wörtlich übernommen werden können.

Heute führen wir einen Test durch.
Viele Aufgaben werden euch aus dem Unterricht bekannt sein, andere vielleicht nicht. Es gibt leichte Aufgaben, die bestimmt jeder lösen kann, aber auch schwierige, bei denen ihr genau überlegen müsst. Wenn ihr eine Aufgabe nicht lösen könnt, versucht nicht zu raten, sondern geht zur nächsten weiter. Versucht aber, so viele Aufgaben wie möglich zu lösen. Es ist bereits ein Erfolg, wenn ihr einen Teil der Aufgaben schafft.
Zunächst sollt ihr auf dem Antwortbogen euren Namen und eure Klasse eintragen.

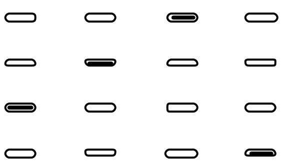
Anschließend führen Sie in die Bearbeitung der Beispielaufgaben ein (Frontseite der 2 Antwortbogen).

Wir machen uns jetzt gemeinsam mit den Testaufgaben vertraut und ihr erfahrt, wie sie bearbeitet werden sollen. Ihr könnt alle Fragen stellen, die ihr habt. Während der Testdurchführung kann ich euch keine Hilfe mehr geben. Dann arbeitet jedes Kind für sich.

Gehen Sie jetzt gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Beispielaufgaben auf der Frontseite der Antwortbogen durch. Achten Sie vor allem darauf, dass die Kinder die Bearbeitungshinweise verstanden haben und ihre Lösungen auf dem ersten Antwortbogen richtig eintragen.

Beispielaufgaben

Rechenaufgaben
(Auf dem Antwortbogen)



1	*a*	*b*	*c*	*d*
2	*a*	*b*	*c*	*d*
3	*a*	*b*	*c*	*d*
4	*a*	*b*	*c*	*d*

Nun beginnt der eigentliche Test. Sie sagen wörtlich oder in enger Anlehnung an den vorgegebenen Text:

Ihr beginnt gleich mit der Bearbeitung des Tests. Auf der ersten Testseite steht oben „S. 26" und „Zahlenverständnis". Dies ist so, weil der Test aus einem Heft stammt, in dem es vorher noch 25 andere Seiten gibt. Deswegen heißt der Teil, mit dem ihr beginnt, auch „Teil 10: Zahlenverständnis".
Es gibt Aufgaben mit Zahlen auf den Seiten 26 bis 28, Aufgaben zu Größen auf der Seite 29, Aufgaben zu einem Diagramm auf der Seite 30, Aufgaben zu einer Tabelle auf der Seite 31 und Rechenaufgaben auf der Seite 32.
Arbeitet diese Aufgaben bis zum Ende der Stunde durch; tragt eure Lösungen in die vorgegebenen Kästchen auf eurem Antwortbogen ein.
Nebenrechnungen macht bitte auf einem leeren Zettel, auf keinen Fall ins Testheft oder auf den Antwortbogen! Seht euch zuerst kurz das Erinnerungsbeispiel auf der Seite 26 an, bevor ihr anfangt. Ihr habt 33 Minuten Zeit. Los geht's!

Nach 33 Minuten:

Schlagt die Testhefte zu. Ihr habt es geschafft.

Sammeln Sie die Testhefte und die Antwortbogen ein.

Nach der Testdurchführung:

Die Antwortbogen (und zwar nur eine Seite, die ohne Namen!) sollen kopiert werden. Fragen Sie die Lehrerin oder die Schulleitung, ob Sie den hauseigenen Kopierer benutzen dürfen. Bieten Sie bitte an, die Kopien zu bezahlen. Sollte dies gewünscht sein, erstatte ich Ihnen die entstandenen Kosten.
Es ist möglich, dass einige Eltern der Kinder in der Klasse der anonymen Kopie nicht zugestimmt haben. Die Antwortbogen dieser Kinder verbleiben anschließend, wie nach dem Kopieren auch die „freigegebenen", bei der Klassenlehrerin oder dem Klassenlehrer.
Schreiben Sie bitte auf jeden Fall auf, wie viele der Schülerinnen und Schüler (also auch getrennt nach Geschlecht und Alter) nicht an der Lernzielkontrolle teilnehmen konnten oder durften (also: Wie viele waren krank, wie viele durften nicht etc.). Es geht dabei nur um die Anzahl und den globalen Grund, nicht um persönliche Daten! Fragen Sie auf keinen Fall nach den Namen oder anderen persönlichen Dingen!
Diese Notizen können Sie einfach auf einem Extra-Blatt notieren und den Test- und Antwortbogen beilegen.
Vermengen Sie bitte auf keinen Fall die einzelnen Antwortbogen verschiedener Klassen miteinander – ich erhalte sonst keine zuverlässigen Datensätze!

Notieren Sie bitte auch die Gesamtzahl der Schülerinnen und Schüler, die normalerweise in der Klasse sind.
Schreiben Sie bitte auch auf, wenn Ihnen etwas ungewöhnliches auffällt – sofern dies irgendwie Auswirkungen auf die Leistungen der Kinder gehabt haben könnte.

Geben Sie bitte die eingesammelten Test- und Antwortbogen bei Herrn Wellenreuther ab. Ihnen allen gutes Gelingen und einen herzlichen Dank für Ihre Unterstützung.

Mit freundlichen Grüßen

Seyd

5 Anlage: Analyse der methodisch-didaktischen Kommentare in Lehrerhandbüchern

Name des Unterrichtswerkes	Nennen von Schülerwissen, das vorausgesetzt werden sollte	vermittelte Verfahren	Alternative	Verständnistiefe der Erklärung im Lehrerhandbuch	Nachvollziehbarkeit der Erklärungen auf den Schülerbuchseiten	Bemerkungen / Fehler oder Widersprüche in den Erklärungen der Lehrerhandbücher
Lollipop	Die wichtigsten Voraussetzungen, die Schüler „mitbringen" müssen, werden genannt.	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Gleichsinniges Ergänzen.	Abziehverfahren, Übertrag durch Eintauschen	Gute, verständnisorientierte Erklärungen, die es einer Lehrkraft erlauben, den Algorithmus selbst richtig zu verstehen. Zusätzlicher Literaturhinweis	Die Schülerinnen und Schüler haben aufgrund der Darstellungen und Erklärungen die Chance, das im Unterricht erlernte zu Hause nachzuvollziehen.	-
Mathematik 3	-	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Gleichsinniges Ergänzen	-	Keine verständnisorientierte Erklärung, stattdessen Handlungsanweisung	Ikonische und formal-abstrakte Darstellungen, jedoch ohne schriftliche Erklärungen.	-
Mathematikus 3	-	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Auffülltechnik.	Abziehverfahren, Übertrag durch Eintauschen	Beschränkt sich auf genaue Handlungsanweisung. Betonung der Formalisierung des Verfahrens („Einschleifen")	Die Auffülltechnik wird nicht gut nachvollziehbar erläutert (s. „Fehler oder Widersprüche"), das Abziehverfahren hingegen sehr gut. Die ikonischen Darstellungen beschränken sich allerdings nur auf „Punktmengen", eine differen-	Das in Kap. 5.4.2. dargestellte Risiko, keine verständnistiefe Erklärung leisten zu können, wenn die Dynamik des Modells nicht miteinbezogen wird, ist hier nicht entschärft. In den vorliegenden Darstellungen entsteht der Eindruck

					zierte Abstufung wäre hier sicher hilfreicher gewesen.	eines Widerspruchs, von einer höheren zu einer niedrigeren Zahl ergänzen zu müssen.
Xalando 3	-	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Gleichsinniges Ergänzen.	-	Beschränkt sich auf genaue Handlungsanweisung.	Gute ikonische Darstellungen (Geld → Einer, Zehnerstangen, Hunderterplatten → Punkte → Ziffern), jedoch *keine* schriftliche Erläuterung	-
Mathebaum	Nur teilweise. Der schriftlichen Subtraktion wird hier aber *direkt* die das Verfahren der schriftlichen Addition vorangestellt. Die hier genannten Voraussetzungen sind zusammengenommen mit denen in den didaktisch-methodischen Hinweisen der Subtraktion vollständig.	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Gleichsinniges Ergänzen.	-	Allgemeine Hinweise, Schlagwörter, keine konkreten Handlungsanweisungen oder verständnisorientierte Erklärungen	Keine ikonische Darstellung, keine verständnisorientierte Erklärung. Text beschränkt sich auf die Sprechweise parallel zur Rechnung.	„Mündliches Rechnen bedeutet Zahlenrechnen - schriftliches dagegen Ziffernrechnen“ Mit Hilfe des Lehrerhandbuches oder Schülerbuches kann kein konzeptuelles Wissen des Algorithmus erarbeitet werden. Sehr allgemein gehaltene Erklärungen. Konkret ist einzig der prozessorientierte Merksatz, der die Rechnung begleitet.
Denken und Rechnen	Verständnis der Differenz als Subtraktion und Ergänzung	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Auffülltechnik.	-	Allgemeine Hinweise, Schlagwörter, keine konkreten Handlungsanwei-	Ikonische- und formal-abstrakte Darstellung. Keine schriftliche Erklärung	Auch in diesem Fall reichen die Darstellungen nicht aus, um die Dynamik (vgl.

				sungen oder verständnisorientierte Erklärungen	des Verfahrens.	Kap. 5.4.2.) des „Auffüllverfahrens“ ausreichend zu erklären. Es entsteht der Eindruck, man würde innerhalb eines Stellenwertes zu einer kleineren Zahl hin ergänzen müssen.
Nussknacker	Verständnis der Differenz als Subtraktion und Ergänzung, Kenntnis des Gesetzes von der Konstanz der Differenz	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Gleichsinniges Ergänzen	-	Allgemeine Hinweise, Schlagwörter, keine konkreten Handlungsanweisungen oder verständnisorientierte Erklärungen. Vermerk zum „Einschleifen“ der additiven Sprechweise für das Ergänzen	Nur formal-abstrakte, keine ikonischen Darstellungen. Keine schriftliche Erklärung des Verfahrens, Fokus auf den Merksatz	-
Leonardo	Kenntnisse über die Stellenwerte und die Darstellung der Zahlen in der Stellentafel	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Auffülltechnik	-	Der Algorithmus wird ausführlich und gut erklärt, zum tieferen Verständnis auch noch das *Abziehverfahren* mit Hilfe Eintauschens geschildert. Leider fehlen ikonische Darstellungen, die das Verständnis sehr erleichtert hätten.	Nur eine ikonische Darstellung, keine schriftlichen Erklärungen. Die Darstellung ist ohne Text nur schwer zu durchschauen.	-
Welt der Zahl	-	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Gleichsinniges Er-	-	Nur allgemeine Hinweise zur Unterrichtsgestaltung.	keine genaueren Erklärungen zum Verfahren, ikonische	Schriftliches Rechnen wird als „kein vorstellendes Rech-

		gänzen		Vermengung von Techniken bei der Erklärung des Übertrags (s.u.)	Darstellungen	nen“ benannt. Es wird die Auffülltechnik mit der Methode des gleichsinnigen Ergänzens vermischt.
Das Zahlenbuch	-	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Auffülltechnik	-	Der Algorithmus wird mit Hilfe des sogenannten „Zählermodells“ nachvollziehbar erklärt.	Die Darstellung der verschiedenen Rechenschritte ist nur schwer nachvollziehbar. Haben die Schüler den Algorithmus nicht im Unterricht verstanden und können ihn mit Hilfe der noch in Erinnerung gebliebener Erklärungen nachvollziehen, wird dies zu Hause ein schwieriges Unterfangen.	Der in Kap. 5.4.2. dargestellte Widerspruch, den die Auffülltechnik beim Ergänzen innerhalb einer Spalte beinhaltet, wird nicht erklärt Gelöst wird dies im Buch durch den Zähler, der die dauerhafte Anschauungsgrundlage sein soll. Die Plättchendarstellung hat nur vorübergehende Bedeutung.
Zahlenreise	Alle wichtigen Voraussetzungen werden genannt	Ergänzungsverfahren, Übertrag durch Gleichsinniges Ergänzen	-	Mit Hilfe der Abbildungen und Texte im Schülerbuch können die Erklärungen gut nachvollzogen und verstanden werden.	Ikonische Darstellung in Zusammenhang mit Text ermöglicht ein gutes Verstehen außerhalb des Unterrichts.	-

6 Anlage: Interviewprotokolle Hamburg

6.1 *Protokoll 01 H*

Alter der Lehrkraft: *43 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *21 Jahre*

Schulbuch: *Das Zahlenbuch oder selbstzusammengestelltes Material, s. Kommentar zum Mathebuch am Ende des Protokolls*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also, was an Vorbedingungen sozusagen auch schon da sein müsste... Ja, fängt man jetzt damit an, was schon in Klasse 1 oder so... Also sie müssen natürlich das Minuszeichen, den Begriff Subtraktion kennen, das Minuszeichen als solches kennen, sie müssen die Einer-, Zehner-, Hunderterstellen kennen, weil man's ja... Na, bei der Addition hatten sie's ja auch schon, bei der schriftlichen wahrscheinlich, weil da minus kommt – das sollte ihnen alles bekannt sein. Also im Grunde müssten sie solche Aufgaben schon rechnen können, bloß eben noch nicht untereinander – so kurz zusammengefasst, denk ich mal. Und dann, da sie's von der schriftlichen Addition her schon kennen, würden sie sich dann versuchen genauso dran zu machen und es würde eben nicht klappen. Dann müsste man sie wahrscheinlich auf den richtigen Weg bringen.

Wie würden sie da ´ran gehen?

Ich würde die Kinder erst mal versuchen lassen! Aber sie würden dann, wenn sie erstens mal merken, dass sie mit der schriftlichen Addition nicht weiterkommen, werden sie ja sicherlich versuchen fünf minus sieben – jetzt bei der ersten Aufgabe – zu rechnen und ich weiß nicht, ob es nun – oft sind ja in einer Klasse dann schon Kinder, die es doch irgendwoher schon können, und die bringen einen dann ja meist auf den richtigen Weg, ich kann nicht beurteilen, ob sie sonst von alleine drauf kommen würden auf diese Ergänzungsmethode – wenn man denn diese Ergänzungsmethode nimmt, da gibt's ja auch wieder die beiden verschiedenen: einmal Ergänzen und wie heißt die andere, Bündeln oder?

Welche meinen Sie?

Ja, man kann ja jetzt entweder rechnen... Wie war das? Ich hab mir die andere wieder völlig abgewöhnt. Ich rechne jetzt von sieben bis fünfzehn, aber es gibt ja noch die andere Methode beim schriftlichen Subtrahieren. Ich weiß im Moment aber nicht wie die heißt. Die wird teilweise auch angewendet und das führt dann immer so zu einem gewissen Durcheinander. Also ich mach diese Ergänzungsmethode. Ich weiß nicht, ob die Kinder darauf kommen würden, ich denke eher nicht – also da müsste man dann schon den Hinweis geben.

Da passiert ja eine ganze Menge oben, wenn Sie sagen, Sie rechnen sieben bis fünfzehn – hab ich Sie eben gerade richtig verstanden?

Ja, dann muss man natürlich sagen, sieben bis fünf geht nicht, also müssen wir über den Zehner rüber und dann bis zur Fünfzehn ergänzen...

Ja... Wenn ein Kind nachfragen würde, und sagen würde: „Wie kommt diese Eins da zustande, wie kann es sein, dass da auf einmal diese fünfzehn steht?“

Ja, eben mit der Begründung, weil man von sieben bis fünf nicht ergänzen kann, also muss man in den nächsten Zehner, sozusagen, gehen. Sich einen borgen, oder wie sagt man?

Ach so, und woher borgen Sie den dann?

Von nebenan!

Ah ja! Dankeschön.

Frage 2

Ich würde die Nullen als Platzhalter wieder einführen, so, wie ich es auch sowieso mache. Damit wird nämlich auch deutlicher, ob man mit Einern, Zehnern oder Hundertern rechnet... Ja, so kurz....

Frage 3

Geht das jetzt darum, sag ich mal, pädagogisch, ob ich sie nur loben soll, was sie da Tolles entdeckt hat, also wie ich reagiere, oder um das Mathematische jetzt? Da muss ich mal gucken...Heut ist mir nicht so ganz klar, worauf das hinaus läuft, ehrlich gesagt. [Schweigen] Ich weiß nicht, worauf das hinausläuft, also die Fläche hier ist größer als da, das...

Also, es hilft, wenn man sich die Situation vorstellt: Das Mädel steht jetzt vor Ihnen und sagt: „Frau X[1], das hab' ich mir gestern Nachmittag..."

Ja, da würd´ ich natürlich erst mal sagen: „Das hast du ganz prima gemacht, und überhaupt, das find ich ja schon mal wunder..." Das war auch meine Frage, also das find ich schon toll, denn das ist ja nicht unbedingt üblich, sich nun damit auseinanderzusetzen.
Nee! Das ist ja nicht... Es ist nicht unbedingt üblich sich damit zuhause auseinanderzusetzen, also das würd ich schon sehr lobend hervorheben, wenn das keine Hausaufgabe oder so wäre. Denn sonst bremst man sie ja gleich wieder, in ihrem Elan. Aber sonst weiß ich nicht, worauf das so... Dass sie das herausgefunden hat, dass man ihr nun sagen muss, das ist nicht ihre Erfindung... Dass es eben so ist, dass die Fläche zunimmt. Also mir ist nicht so ganz klar, worauf das hinausläuft...

Also, es geht um Ihre Herangehensweise. Also, Sie schildern, was Sie jetzt machen würden, wenn diejenige jetzt vor Ihnen stünde in der Situation. Das ist eine ganz offene Situation, das ist wie aus dem Leben gegriffen... Auch wenn es natürlich – ich hab´ es auch noch nicht erlebt, dass eine Schülerin aus der vierten Klasse so ehrgeizig ist, aber vorstellbar wär´ es ja... Vielleicht hat sie ja mathematischen Hintergrund, oder sie hat interessierte Eltern, und vielleicht hat sie ja didaktisches Material zuhause und vielleicht ist das ihr Hobby und sie hat sich das zuhause ausgedacht und kommt jetzt ganz stolz zu Ihnen in den Unterricht.

Ja, dann würd´ ich das noch mal mit ihr durchgehen und sie motivieren weiter so zu machen; was auch immer ich dann zu ihr sage, aber in der Hoffnung, dass sie das motivieren würde, weiter so an solche Probleme ranzugehen.

Mathebuch
Mit gar keinem. In Klasse Vier hab´ ich gar kein Buch, da haben wir nur so ein Geometrie-Arbeitsheft dieses Schuljahr, und hol mir alles andere so zusammen und wie heißt denn das, was wir hier sonst immer haben?

[1] Name wurde vom Verfasser durch eine Lehrstelle ersetzt

Ein Geometrie-Arbeitsheft? Wissen Sie, wie das heißt?

Ja. *Felix und Felicitas*.

Aha. Und sonst stellen Sie sich aus vielen verschiedenen Büchern dann den Lehrplan zusammen?

Ja, genau! Weil ich es immer so schade finde, die dicken Bücher schreiben sie dann doch immer nicht voll und es ist so teuer, wir haben immer nur so wenig Geld. Lieber nur Ko... Kopieren können wir komischerweise so viel, wie wir wollen – insofern hab´ ich das Geometrie-Arbeitsheft, weil man das schlecht kopieren kann, mit den Farben und so, und das andere kopier ich selbst. Also, wir haben hier aber ein Buch an der Schule, welches... da muss ich mal gucken, ich hab hier... In Klasse 1, ich glaube *Das Zahlenbuch*, genau. In Klasse 1 benutz´ ich das auch, aber in Klasse 4 eben nicht.

Und Klasse 2, 3 auch noch das Zahlenbuch, oder haben Sie da dann schon diesen etwas freieren Umgang, dass Sie sagen, Sie nehmen sich das aus verschiedenen Büchern...

Ich hab´ nur Klassen übernommen bis jetzt und dann war da das Buch, und in Klasse 4 hab ich dann jetzt nicht mehr genommen.

6.2 *Protokoll 02 H*

Alter der Lehrkraft: *55 Jahre*
Bisher geleistete Dienstzeit: *30 Jahre*
Schulbuch: *Unterrichtet auf Grundlage von Mathebaum*
Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Klar. Also, sie müssen vorher wissen, dass es zu Minusaufgaben Plusaufgaben gibt, also diese Umkehraufgaben, und ich gehe ran mit einfachen Aufgaben, so „Wieviel ist 99 minus 98?“ und „Warum könnt´ man das sofort rechnen?“ „Ja, weil von 98 bis 99 eins fehlt, also dieses Ergänzungsverfahren. Das ist an ganz einfachen Aufgaben, dass wir das wiederholen. Und dann hab ich erst mal so ne Reihe Ergänzungsaufgaben zum vollen 1000er erst, also 327 bis 1000, erst mal das so in mehreren Schritten, zum Zehner, zum Hunderter, zum Tausender – das hab ich eine ganze lange Weile geübt – und dann mach ich Ergänzungsaufgaben von meinetwegen 187 bis, ja wo der Zehner überschritten wird, und übe dann schon die Zehner-Überschreitung. Und da kommt das eigentlich schon mit dem Übertrag, dass es einen Zehner weiter ist, und dann ergibt sich dieses dabei ja automatisch. Also angefangen bei diesem Einfachen, dass man bei einer Minusaufgabe nicht nur wegnehmen kann, sondern dass man auch ergänzen kann. So, das ist meine Vorgehensweise.

Und diesen Übertrag, da passiert ja einiges oben, wenn dann... [Kindergekreische] Sollen wir unterbrechen und später weitermachen?

Ja, ist glaub ich besser...

[es ist später geworden] Dieser Übertrag, wie würden Sie den einführen, diesen Übertrag, wie würden Sie den erklären?

Ja, das ist die einzige Schwierigkeit, das ist wirklich diese Schwierigkeit. Wir haben, wenn ich diese Reihen aufgeschrieben habe, dann sehen die immer, dass es schon einen weiter ist, und da hab ich da _uch *[Wort fast unhörbar, da unterbrochen von schreienden Schülern, entweder such oder fluch]* ich eben wirklich rum, und sag ihnen, dass wir da schon, ja, das ist jetzt das echte Problem, dass wir da schon einen Zehner weiter sind. Also ich muss das jetzt eigentlich bildlich noch mal sehen.

Wie hab' ich denn gesagt, dass wir das da aufschreiben. Also das geb' ich vor. Ich hab' es nicht gemacht mit diesem von oben... Und da bin ich immer selber am Schwanken, ob es besser wäre, wenn man dieses Minus, wenn man wirklich da, wie das früher gemacht wird, fünf geht nicht, fünfzehn, dass da oben einer schon geborgt wird. Und da, also da, das ... ist ein Knackpunkt, da winde ich mich teilweise ein bisschen wie ein Aal.
Ich sag ihnen, dass wir dabei dann bis zwölf ergänzen *[meint jetzt die zweite Aufgabe]*, sag ich, dann sind wir, praktisch hier, ja dann sehen sie ja, dass wir – ach, ich muss – erst mal ausschalten – also ich muss erst mal in Kladde...

[Tonbandgerät ist wieder eingeschaltet] Kann ich noch mal sagen? Also, ich schreibe hier erst mal die Zahl hin 127, und das wird ergänzt zu einer sehr viel größeren Zahl. Und dann sehen sie schon, wenn hinten sieben Einer sind und hinten sind fünf Einer, dann muss ich praktisch einen Zehner weiter gehen, dann komm ich von 127 schon zu 135. So, und dann bin ich hier einen Zehner weiter gekommen.

Verstehe. Und der Zehner wird dann unten notiert...

Der wird dann unten notiert. So, und dann geht das so schrittweise weiter. Das ist so mein Weg, den ich da gefunden habe. Weil für mich auch einigermaßen wichtig ist, dass ich das einigermaßen kapiere, dass das so auch nachvollziehbar ist.

Dankeschön... Da sind zwei Schülerinnen von Ihnen...

Frage 2

Also dann würd' ich sie als erstes damit konfrontieren, dass es eigenartig sein muss, dass sie sich die Aufgabe noch mal angucken müssen. 123 mal 600, dass es das Ergebnis 1800 ergibt. Und dann würd' ich sie noch mal... „Guck' mal, wie viel ist 6 mal 100?" 600 und kann das...? Also, nee, 6 x 100 ist schon 600, aber 600 mal 100 muss doch schon sehr viel mehr sein. Also, darüber erst mal hinweisen, dass sie das darüber merken können. Und ich mach' es in Mathe so, dass ich sie immer die Nullen schreiben lasse, grundsätzlich, ich lass diese freien Spalten... Sag: „Das könnt ihr nachher weglassen, wenn ihr ganz sicher seid, aber bitte schreibt da die Nullen! Du nimmst erst alles mit 600 mal!", dass es denen deutlich ist, und lass diesen Schritt eigentlich auch stehen. Und ich finde, dass ist nicht mehr Schreibarbeit und ihnen wird sehr viel deutlicher, womit sie mal nehmen. Ja.

Frage 3

Ich würd' erst mal sagen: „Find ich richtig toll, dass du das merkst, dass das auch mehr Fläche wird, wenn das größer wird." So. Das find' ich erst mal super, dass sie das erkannt und dass sie sich das rausgeknobelt hat. Und also, sie hat dann rausgefunden, dass das so ist, und wieso, was soll ich jetzt noch? Und dass sie mir das zeigen soll, wie sie darauf gekommen ist. Wie sie das ausgerechnet hat, welchen Weg... Also, das würde mich interessieren, wie sie das rausgefunden hat.

Also, sie hat es ja rausgefunden, sie hat diese beiden Dinge zuhause aufgezeichnet. Und vielleicht haben sie im Unterricht, könnte sein in der dritten Klasse, ja Umfangsberechnung und Flächenberechnung, macht man ja manchmal schon in vereinfachter Form, und dann hat sie sich das ja einfach so gesagt: „Umfang wird größer, also wird auch die Fläche größer. Und hat das so aufgezeichnet, hat sogar ein Beispiel gegeben, und steht jetzt vor ihnen: „Ooh, Frau X ...!"

Mmh, klasse!

Ja!

Ja. Das find ich erst mal klasse, dass sie das rausfindet; und dass sie sich überhaupt damit selber beschäftigt. Das find ich schon Spitzenklasse. Und dann würd' ich sie fragen, wie sie gegangen ist, und dann würd' ich sagen: „ja guck mal, und du hast Recht, und guck mal, dieses, da hast du gesehen, das ist doppelt so groß, Mensch!" Also, da würd' ich wahrscheinlich sagen: „Ja, guck mal, stimmt, dieses ist so lang gewesen, das noch mal, ja, das ist doppelt so groß oder...!" Also, ich freu mich, muss ich sagen, wenn die Kinder mit eigenen Sachen da kommen, find ich schon toll!

Gut, Dankeschön. Das war's schon. ...

6.3 *Protokoll 03 H*

Alter der Lehrkraft: *40 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *18 Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen, neueste Ausgabe (Euro)*

Fakultas Mathematik: *Nein*

Frage 1

Die Kinder müssen, bevor sie diese Aufgaben untereinander rechnen können, das Ergänzen beherrschen. Zum Z ergänzen: 42 plus wie viel ist gleich 50.
Ein Zahlbegriff muss da sein, dass sie überhaupt wissen, welcher Zehner da ist und welcher davor ist.
Ganz wichtig, das habe ich besonders geübt, sind einfach sture Ergänzungsaufgaben. Noch gar nicht über den Zehner weg, sondern einfach erst mal so ergänzen, ergänzen, ergänzen.

Bevor Aufgaben mit Übertrag gerechnet werden, müssen erst mal Aufgaben ohne Übertrag gerechnet werden. Z.B. 45 – 22, das also dieser Übertrag noch gar nicht mit drin ist.
Hier kann auch erst mal das Ergänzen geübt werden. Also z.B. 2 + ? = 5. Das denen das erst einmal klar ist. Es wird ja nicht gerechnet: 5-2, sondern, dass ihnen gleich von Anfang an bewusst wird: es wird von oben nach unten gerechnet.
Und es geht eben bei den Einern los. Auch das muss klar sein. Das ganze Stellenwertsystem der Zahlen, H, Z, E, und das eben klar ist, ja, jetzt ergänzen wir von der 2 bis zur 5, also 2 plus wie viel = 5. Dann schreiben wir die 1 dort unten hin *(Anmerkung: Die Lehrkraft scheint hier kurz die Subtraktion mit Übertrag verwechselt zu haben mit der ohne Übertrag)*
Dann haben wir eine Aufgabe 2 + ? = 2. Auch das ist für die Kinder einfach zu rechnen.
Und wenn das an die Überschreitung geht, dann habe ich das nicht gleich mit Zahlen gemacht, sondern es erst auch so bildlich dargestellt. Z.B. mit 10-Pfennigstücken, die wir dann hatten. Wir leihen uns dann halt von den Zehnern einen. Wir können ja nicht rechnen: 7 + ? = 5, das geht ja nicht. Sondern da leihen wir uns jetzt von den Zehnern, leihen uns einen von den Zehnern, nehmen den halt praktisch mit, ergänzen bis zur 15, jetzt haben wir eine Zahl ausgeliehen, die müssen wir auch wieder zurückgeben. Also schreiben wir sie uns an die Zehnerstelle dazu, diese kleine 1 und addieren die beiden Zahlen und ergänzen dann wieder zur obersten Zahl.

Das ist eine einzige Überei und Bimserei, gerade das den klar zu machen: Ich rechne von oben nach unten und ich ergänze. Denn viele haben von ihren Eltern Minus auch auf ganz vielen verschiedenen Wegen beigebracht bekommen. So ist dann vielen einfach nicht klar, auch wenn es dann so bildlich dargestellt wird.
Bevor es ans Untereinander-Rechnen geht wird ganz viel nebeneinander und schrittweise gerechnet. Nur mit dem Zehner und dem Einer. Vorstufe von dem Ganzen ist eben das sture ergänzen. Immer ergänzen zum Z, und wenn es dann zu einer gemischten Zehnerzahl kommt, dann eben zum Einer ergänzen. Das denen das einfach in Fleisch und Blut übergeht.
Und eben dieses Leihen. Man leiht sich eine Zehnerzahl und gibt sie dann hinterher wieder zurück.
Oder manchmal ergänzt man ja auch zu einer Zwanzigerzahl. Das dann halt eine 2 dort steht. Das diese Zahlen halt nicht vergessen werden (*meint den Übertrag*).
Was eine häufige Fehlerquelle bei Kindern ist, das sie eben oft Plus anstatt Minus rechnen. Sie fangen dann hinten an, Minus zu rechnen, wenn sie dann vorn ankommen addieren sie aber plötzlich wieder. Quasi ein Mixmax also. Aber es sind (*dies*) dann oft Kinder, die mit Zahlen Schwierigkeiten haben und damit dann gar nicht so zurechtkommen. Obwohl ich merke: dieses Untereinanderrechnen ist für viele eine ganz große Hilfe. Anstatt das jetzt hier nebeneinander zu rechnen, also 45-20-7, die Aufgabe dann so zu lösen. So haben wir ja praktisch noch den Schritt davor (*meint die Subtraktion nebeneinander*).
Es ist eben wichtig, beim Minus-Rechnen immer dieses Ergänzen im Kopf zu haben. Immer von unten nach oben und immer ergänzen.

Frage 2

Was mir so spontan einfällt – also ich hab' noch nie Mathe in einer sechsten unterrichtet – aber was ich wahrscheinlich erst mal wieder machen würde, wäre wiederholen. Die Stellenwerttafeln: H, Z, E.
Und dann beim Untereinanderaddieren ist es ja ganz einfach. Wir multiplizieren erst die Hunderterzahl und schreiben das Ergebnis natürlich auch an die Stelle, multiplizieren dann die Zehnerzahl und dann die Einerzahl und rücken dann die Ergebnisteile auch immer an die entsprechende Stelle. Wenn es hier dann heißt 123 x 6, dann wird halt 3 x 6 gerechnet und wir schreiben dann die erste Zahl direkt unter die Hunderterstelle. Ich würde es vielleicht auch farblich noch einmal markieren, H, Z, E darüberschreiben... Ja, so würde ich da wahrscheinlich herangehen. So dass den Schülern erst mal wieder die Stellenwerte klar sind. Vielleicht würde ich noch die

Nullen dazusetzen. Im vierten Schuljahr machen wir es ja anfangs noch so, die werden dann hinterher auch weggelassen.
Wir nehmen ja die Zahl nicht nur mit 6 mal, sondern es ist ja eigentlich eine Hunderterzahl. Es müssten dann noch die Hunderter als Nullen dastehen. Ja, so würde ich da glaub' ich erst mal `rangehen.
Das Problem ist wirklich, dass die Zahlen nicht richtig untereinander stehen. Ob das jetzt das gelbe vom Ei ist, weiß ich nicht, ich bin eben kein Mathematiker, aber so denke ich, würde ich da herangehen.

Also, wenn Sie später noch etwas hinzufügen möchten, können Sie das sehr gern tun....

Ja, oder vielleicht auch wieder klar machen – wieder Zahlen zerlegen: Ich multipliziere erst mit der 600, dann mit der 40, mit der 5, dann hab' ich halt die Nullen, die hier fehlen, also die schreibt man dann halt noch hier mit dazu und dann wird es ganz ... ja ... also, ich denke, ich würde wirklich erst ganz stur an der Tafel beginnen und denen das dann so klarmachen, eben auch farblich an der Tafel kennzeichnen: H, Z, E und dann womöglich auch die fehlenden Nullen dazuschreiben, die dann ja auch noch klarmachen, dass ich dann zuerst 123 x 600 und dann halt 123 x 40 und dann mal 5, dass denen das auch klar ist.

Frage 3

Da muss ich selber erst mal überlegen (*lacht nervös*)

.... denkt nach und murmelt dabei den Kernsatz der von der Schülerin aufgestellten Behauptung .... schweigt ca. 5 Sek.

Ja, auf welches dieser Bilder bezieht sich das denn jetzt?

Das bezieht sich auf beide Bilder. Sie sagt ja ... Sie sehen diese Figur links. Bei der Figur rechts daneben ist die Fläche ja größer geworden und der Umfang auch. Und die Schülerin steht nun vor Ihnen und sagt: „Sehen Sie, mit dem Zunehmen des Umfanges wird auch die Fläche größer.“

10 Sek. Schweigen

Sie stellt das so als Gesetz für sich auf.

Ist doch klar: Wenn der Umfang größer wird, dann wird ja auch die Fläche größer.

Überlegt 12 Sek.

Aber das versteh ich jetzt auch nicht. Sie will jetzt beweisen ... da, was macht sie denn? Sie zeigt Ihnen dieses Bild, um zu beweisen, was sie macht. Was hat sie denn da gemacht?

Naja, sie hat sich das ja ausgeknobelt. Wahrscheinlich hat sie, als sie sich diesen Beweis ausgeknobelt hat, zu Hause gedacht: Ich muss schon irgendetwas dazu zeigen. Um damit zu erklären und vielleicht auch anhand dieses Bildes zu beweisen, dass das, was sie sagt, wahr ist. ... Wahrscheinlich hat sie zuhause diese beiden Rechtecke gezeichnet und dann festgestellt: Ups, wenn der Umfang größer wird, wird ja auch die Fläche größer. ... Und kommt damit zu Ihnen in den Unterricht.

Also .. was würde ich dann machen ... antworten ... wenn der Umfang größer wird ... Also dazu fällt mir jetzt gar nichts ein. Muss ich ganz ehrlich sagen.

13 Sek. Schweigen

Ja, da hat sie doch recht!

8 Sek. Schweigen

Also, da fällt mir im Moment ... tja ... (*hebt die Schultern*)

Stellen Sie sich ruhig die konkrete Situation vor. Die Schülerin steht da so vor Ihnen, hält Ihnen so dieses Bild hin ... Was würden Sie spontan antworten?

18 Sek. Schweigen

Ich würde es vielleicht mal an einem anderen Beispiel auch noch mal mit ihr durchnehmen. Im Moment muss ich aber erst mal passen.

6.4 *Protokoll 04 H*

Alter der Lehrkraft: *55 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *30 Jahre*

Schulbuch: *verwendet kein Buch. Begründung:*

- *Entscheidende Dinge werden zu kurz abgehandelt*
- *Es müssten in einem Schulbuch mehr schematische Übungen als bislang vorhanden sein*
- *Viele Sachaufgaben sind viel zu kurz abgehandelt, die Schüler werden dadurch überfordert.*

Aufgrund dieser Argumente sei ein Schulbuch einfach zu teuer.

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Bei den drei Aufgaben würde ich als allererstes den Strich verändern. Denn wir haben überhaupt nicht genügend Platz, um einen Übertrag darunterschreiben zu können.

Also....(*erklärend*), ich lasse den Übertrag unten hinschreiben.

Das ist jetzt vom Äußeren schon mal.

Vom Inhaltlichen wollen Sie ja wahrscheinlich wissen, bevor ich mit dieser Aufgabe anfange, was ich dann haben muss.

Also, ich brauche auf jeden Fall, ohne dass die Kinder dieses hier sehen, zwei, drei, vielleicht sogar vier Stunden, um mir mit ihnen noch einmal ein Stellenwertsystem anzugucken.

In diesem Stellenwertsystem habe ich Plättchen, keine Zahlen, und diese Plättchen werde ich dann eintauschen, sodass der Zehnerübergang klar ist, dass das eine eingetauschte Sache ist. Und von daher auch ein Verfahren mit dem Stellenwertsystem mit den Plättchen machen, bevor ich auf diese Zahlen überhaupt komme.

Dann werde ich das selbe wahrscheinlich mit Geld machen. Und beim Geld ist das Problem, dass ich den Groschen erst mal eintauschen muss, d.h. ich habe ein Stück, was ich in zehn andere Stücke umtauschen muss, bevor ich dieses hier machen kann (*deutet auf den Übertrag*).

Und wenn ich das raushabe, dann gebe ich diese Zahlenaufgabe, und dann vergleiche ich das, was ich gehandelt habe, mit dem, was ich jetzt hier rechne. Und dann erst wird das Verfahren angesetzt.

Und dann werde ich das Verfahren, das hier in Hamburg gemacht wird – das Ergänzungsverfahren – von 9 ... also, wenn ich jetzt hier diese erste Aufgabe nehme: Ich stehe auf der 9 und gehe weiter zur 11. Von 9 bis 11, d.h. erst mal geht das na-

türlich schief. Ich steh' auf der 9 und geh' bis zur 1. Rückwärtsgehen darf ich nicht. Ich muss immer vorwärtsgehen. Also gehe ich von der 9 bis zur 11. Aber das ist ein wahnsinniger Prozess, da brauche ich also mehrere Stunden.
Also, dieses „Gehen" mache ich auch wirklich vor. Dass man also vorwärts geht, bis zur 11, dass ich also 2 Schritte brauche. Dann habe ich die 2 da unten. Weil ich aber bis 11 gegangen bin, muss ich mir diesen Zehner, also habe ich mir diesen Zehner genommen, um überhaupt bis zur 11 gehen zu können. Das ist genau dasselbe, als wenn ich mir diesen Groschen eingetauscht hätte.
Und dann geht dieses Verfahren los. So, das ist der eine Teil, der Verständnisteil. Da habe ich zwei Drittel meiner Schüler erreicht, ein Drittel habe ich nicht erreicht. Dieses eine Drittel, dem helfe ich, indem ich sage: Weißt du, erst mal machen wir das Verfahren. Und danach sag' ich dir noch mal die Verständnissache. So dass die Kinder vom Verfahren erst mal sicher sind und dass ich dann nach einem gewissen Übungsabstand, das ist also sicherlich, sind sicherlich zwei Monate, dass ich nach diesem Übungsabschnitt noch einmal sage: So, und nun erklär' ich dir noch mal, was dahintersteht. Und dann fange ich noch einmal mit den Groschen an, die ich austausche.
Und dann habe ich doch bei den meisten Kindern erfahren, dass selbst diese Kinder, die schwach vorher waren, irgendwo sagten: Ach, deswegen mache ich das! Also, dann haben die das – hoffe ich – vom Verfahren verstanden.
Den anderen Kindern, die das von vornherein eigentlich gedanklich „gecheckt" haben, den kann ich dann sagen: So, es gibt jetzt noch mehrere Möglichkeiten des Verfahrens mit Minus. Ich brauche das nicht im Ergänzungsverfahren zu machen, ich kann das auch anders machen. Und dann gebe ich verschiedene Möglichkeiten, und dann sage ich ihnen: So, welche Möglichkeit du dir aussuchst, ist deine. Das Ergebnis muss richtig sein.

Welche Möglichkeiten würden Sie noch vorstellen?

Wir können auch sagen: Ich habe die 11, hier, zur 9 runter, also 11-9 sind 2. Da ich 11 gesagt habe, muss ich hier eine 1 davor schreiben.
Ich habe aber erfahren – also, einmal ist es in Hamburg so, dass es hier das Ergänzungsmodell ist. Ich habe aber auch erfahren, dass es für die „schwachen" Kinder wirklich einfacher ist, wenn man dieses Verfahren – wie ich das auch sage: ich gehe wirklich diese Schritte. Dass sie das vom Verfahren her auch wirklich damit einleiten können: Also gut, dieses Verfahren kann ich mir aneignen.

So, und wenn ich dieses Verfahren – ich hoffe, dass es die meisten vom Inhalt her verstanden haben und ein kleiner Prozentsatz das „nur“ mit Verfahren kann – aber auf dem Verfahren reite ich dann rum. Denn ich finde es irrsinnig wichtig, dass die Kinder so etwas können. Ob es nun mit oder ohne Verstand ist.
Aber, wie gesagt, ich erleichtere es ihnen auch, indem ich z.B. – also, zu Anfang müssen unbedingt die Kästchen hierher. Und dann muss unbedingt der Strich tiefer sein. Damit man also wirklich seine „Merk-Einsen“ dahinschreiben kann.

Sie sagten, sie tauschen ein... aus welcher Stelle würden Sie eintauschen?

Also, ich würde das jetzt zu Anfang wirklich nur zweistellig machen. Und dann eben in der Zehnerstelle tauschen – ist ja klar. Kann ich ja nicht anders.

Also, ein Zehner, und dann würden Sie auch zehn Einer dahinlegen.

Ja. Und die Stellenwerttafel darf auch nur zehn Kästchen haben, nicht mehr! Denn mehr kann ich ja nicht. Denn dann ist das voll.
Hier darf ich ja nur eine einstellige Zahl reinschreiben und keine Zehn.

Ach so, Sie meinen, es dürfen nur zwei Kästchen nebeneinander sein?

Das sowieso, aber untereinander dürfen nur zehn Kästchen sein.

Aber, wenn sie den einen Zehner eintauschen, wären hier doch dann 11?

Ja, das ist richtig.

Oder legen Sie die 10E neben den einen E?

Ja, genau.

Und dann haben Sie hier ja aber nur noch acht...

Nein, dann habe ich hier unten eine1, und wenn ich jetzt schräg gucke, ist das die 11.

Ach so. Jetzt verstehe ich.

Und dieses Schräg-Gucken kann man nämlich überall machen. Bei der Addition – überall. Oder bei 21. Als, wenn hier jetzt z.B. ein stärkerer Übergang wäre.

Aber das ist ein langer Prozess. Das ist mit das Schwierigste, was wir im dritten Schuljahr haben. Viel Zeit nehmen.
Aber wenn ich das im dritten Schuljahr einmal so ausführlich gemacht habe, dann habe ich's im vierten Schuljahr einfacher. Dann hole ich mir zwar die Stellenwerttafel wieder heraus, aber dann brauche ich das nur in einer Stunde noch einmal aufzudröseln, und dann läuft das.
In meinem jetzigen vierten Schuljahr können wirklich alle fehlerfrei ihre Subtraktionsaufgaben in allen... also bis zur Million, das ist kein Problem.

Frage 2

Also, das ist auch wieder ein Stellenwertproblem. D.h. bei dieser Aufgabenstellung würde ich noch einmal zum Halbschriftlichen zurückgehen, würde also 123 x 600, 123 x 40 und 123 x 5 rechnen lassen.
Beziehungsweise... ich würde den Schülern sagen: So ist es falsch. Wir müssen uns an dieser Aufgabe irgend etwas einfacher machen. Wir nehmen uns die zweite Zahl und machen sie einfacher, nämlich 600 40 5. Zusammen sind das 645. So, und daneben kommt wieder ein Stellenwertsystem, und dann wird richtig 123 x 600 gerechnet und das wird eingetragen in das Stellenwertsystem. Und dann wird von der 123 x 40 danebengeschrieben und ins Stellenwertsystem eingetragen. Dann habe ich im Grunde genommen das (*zeigt auf die Teilprodukte*) mit den Nullen hinten dran. Und dann ist es eigentlich den Schülern schon klar, dass man, wenn man das so schön in die Stellenwerttafel einsetzt, dieses also auch wirklich anständig addieren kann.
Dann würde ich hierauf wieder zurückgehen und dann diesen Bereich ruhig mit den Nullen schreiben lassen. Dass den Kindern klar ist: Aha, hier ist die Einerstelle, da die Z, und dergleichen. Und wenn das nicht klappt – wobei ich sagen muss: Im sechsten Schuljahr muss das aus dem ff gehen, aber das hier ist ja eine konstruierte Angelegenheit, nicht wahr? – wenn das nicht klappt, mache ich es auch so, dass ich dann noch einmal bei den zweifelnden Schülern hier wirklich hineinschreibe: Da, unter die 5, das sind die E, das sind die Z, H, und dergleichen. So dass auch hier noch einmal das Stellenwertsystem (*Wort nicht verstanden*...).
Wenn das gemacht worden ist, sage ich häufig den Schülern: So, und nun machen wir uns das einfacher. Nun haben wir ja verstanden, warum wir die Stellen da aus-

lassen. Wenn du mit den 6, also mit den Hundertern anfängst, schreibst du deine erste Ziffer auch unter die 6. Denn dann hast du automatisch hier zwei Stellen freigelassen. Und wenn du mit der nächsten Zahl beginnst, automatisch unter diese Zahl.
Das hat nämlich den Vorteil... wir sind uns ja gar nicht sicher, dass wir bei der 6 anfangen müssen. Wir können ja auch bei der 5 anfangen.
Also, wichtig ist, dass die Kinder verstanden haben: Das lasse ich ja nur aus, weil es mir zu viel Schreibkram mit den Nullen ist – und etwas anderes ist es ja auch nicht, ne?
Und ich mache es mir immer einfacher. Warum soll ich so viel schreiben, wenn ich verstanden habe, dass das eben, also die 600 ist ja die 100..., die 40 ist ja der Z... Und dann komme ich noch einmal auf das Schematische zurück. Und dann ist es mir nämlich egal, ob die Kinder hinten oder vorne anfangen. Das ist häufig wirklich auch ein Problem, ob die Kinder wirklich exakt eine Richtung einhalten. Ich habe die Erfahrung gemacht, die schwachen Schüler haben nämlich das Problem, hier innen anzufangen. Da müssen sie nämlich so herum rechnen und so herum schreiben.
Sie fangen von hier an, rechnen 6 x 3. Also sie rechnen in die Richtung und schreiben da die erste Zahl. Aber nun muss ich ja da weitermachen. Die würden nämlich liebend gerne hier weitermachen... Wenn ich aber hier hinten anfange, ist das immer eine Richtung. Und vom Produkt kommt dasselbe heraus. Das ist ja egal, ob ich da oder da anfange. Ich muss nur verstanden haben, dass diese 5 ein Einer ist und ich deswegen da auch drunterschreiben muss.

Frage 3

Hm, jetzt muss ich das selber erst mal verstehen.

Liest sich die Aufgabe noch einmal durch ... denkt einige Sekunden nach...

Also das ist doch richtig, (lacht) was soll ich denn jetzt sagen?

Also, es geht auch um die Situation. Die Schülerin steht vor Ihnen und zeigt Ihnen die Zeichnung: Schauen Sie mal, das habe ich gemacht, habe ich mir zu Hause erdacht. Gestern fiel mir das so ein.

Ja, das ist doch prächtig.

Gut, also, wenn wir jetzt gerade sowieso Geometrieunterricht machen, wenn wir jetzt `ne Sitzgruppe haben und über Mathematik sprechen, dann würde ich der Schülerin sagen: Stell das doch mal den anderen vor.
Und dann könnte man sehr wohl und sehr gut daran Geometrie weiter aufbauen. Wenn das nun mitten in der Subtraktionsstunde ist, dann würde ich sagen, so, das ist einfach ganz toll. Bewahre es doch mal auf, bis wir so weit sind, dass du das den anderen vorstellen kannst.

6.5 *Protokoll 05 H*

Alter der Lehrkraft: *32 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *4 Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Das ist doch ganz schön schwierig. Da hätte ich jetzt gerne ein paar Bücher um nachzugucken *[lacht]*

Ja, Sie dürfen gerne. Wenn Sie Schulbücher hier haben.

Nee, die hab ich ja nicht hier, die hab ich zuhause, klar. Mein Handbuch und so hab ich zuhause, weil ich die Vorbereitung zuhause mache.

Tut mir leid.

Macht nichts, dann hätte ich das auch mitbringen können! Also, was Kinder, meiner Meinung nach, verstehen und tun können müssten, bevor sie damit beginnen, das find ich erst mal ganz interessant! Also, ich hab's ja jetzt erst einmal gemacht, weil das mein erster Durchgang ist, und hab das Mathebuch *Zahlenbuch*. Und in dem Zahlenbuch wird die Subtraktion erst mal halbschriftlich eingeführt, dass man erst mal von 45 zieh 7 ab, von 45 zieh ich 2 ab, und dann auch so untereinander, und das fand ich eigentlich für die Kinder sehr schlüssig, dass sie wirklich erst mal nachvollziehen, was sie da machen. Dann ist das abgebildet nochmal mit Punktmengen, dass man genau weiß, was man da macht, man nimmt dann erst mal Punkte weg und handelt eben richtig. Guckt sich das an, was ich da mache, und ich geh auch immer, wenn ich merke, Kinder verstehen den nächsten Schritt nicht, sag ich: „Dann nimm doch mal das Anschauungsmaterial." Wir haben so ein paar Kinder, die auch sehr lange mit diesen Zehner- oder Zwanzigerfeldern gerechnet haben. Dass die das einfach noch mal mit Anschauungsmaterial machen. Mit diesen Zahlen geht das ja auch noch ziemlich gut, so 45 und 27 kann man ja noch ganz gut mit Feldern rechnen, so im Hunderterfeld dann zum Beispiel. Und dann geht es ja darum, diese Ergänzung zu vollziehen, dass ich von sieben bis zur Fünf ergänze, und wenn ich merke, das geht nicht, gehe ich bis zur Fünfzehn. Wie ich das dann Kindern erklä-

ren würde, dass... „Wie würden Sie an das Problem herangehen?“... Ich bin ja schon an das Problem herangegangen, wie hab ich denn das gemacht?
Ja. Also Sie müssen auf jeden Fall im Kopf, finde ich, schon ergänzen können von der 27 bis zur 45. Jetzt kann ich mal überlegen...

Ja, lassen Sie sich nicht aus der Ruhe bringen, also wirklich, wir haben alle Zeit... Das Problem vielleicht, als so kleiner Angriffspunkt, ist ja: Was passiert, wenn ein Schüler nachfragt? Diese Eins da oben, woher kommt die? Warum schreiben wir da jetzt eine Eins? Wir können doch aus der Fünf nicht einfach eine 15 machen!? Erinnern Sie sich, wie Sie das erklärt haben?

Hat keiner gefragt, glaub ich! *[lacht]* Aber wie würd' ich's erklären? Ich glaub, ich würde es immer aufmalen, also z.B. jetzt, also

Also Sie können auch gerne...

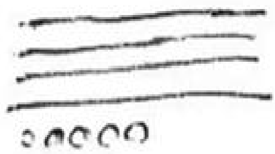


Abb. A 11: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

[Malt beim Reden] Wenn ich jetzt ein Zehnerfeld habe, ich habe hier fünfundvierzig, 10, 20, 30, 40 und die 5, 1,2,3,4,5 Einzelnen, und jetzt 27 abziehen, wie hab' ich das denn gemacht? Dann irgendwie in rot und blau markiert, wahrscheinlich... Ich find' das selber gerade ganz kompliziert! Also das Kopfrechnen dadurch zu lernen, ist natürlich ganz schlicht, dass man's einfach wegstreicht, aber mit diesem Ergänzen, ich weiß gar nicht, ob ich das jetzt hieran... Oder da müsst ich eigentlich bei der 27 anfangen! Klar, das tut man ja auch beim schriftlichen Rechnen, dass man von unten hoch rechnet, dass ich die 27 habe, 5 und dann 2 extra, die häng ich mal so ein bisschen zusammen, damit ich den Überblick habe, dann will ich auf 7 ergänzen, dann weiß ich, ich habe hier noch 3 und da noch, nee, auf 5 will ich ergänzen, 1,2,3,4,5, die würde ich dann irgendwie andersfarbig anmalen, da sind also 8 und ich hab den nächsten Zehner vollgemacht. Also hier ist wieder ein Zehner voll geworden. Und für den nächsten Zehner würd' ich sagen, muss ich dann eine 1 hinschreiben, weil es jetzt nicht mehr zwanzig sind, sondern 30. Und jetzt muss ich von der 30 noch zur 40, und weiß: Da muss einer noch dazu, dann sind's 40. Also ein Zehner noch dazu.
Eigentlich... Das kann ich ja mal ausprobieren, ob ich das mit 25... 10,20,25, so jetzt will ich zur 52, erstmal will ich eine 2 herstellen, hier muss eine 5 dazu, 3,4,5, hier hab ich einen Zehner vollgemacht, den kann ich da gleich notieren, und zur 52 will

ich, dann hab ich sieben dazugetan. So, jetzt hab ich 30, stimmt, und ich will zur 50, 40,50, 2 dazugetan.

Ja, tatsächlich!

Das ist doch schön. Find' ich gerade ganz einleuchtend. Also, manchmal ergibt sich so was ja auch, wenn man versucht, es den Kindern zu erklären, weil man nicht auf die Frage vorbereitet war, und ich denke, dass sich so was dann vielleicht ergeben hätte.

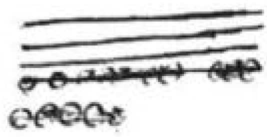


Abb. A 12: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

Gut, nächste Situation. Woll'n wir weitergehen?

Ja, wenn das ausreichen soll...

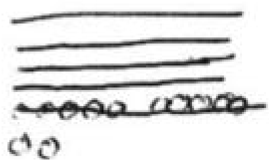


Abb. A 13: 3. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

Ja, ich kann ja nicht sagen natürlich... ja, natürlich ist es so, wie Sie sagen, und wenn Sie damit zufrieden sind, dann ist es in dem Moment genau so, wie es sein soll.

Also, das ist halt immer der Weg – Wir haben uns dann eben auf diese Darstellung geeinigt, man kann ja auf ganz verschiedene Weise darstellen, und wenn ein Kind sagt,: „Ich mach' das aber so nicht, ich zeichne das jetzt anders", dann sag ich auch: „Dann zeichne das selber an!" und versuch' mich da reinzufinden, wie das Kind entsprechend das dann gerne... Weil ich denke, dass die Kinder verschiedene Vorstellungen haben, wenn sie rechnen. Also die haben ja dann nicht... Die strukturieren schon und viele übernehmen dann diese Struktur und manche denken sich aber eine andere Struktur, mit der sie irgendwie besser umgehen können. Also, muss nicht unbedingt diese Striche und Punkte-Struktur sein.

Sondern? Zum Beispiel, welche Struktur könnte es noch sein?

Ich weiß nicht welche Struktur es noch sein könnte, was haben denn Kinder noch anderes...? Ach, dass sie sich zum Beispiel die Fünfer in Gruppen vorstellen, dass sie immer in Fünfergruppen und dann zerlegen, einzeln, sowas auch. Oder manche stört es, dass es liegt, und möchten das aufrecht haben, gibt's auch.

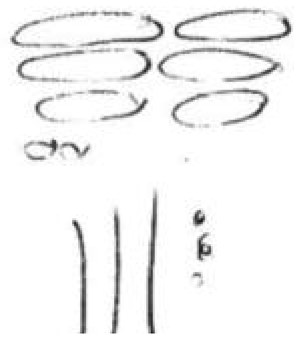


Abb. A 14: 4. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

Okay. Gut, nein ich verstehe, wie die Idee funktioniert.

Frage 2

Ich würde auf das Problem Hunderter, Zehner, Einer nochmal eingehen und dann erklären, dass, wenn ich mit der 6 die 3 multipliziere, dass ich eigentlich mit 600 die drei multipliziere. Das wären dann 1800, also 1800. Also, dann müsste das ja 8, äh, was hab ich jetzt eben gesagt? Ach ja, genau, das müsste dann der 8..., also das müsste dann der 100er sein. Die 8 ist dann der Hunderter und die 1 ist die 1000. 1800. Also müsste man im Grunde könnte man doch eigentlich hier Hunderter, Zehner, Einer drüber schreiben und sagen: „Jetzt rechne ich mit dem Hunderter das, was ich rauskriege, mach mir nochmal ganz klar, und dann weiß ich, ich muss die 8 unter den Hunderter schreiben. Und wenn ich dann mit 4 rechne, dann guck ich nochmal genau, ah, das ist der Zehner und 40 mal 3 und dann weiß ich, ah, das muss ich dann hier drunter schreiben, also in der Einteilung bleiben. Einfach noch mal klar machen, das ist ja nicht nur 6 mal 3, sondern im Prinzip wäre das ja 600 mal 3.

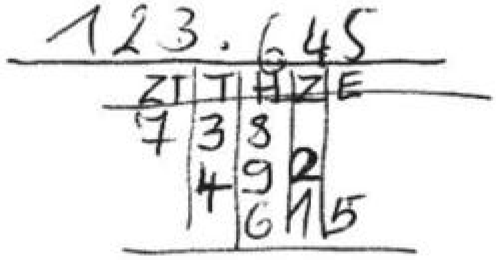


Abb. A 15: 5. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

Dann gehen Sie ja nur von der 3 aus...

Ja, usw. Wenn ich 600 mal 20 rechne...

Also Sie würden dann sozusagen 9 Teilschritte gehen, also 3 mal 600, 3 mal 40, 3 mal 5; 2 mal 600, 2 mal 40... und dann 9 untereinander und dann addieren.

Ach so! Jetzt muss ich grad überlegen... Ja, ich hab natürlich jetzt diese Problemstellung in dieser Klasse noch nicht, weil wir noch mit einzelnen Zahlen rechnen, aber...Kann man das nicht auch so machen,
dass man Hunderter, Zehner, Einer und dann noch mal darauf hinweist... Gut, das ist
jetzt nur mit der Drei... Doch, das ist doch aber genau das gleiche, oder? Wenn ich dann... Jetzt

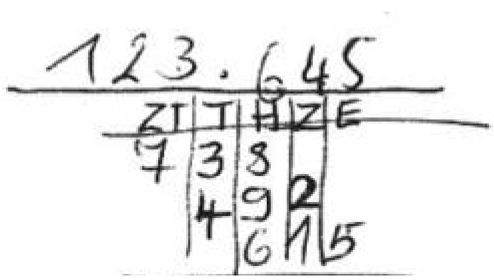


Abb. A 16: 6. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

muss ich das noch mal überlegen. Ich kann ja immer hier gucken... so... Nee, das geht ja nicht... Muss ich immer von der letzten ausgehen... Weiß ich jetzt im Moment selber nicht. Hunderter, Zehner, Einer. Also, es ist ein Problem mit den Stellungen. Also, die Zahlenstellungen sind da ja wichtig. Aber es ist richtig. Das erklärt im Grunde nur die Anfangszahl. Also, das jetzt die 8 da steht und das die nächste da steht und die nächste wieder da. Moment! Das kann aber eigentlich nicht sein! Doch! Es ist doch so, dass im Grunde dann hier darunter dann der Tausender, dann müsste der Zehntausender, und der Hunderttausender sein. Genau! Das kann ich doch aber ganz genauso beschreiben, wenn ich dann weitergeh'. Hier hab' ich dann die 8, weil ich mir sage, das ist ja 800, das ist der Hunderter, dann rechne ich 600 mal zwan...

Moment, wie kommen Sie nochmal auf die 8. Ich hab gerade nicht aufgepasst!

Durch 1800. Weil ich 600 mal 3 rechne. Dann bin ich bei 1800. Dann hab ich die... Also, ich mach das mal eben. Eigentlich wär es schöner, wenn man das so hätte... ähm, 6,4,5, dann hab ich hier 3,2,1, und dann sag ich mal, hier will ich meine Hunderter, da die Zehner, da die Einer hinschreiben, hier die Tausender, die Zehntausender... So... Und ich fang an mit 600 mal 3 sind 1800. Also, wenn ich jetzt von 18 die 8 schreiben will, dann weiß ich 800 sind das eigentlich. Dann rechne ich 6 mal 2 sind 12, ich muss diesen Tausender dazu rechnen, und ich weiß es sind eigentlich 600 mal 20, dann sind das 12000 eigentlich. Und ich tu einen Tausender dazu, dann sind es 13000. Der eine Tausender, das ist die drei, und ich hab einen Zehntausender, den ich mir noch merken muss. Dann hab ich 600 mal 100 und weiß, das sind 60000, tu noch einen Zehntausender dazu, dann sind es 70000. Und dann hab' ich dieses. Und dann weiß ich, wenn ich jetzt 40 mal 3 rechne sind 1200. Quatsch! Jetzt bin ich ja völlig...! 12, 40 mal 3 sind 120, ich weiß, der Zehner sind dann 0 – das kann man sogar noch mal extra hinschreiben, ich schreibe 120 hin und überlege: Die letzte Zahl nehm' ich ja immer und was ist das dann? Das ist... Ach nee, das ist der Einer. Quatsch, das geht ja gar nicht...

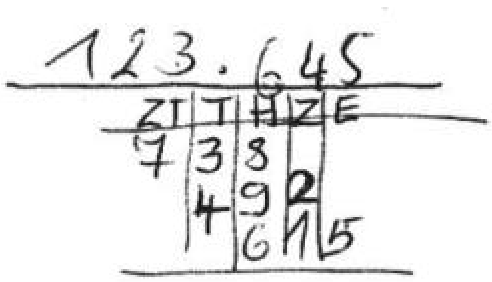


Abb. A 17: 7. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

Das wären dann aber 2 Zehner, nee?

Nicht 0 Zehner, sondern 2 Zehner...

Moment! Ja, genau! So ist es! Das war jetzt Quatsch. Dann schreibt man das am besten gar

nicht hin, das darf man nicht machen, sondern ich will jetzt hier den Zehner hinschreiben, weil ich 120 habe. Doch, das geht! Einen Hunderter muss ich mir merken, 40 mal 20 sind 800, einen Hunderter dazu dann sind es 900. 40 mal 100 sind 4000 und einen Tausender dazu sind 5000, das stimmt ja aber dann nicht...

Nee, Sie hatten vorhin nur 900

Ach so, es waren nur 900. Da hab' ich mir gar nichts gemerkt. Da war der Daumen überflüssig. Jetzt komm' ich schon ganz durcheinander. Und dann rechne ich mit Einern, das ist doch dann schön einfach. 15, dann hab ich hier den Einer 5 und einen Zehner muss ich mir merken, den da, dann hab ich 5 mal 20 sind 100. Nee, ist das jetzt richtig, jetzt rechne ich irgendwie falsch... Doch!

mmh, ist 100 und einen Zehner dazu, den Zehner können Sie dann schreiben...

Und einen Zehner dazu sind 110. Ach so war das, genau!

Und ein Hunderter bleibt im Sinn...

Wieder ein Hunderter, genau... Oh Mann, es ist echt ein bisschen peinlich! Genau, und dann hab' ich 600 und dann kann ich's zusammenrechnen.
Also, würd ich schon sagen, dass man dann einfach noch mal klar macht, dass man eigentlich nicht eben mit 6, mit 5, mit 4 rechnet, und genauso hier, sondern das ist es eigentlich Hunderter, Zehner, Einer sind. Und Tausender, und Zehntausender in diesem Fall sogar noch.

Frage 3

Warum soll ich das denn nicht erklärt haben? Versteh ich jetzt nicht... Also sie meint, sie hätte das im Unterricht nie erfahren, dass die Fläche auch größer wird, wenn der Umfang größer wird.

Kann ja sein, dass diese Gesetzmäßigkeit gar nicht unterrichtet wird von Ihnen.
Ach so!
Wie ich der Schülerin antworten würde? Ach, das wär auf jeden Fall ein interessantes Thema, das mal auszuprobieren, und ich könnte mir vorstellen, dass man erst mal verschiedene Flächen sich anguckt und sieht: Ist denn tatsächlich, wenn die Fläche größer wird, auch der Umfang größer? Also, dass man das nochmal abgeht,

irgendwie verschiedene Räume oder was auch immer... Gut, das ist jetzt vielleicht Grundschule, macht man vielleicht nicht in der sechsten...

Nee, das ist jetzt die 4. Klasse.

Ach so, kann man auf jeden Fall nochmal machen, oder mit diesen Maßrollen z.B. nochmal Wege abgeht und guckt, aha, jetzt haben wir ´nen kleinen Fleck und wenn ich den Umfang ausmesse... Ich finde das bei diesen Rollen auch sehr praktisch, das ist ja im Prinzip wie ein Maßband, das man immer weiter messen kann und immer weiter... Ja, oder überhaupt Dinge mit einem Maßband ausmessen... Maßband drumlegen und man sieht schon, dass die Fläche größer ist. Und das, wenn der Umfang kleiner wird, dass die Fläche dann auch kleiner wird. Oder man, also ich meine, Quadratmeter misst man ja auch schon, also man berechnet ja... oder zumindest in diesem Buch, *Zahlenbuch*, heißt es „Meterquadrate“, ich weiß nicht so richtig warum... Also, weil wir die Klasse jetzt auch mal mit Meterquadraten ausgelegt haben, z.B.. Also, wir haben dann massenweise Meterquadrate auf Papier geschnitten, und die dann in der Klasse ausgelegt, um mal rauszufinden, wie groß die Klasse ist, wie viel Meterquadrate rein passen in die Klasse.

Wow! Was haben Sie dann mit dem ganzen Papier gemacht anschließend?

Das war so eine Zeitungsrolle, so ne... Und dann hab
dann immer Meterquadrate geschnitten und dann ha
nachgezählt, wie viel Meterquadrate, und dann hinte
diese Reihe mal diese Reihe nehme, kriege ich das E
Prinzip wie, wenn ich jetzt mit diesen Hunderterfelde
hab ich ja auch immer so ein Feld, und das sind imm
auch, ich rechne 1,2,3 mal 10 und dann hab ich in di
10 usw. Also das Prinzip kennen die im Grunde scho
da abzähle und dann weiß ich, so viel sind es. Und d
übertragen auf diese Meterquadrate, dass ich im Prin
soundso viele und dann haben wir nachgezählt und r
man dann ja auch noch mal gucken wie viele, wie vie
reingehen. Oder noch mal genauer hingucken, wie di
stehen. Das nämlich nur die eine, die lange Seite sic
Fläche sich ganz verdoppelt hat. Also das ist ja auch
mal einzugehen. Also, tja... Noch mehr dazu, oder?

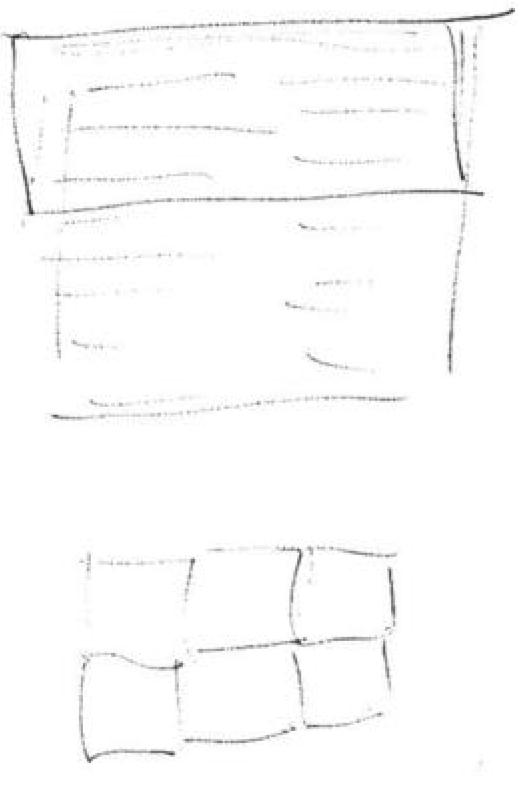


Abb. A 18: 8. begleitende Handskizze der Lehrkraft 05 H

6.6 *Protokoll 06 H*

Alter der Lehrkraft: *41 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *8 Jahre*

Schulbuch:

Kein Schülerbuch, nur ein Arbeitsheft (Diesterweg). Im ersten Schuljahr gab es das Zahlenbuch. „Wir haben eine ganze Menge Kinder, die ausgesprochen schwach sind in Mathe. Die hatten damit Schwierigkeiten. Das hatte vielleicht damit zu tun, dass viele Kinder am Anfang noch Sprachprobleme hatten und das deswegen alles gar nicht verstanden haben, sprachlich. Also haben wir uns nach dem ersten Schuljahr dafür entschieden, ein Arbeitsheft zum Abarbeiten, zum Üben, so ein Buch, wo die Kinder, wenn die Aufgaben dann klar sind, einfach das so runterarbeiten können. Auch in ihrem eigenen Tempo. Und wir nehmen dann zum Differenzieren aus anderen Heften halt noch etwas dazu."

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Na ja, also sie müssen sich im Hunderterraum orientieren können. (...) Und (...) ja und sollten (...) ja und sollten diese – also ich würde diese Aufgaben vorher dann natürlich in Schritten rechnen. Also: 45 – 27, also erst mal 45 – 20 und dann noch minus 7.

Ja und da würde ich dann sicher darauf bauen, dass in der ersten Klasse die Kinder möglichst das draufhaben, aus der ersten Klasse, wie sie den Zehnerübergang mit den Zahlen bis 20 dann halt runterrechnen, ne? Also, dann erst bis zum Zehner oder auch nicht. Das machen ja die Kinder ja unterschiedlich. Da habe ich auch nie darauf bestanden, dass sie zuerst die 5 wegnehmen müssen, jetzt von der 7, und dann noch die zwei. Sondern manche Kinder sehen das ja irgendwie gleich und machen das dann ja gleich irgendwie so. Bei manchen Kindern weiß ich dann nicht ganz genau: wie machen sie das eigentlich. Aber wenn das funktioniert, dann können sie das ja auch so machen.

Also, die Vorraussetzungen: Die einfache Subtraktion im Raum bis 20, die müssen sie gut drauf haben. Und den Hunderterraum. Dann müssen sie auch das Prinzip des Ergänzens irgendwie schon ein bisschen kennen. Also, dass man, wenn man zwei Zahlen voneinander subtrahiert, dass sie dann wissen müssen, dass man auch dann von der Kleineren zur Größeren Ergänzen kann. Was ja auch nicht automatisch die Kinder einfach so wissen, dass man das so machen kann.

Ja (...) und das hat sich erfahrungsgemäß als schwierig herausgestellt, das Ergänzen, das hat ziemlich lange gedauert, bis sie gemerkt haben, dass Ergänzen Subtrahieren ist.
(Mehr zu sich selbst...): Und das ist jetzt wahrscheinlich auch das, worum es jetzt hier geht...
Äh (...) Ja, also wenn ich jetzt mal davon ausgehe, dass das jetzt möglichst alles vorher einigermaßen in den Köpfen drin sein sollte, dann habe ich das erst mit ganz vielen Übungsrunden gemeinsam an der Tafel gemacht und dann habe ich die Kinder auch dazu sprechen lassen: Von 7 bis 5 geht nicht, also von 7 bis 15. Und dann, wie viel das dann ist hingeschrieben und dann auch mit einem - also soundsoviel hin und einen im Sinn, das mag einigen ja auch antiquiert vorkommen, aber das haben wir gemacht und haben das dann, die Kinder auch immer wieder – haben das sehr viel an der Tafel gemacht – und habe das dann die Kinder auch immer wieder sprechen lassen und dadurch konnten sie das dann ganz gut. Also, ich denke, es hat funktioniert.

Hat mal ein Schüler nachgefragt, warum von 7 bis 15 gerechnet wird? Der Übertrag, gab es da mal Nachfragen?

Ja, das haben einige am Anfang nicht verstanden. Also, das war schon so, dass (...) also das, was ich mir an Verständnis erhofft hatte, war nicht bei allen da. Und es gab dann einige, die Schwächeren, die haben dann, das kennen Sie ja sicherlich auch, nach Bedarf dann jeweils die Zahl die kleiner ist, einfach von der anderen abgezogen. Hier z.B. 7 – 5. Also, wie es eben gerade so kommt, sozusagen.
Doch doch, da haben schon welche nachgefragt ja (...) und jetzt wollen Sie wissen, wie ich denen das dann erklärt habe...
Ja (...) Das ist jetzt doch schon ein bisschen schwierig, das ist ja jetzt doch schon etwas länger her.

Wir sind ja hier in ihrem Klassenraum. Wenn Sie möchten, können Sie natürlich gern in Ihren Unterlagen oder Schulbüchern nachschauen!

Nein, nein, wir haben nicht so richtig ein Buch, mit dem wir arbeiten.
Also, ich denke mal, dass ich das so erklärt habe, dass ich dann wahrscheinlich den anderen Weg gegangen bin. Das ist jetzt das, was mir so spontan einfällt. Die eigentliche Aufgabe ist 45 – 27. Also die 5 minus die 7. Und das geht ja nicht. Weil ja

die sieben größer ist. Und wenn die untere Zahl halt größer ist, dann muss man da einen Zehner dazunehmen. So, denke ich, habe ich das erklärt.

Sie legen den Zehner dazu? Woher nehmen Sie den Zehner?

Der kommt ja von hier (*zeigt auf die zwei*)

Aha, unten von der zwei...

Äh, nein, der kommt äh der kommt von denen hier natürlich, von den 4 Zehnern. Na klar. Da kommt er ja auch dazu (*meint die Zeile, in der die 4 und die 5 stehen*).
Den haben wir da einfach so weggenommen.

Verstehe. Also, sie nehmen ihn oben bei der vier weg und tun ihn dann unten bei der zwei wieder dazu?

Ja. Wie machen Sie das – ach so, ja, das dürfen Sie jetzt ja nicht sagen...

Und wenn Sie ihn oben wegnehmen und schreiben ihn dann oben zu der 5 dazu, dann ist er doch oben noch da?

Nein, ich schreibe ihn oben nicht dazu.

Aber Sie rechnen von 7 bis 15.

Ja. Das mache ich im Kopf. Ich rechne von 7 bis 15 und schreibe dann den einen einfach nur hier unten hin.
Ich ahne schon, worauf Sie hinauswollen. Dass das so Stolperstellen sind, bei denen die Kinder – wo sie das eigentlich nicht verstehen, aber es dann so machen, weil sich das Verfahren eben einfach so eingeschliffen hat.
Also, ich denke, wenn man die Kinder jetzt heute fragen würde, könnten die meisten Ihnen erklären, warum das so ist. Aber (...)

Frage 2

Ich hätte mich natürlich erst mal bei den Viertklassen-Kollegen beschwert (ironisch!!) (...) nein (...) also, ich würde (...) die Zahlen hier noch einmal zerlegen lassen. Ich würde das aufschreiben lassen als 123 x 600, x 40 und x 5. Und dann, denke ich mal, dass dann die Kinder sehen würden, dass da ja immer noch einige Nullen mit im Spiel sind und das deswegen da diese Lücken gelassen werden müssen. Also, ich würde das über die Nullen versuchen. Die Zahlen auseinandernehmen – und dann sieht man das ja.

Frage 3

Da muss ich jetzt erst mal gucken. Also: Wie ist die Theorie? Der Umfang wird größer und dann wird auch die Fläche größer. Das ist ja aber irgendwie klar, ne? Das ist doch jetzt keine Fangfrage, ne?

Wie meinen Sie? Also die Frage lautet: „Wie würden Sie der Schülerin antworten?“.

Überlegt ca. 25 Sek.

Also, mir ist das jetzt das Problem jetzt nicht ganz klar. Das ist doch fantastisch! Das könnte sie den Kindern vorstellen. Das könnte sie der Klasse irgendwie mal vormachen. Also, ich weiß, darum geht es jetzt hier nicht. Ich weiß nicht genau, wo jetzt das Problem ist.

Also, die Schülerin steht vor Ihnen, hält diese beiden Skizzen in der Hand und sagt. Sehen Sie, das habe ich zu Hause herausgefunden.

Ja (...) Das ist doch toll. Ja. Das finde ich ganz toll. Ja. Ich gucke jetzt nur gerade, ob ich hier irgend etwas übersehe und das vielleicht alles gar nicht so ist.

Überlegt ca. 20 Sek., ist sich sehr unsicher.

Also, ich würde die Schülerin sehr loben. Es sei denn, mir ist jetzt hier ein inhaltlicher Fehler unterlaufen. Das ist doch korrekt hier – oder nicht?

Also, es gibt schon Ausnahmen, es gibt Gegenbeispiele für diesen Fall. Grundsätzlich erscheint das schon logisch, das sich mit der Zunahme des Umfanges auch die Fläche vergrößert.

Ach so, das ist nicht immer so?

Nein, es gibt Gegenbeispiele.
Und wie würde Sie der Schülerin antworten?

Ich würde sie loben und sie auffordern, das der Klasse vorzustellen. Ich würde versuchen, das in der Klasse dann zu thematisieren. Ja, dann würden vielleicht aus der Klasse dann, ich hab einen so einen Mathefreak, dem würde dann möglicherweise gleich eines der Gegenbeispiele einfallen. Also, ich würde das in den Unterricht reinnehmen. Das würde ich machen.
Das geht irgendwie an mir vorbei, die Fragestellung.

6.7 *Protokoll 07 H*

Alter der Lehrkraft: *54 Jahre*
Bisher geleistete Dienstzeit: *10 Jahre*
Schulbuch: *„Stelle mit aus verschiedenen Werken bedarfsgemäß etwas zusammen, benutze die mir zur Verfügung stehenden Materialien gewissermaßen als Steinbruch."*
Fakultas Mathematik: *nein*

Bemerkung: Keine Aufnahme mit dem Tonbandgerät. Die Aussagen wurden notiert und anschließend mit der Lehrerin abgestimmt.

Frage 1

Voraussetzungen: Die Kinder sollten mündlich subtrahieren können. Denn solche Aufgaben, wie sie hier stehen, würde ich eigentlich mündlich lösen lassen. Die schriftliche Subtraktion beginnt für mich erst bei dreistelligen Zahlen.
Bei der mündlichen Subtraktion lasse ich die Kinder überlegen, wie sie so eine Aufgabe am besten rechnen können. Alle richtigen Ideen werden an der Tafel gesammelt. Jedes Kind kann sich dann den für ihn am günstigsten Lösungsweg aussuchen.
Ich schreibe aber auch „falsche" Lösungswege an die Tafel, z.B. 40-20-7, da wird es für einige Schüler schwierig, die 5 wieder dazuzupacken. Einige handeln in Form einer Transferleistung und wollen ähnlich agieren wie bei der Addition (40+20+7+5). Vor allem für schwache Schüler ist es vorteilhaft, sich *einen* Weg herauszusuchen, der dann aber auch kontinuierlich durchgehalten wird. Beispiele für verschiedene Wege sind:

- 40-20+5-7
- 45-7-20
- 27+ x = 45

Weitere Voraussetzungen für die schriftliche Subtraktion:

- Zehnerübergang
- Ergänzen

Bei der erstmaligen Einführung der schriftlichen Subtraktion verwendete ich Rechengeld und stellte die H,Z,E entsprechend dar. So wurden die Schüler veranlasst, beim Übertrag einen Zehner einzulösen. Dadurch entstand aber eine zu große Verwirrung, daher vermittle ich das jetzt eher traditionell mit der Ergänzungsmethode. Ein Beispiel:

$$\begin{array}{rccc} & 4 & 3 & 2 \\ - & 3 & 5_1 & 9 \\ \hline \end{array}$$

9 bis 2 → geht nicht, also holen wir uns einen Zehner. Und damit das nicht in Vergessenheit gerät, schreiben wir ihn unten hin.

Bemerkung: Die Lehrkraft hatte auf Nachfrage hin einen guten Erklärungsansatz, was das Einlösen eines Zehners eines höheren Wertlevels in das nächst niedrigere Wertlevel betrifft. Dabei nannte sie auch, dass bei dem oberen Beispiel aus der „3" ja eine „2" würde, kam in ihrer Erklärung aber in einen Konflikt, als es darum ging, wo die „1" als Repräsentant für den „eingelösten" Zehner zu stehen hätte. Sie sagte: „Eigentlich oben, das würde aber zu unübersichtlich aussehen, also schreibe ich ihn lieber unten in die Zehnerspalte." – was in bezug auf das Einlösen jedoch unlogisch ist.

Frage 2

Die Schüler haben die Stellenwerttafel offensichtlich noch nicht richtig verstanden. Es scheint ihnen egal zu sein, ob sie mit dem H, Z oder E multiplizieren. Also, sie fangen schon mit dem richtigen an (*H*), nur sie rücken es nicht ein. Und bemerken auch nicht, dass das Ergebnis gar nicht stimmen kann.
Da sie mit dem H anfangen, können sie ja auch noch zwei Nullen anfügen. Wir multiplizieren ja mit 600, nicht mit 6.
Die Schüler sollten zunächst die beiden Nullen hinschreiben und dann mit der 6 multiplizieren, dann wurde insgesamt mit 600 multipliziert.
Ich glaube, den Schülern ist nicht klar, dass sie dort mit 600 multiplizieren, also dort mit H,Z,E multiplizieren müssen.

Frage 3

...scheint verwirrt...

So, wie die Schülerin es mir zeigt, ist es korrekt.

...überlegt...

Flächenberechnung habe ich im Unterricht noch nicht gemacht.

...überlegt...

Ich würde der Schülerin antworten: „So, wie du mir das hier gezeigt hast, ist das richtig.“

Ich würde mich aber erkundigen, ob das bei jeder Fläche zutrifft. Wenn ich noch etwas herausfinde, was dem widerspricht, würde ich das dem Kind mitteilen. Das ist wichtig. Es ist ja ein Kind, das sich selbständig Gedanken macht und diese ja auch richtig weitergeführt werden sollen.

6.8 *Protokoll 08 H*

Alter der Lehrkraft: *53 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *33 Jahre*

Schulbuch: *Das Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Wie ich an das Problem heran ginge...? Also, sie müssen auf jeden Fall erst mal wissen – was wir ja auch schon in der ersten und zweiten Klassen gemacht haben – was minus überhaupt bedeutet und das haben wir ja in den beiden vorangegangenen Schuljahren schon gemacht, mit Mengen, wo man was weg nimmt und vor allem im ersten und zweiten Schuljahr ja auch sehr anschaulich. Jetzt kann man es ja nicht mehr so anschaulich machen, aber die Anschaulichkeit ist, find ich, immer ein ganz wichtiger Punkt, das haben wir gemacht die Jahre vorher... Tja, wie würd ich da ran gehen...? Ich bin nicht ran gegangen – wir haben einfach losgelegt. Und wie wir sowas gerechnet haben, das wollen Sie jetzt wissen? Wie wir den Übertrag hingeschrieben, wie wir das bearbeitet, wie ich das erklärt habe?

Ja...

Wir haben immer z.B. gesagt: „Von 7 bis 5 geht nicht – sie wissen, man muss immer zum Nächsthöheren kommen. Man darf nicht zurückgehen, man muss weitergehen. Von 7 bis 5 geht nicht, und dann haben wir gesagt, von 7 bis Fünf**zehn** sind es 8 hingeschrieben, geborgt, zurückgegeben. Alles, was ich mir borge, muss ich wieder zurückgeben. Den hab ich mir geborgt, dann geb ich ihn zurück, kreise es ein, zähle es zusammen, von drei bis vier.

Da passiert eine ganze Menge mit der Eins, die sie da dazugeben. Wenn ein Schüler nachfragt, wie sie das erklären würden, wie würden Sie das machen?

Also: Von 5 bis 2 geht nicht – aber von 5 bis 12. Jetzt borg' ich mir hier einen Zehner: den nehm' ich hier weg, und den borg' ich mir!

Den Zehner borgen Sie unten bei der 2?

Den borg' ich mir hier. Den borg' ich mir hier und sage: „Von 5 bis 12 sind 7, den hab ich geborgt, den geb' ich zurück, kreise es ein, von 3 bis 5 sind 2. Wo immer man sich den borgt, ne? Also, ich habe es einfach so den Kindern erzählt, dass ich mir den borge und den hierhin schreibe, weil ich ihn hier ja wieder hintun muss zum Zusammenzählen, habe ich gesagt: geborgt – zurückgegeben. Also, sie haben es wirklich auf diese Weise gut kapiert. Mag ja vielleicht nicht in Ordnung sein, aber sie haben's ganz gut verstanden, und hier eben ganz genau so. Und wenn es jetzt Hunderter oder Tausender sind, dann kann man's immer... Borgt man ´nen Hunderter, schreibt den da hin, und geborgt – zurückgegeben, und immer weiter: Borgen und Zurückgeben.

Frage 2

Dann würd' ich die schriftliche Multiplikation noch mal wirklich von vorne durchnehmen, so wie ich sie in der vierten Klasse beibringe, würd' ich sagen: „So, jetzt machen wir noch mal einen Schnelldurchgang!" Und die, die das schon können, kriegen vielleicht dann besondere Aufgaben, aber die, die das eben so falsch machen, wenn es denn wirklich mehrere sind, würd' ich mit denen das nochmal von vorne beginnen, denn das ist ja unheimlich wichtig!

Ja... Worauf würden Sie besonders Acht geben, wenn Sie diesen Fehler sähen?

Also, wie ich die schriftliche Multiplikation erkläre: Wir fangen immer an, das mit Pfeilen zu machen, und sagen: „Du musst genau unter der Zahl, mit der du anfängst zu rechnen, unter der fängst du an zu schreiben. Und wenn du mit <u>der</u> rechnest, fängst du unter <u>der</u> an zu schreiben, aber du kannst es ja nicht <u>hier</u> hinschreiben, denn dann müsstest du es ja drüber schreiben – also musst du ne Reihe runter gehen. Und wenn du dann mit der letzten Zahl anfängst zu rechnen, kannst du's ja auch nicht hierhin schreiben, müsstest es auch in die nächste Zeile schreiben, hierhin auch nicht, also musst du noch eins runtergehen!"
Also, ich kann mich nicht erinnern, dass ich's jetzt unbedingt so gesagt habe, weil, wenn man das an der Tafel vormacht, dann – oder erklärt, oder an der Tafel eben rechnet – dann spreche ich sowas dazu, aber es wird – sowas hab ich noch nie erlebt, bei keinem in der vierten Klasse. Vielleicht, wenn man von Anfang an so macht, so: „Da geht's los, zuerst mach' ich den, dann den ausschreiben, dann den, schreiben wir's hin, und dass man dann einfach automatisch... Man erzählt es, zum Teil, zuerst haben wir auch angefangen, Nullen hinzuschreiben, gesagt: „Das sind ja 600!" 45 sind 100er, und in manchen Mathebüchern ist das so! Und wenn man hier, dann sind das Zehner, auch mit ´ner Null ergänzt... Also, auf die Weise, oder eben die Treppen runtergehen. Die meisten wollten es dann nicht mehr mit den Nullen

machen, das brauchte nicht. Wenn du das weißt, dass das die Hunderter-, die Zehner- und die Einerstelle ist... Wir haben auch sehr viel Stellenwertrechnungen gemacht, so dass sie das eigentlich dann alles richtig gemacht haben. Aber in diesem Fall würd' ich nochmal von ganz vorne anfangen!

Frage 3

Also, bevor ich mir das überhaupt genau angucken würde, was sie da herausgefunden hat, würde ich ihr als erstes sagen, dass ich das ganz toll finde, dass sie sich damit beschäftigt hat und dass sie was rausgeknobelt hat und würde ihr jederzeit gestatten, was an der Tafel zu erklären, oder den anderen Kindern was zu erklären. Wenn Kinder mit so einer Idee kommen, lass ich sie das immer erzählen, das ist oft schon vorgekommen – es kam auch schon vor, dass da irgendwas nicht ganz in Ordnung war und dann haben wir uns gemeinsam überlegt, was daran nicht stimmen könnte, und haben aber trotzdem das Kind ganz doll gelobt, dass es sich sowas überlegt hat und sowas, ja, herausgefunden hat; sich überhaupt damit beschäftigt hat. Es gibt einige, die sich da gerne auch durch Knobelaufgaben, die ich ihnen öfter gebe, anregen lassen, bestimmte Sachen zu überlegen. Zum Teil eben auf ganz verschiedene Weisen zum Ziel kommen, manchmal auch Probleme aufwerfen, aber das kann man besprechen! So würde ich zu so einem Kind auch immer sagen: „Toll, was du gemacht hast“ und dann gucken – als erstes loben.

6.9 *Protokoll 09 H*

Alter der Lehrkraft: *40 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *14 Jahre*

Schulbuch: *Benutzt verschiedene Schulbücher (Diesterweg AH, Curio-Verlag „Übungen zum schriftl. Rechenverfahren“, Zahlenbuch, Nussknacker, Pfiffikus)*

Fakultas Mathematik: *nein*

Anmerkung: Die Lehrkraft war extrem nervös, fast ängstlich. Eine Aufnahme des Gesprächs mit dem Tonband lehnte sie ab. Die folgenden von handschriftlicher Mitschrift übernommenen Aufzeichnungen wurden mit der Lehrkraft abgestimmt, d.h. sie hat die Aufzeichnungen nach dem Interview gelesen und war einverstanden.

Frage 1

Voraussetzungen: Der Zehnerübergang sollte verstanden sein und auch noch einmal wiederholt worden sein.

Auch wenn das Verständnis nicht vorhanden sein sollte, müssten die Kinder das Verfahren ausführen können. Dazu sprechen sie folgenden Merksatz: „Eins im Sinn“ oder Merke 1“.
Während wir das gemeinsam an der Tafel machen, sprechen wir dazu. Die Sprache ist im Mathematikunterricht sehr wichtig:
„Von der 7 bis zur 5: geht nicht. Also von der 7 bis zur 15. Jetzt habe ich mir den Zehner geliehen, deswegen muss ich da jetzt eine kleine 1 hinschreiben.“

Von wo leihen Sie sich den Zehner?

Also, es ist wichtig, dass es dann nicht 2 bis 4, sondern 3 bis 4 heißt.

Und wenn nun einer nachfragt, woher die 1 kommt?

Also, woher ich mir die leihe. Von der 20 nehme ich mir einen Zehner. Sodass die abzuziehende Zahl um einen geringer wird. Und dann steht da drunter die kleine 1. Bei schwächeren Schülern wird dann einfach das Verfahren eintrainiert.

Frage 2

Die Schüler haben das Stellenwertsystem noch nicht verstanden. Das muss auf jeden Fall wiederholt und geübt werden.
Sie müssen verstehen, warum das wichtig ist, dass sie das „verrückt“ schreiben. Nämlich, weil zuerst der H mit der Zahl malgenommen wird, dann der Z und dann der E. Wenn sie das nicht beachten, dann kommt ein falsches Ergebnis heraus.
Den Schülern muss klar sein, dass erst die H der zweiten Zahl multipliziert werden, dann die Z der zweiten Zahl mit der ersten. Das muss dann genau unter dem Z stehen.
Zuerst kommen die H dran, dann die Z und dann die E.

Frage 3

Ich würde sagen, dass es stimmt, was sie sagt. Weil der Umfang einer geometrischen Figur oder Fläche, wenn der wächst, dann nimmt ja in dem Maße auch die Fläche zu, weil sie sich ja aus der Multiplikation der beiden Seiten ergibt.
Dass sie recht hat, würde ich ihr vielleicht noch anhand anderer geometrischer Figuren zeigen, z.B. Trapez oder Fläche.

6.10 *Protokoll 10 H*

Alter der Lehrkraft: *60 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *30 Jahre*

Schulbuch: *Das Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Bemerkung: Die Lehrkraft scheint relativ große Vorbehalte gegenüber Befragungen oder universitären Untersuchungen zu haben, sagte etwas von „man hat ja schon so seine Erfahrungen gemacht“, geht aber nicht näher darauf ein.
Eine Aufnahme mit dem Diktiergerät lehnt die Lehrkraft ab.

Frage 1

Überlegt ca. 1 Minute, dann Rückfrage

Soll das eingeführt werden oder soll das wiederholt werden?

Mmmmm, soll eingeführt werden.

Dritte Klasse, also Zahlbereichserweiterung muss da sein, also bis 1000, damit sie (die Schüler) später auch dreistellige Zahlen subtrahieren können, damit die sich vorstellen können, was Hunderter sind. So wie die Aufgaben hier sind, könnte man die Aufgaben auch schon in der ersten Klasse rechnen. Sie hätten dann zwar keine Vorstellung, was 40 ist, könnten die Aufgabe aber schon rechnen. Im ersten Schuljahr, ja, davon bin ich überzeugt. Man dürfte es auf keinen Fall im ersten Schuljahr unterrichten, aber theoretisch wäre es möglich.
Also es muss gesichert sein, die Vorstellung E, Z, H. Denn man ergänzt ja nur im Bereich bis 20. Sie müssen E, Z, H kennen und davon eine Mengenvorstellung haben.
Sie sollen Kopfrechnen beherrschen können im Bereich bis 1000 mit Zehner- und Hunderterübergang, damit die Zahlvorstellung gesichert ist. Erst wenn die Zahlvorstellung gesichert ist, sollte man mit der schriftlichen Subtraktion anfangen.
Zahlvorstellung, sie müssen eine Vorstellung davon haben, was die Zahl 10 bedeutet, z.B. (...)
Was sie tun können müssen: Sie müssen Ergänzungsaufgaben rechnen können.
Das wird schon im ersten und zweiten Schuljahr geübt.
Früher wurde noch geborgt, heute - seit 1957 darf nur noch ergänzt werden. Borgen darf man nicht mehr. Obwohl es funktioniert. Sehen Sie, bei 5-7 → geht nicht, also

borgt man sich bei der 4 einen, dann steht da nur noch eine 3, dann kann man bequem 15-7 rechnen und dann 3-2.
Manchmal sage ich das den Eltern auch auf den Elternabenden, dass sie das mit dem Borgen ihren Kindern nicht beibringen sollen.
(verfällt in die Addition) E, Z, H sind eingeführt und gesichert. Jetzt haben wir hier bei der Einerreihe mehr als 10, 5+7 ist ja 12. Dann bündeln wir die Einer wieder in die Zehner und die restlichen Einer. Die Einer verbleiben unter den Einern und die Zehner schreiben wir unter die Zehnerspalte. Im dritten Schuljahr geht es dann so mit den Hundertern weiter, dann werden die Zehner zu Hundertern gemacht u.s.w.

Dann macht der Verfasser die Lehrkraft auf den Algorithmus aufmerksam (Addition statt Subtraktion). Die Lehrkraft entschuldigt sich und erklärt von neuem:

7 bis 15 rechnen wir, also wir ergänzen .... also mit den Zehnern .... *(denkt nach)*.... , also hier oben nehmen wir ja 10 dazu ... *(zeigt auf die 5) ... (denkt lange nach)* ... die Schüler müssen vorher erweitern können, also oben 10 dazu und unten zehn dazu, da bleibt der Unterschied gleich. An die Schüler gerichtet: „Also, wir haben das schon gehabt, oben 10 dazu und unten zehn dazu, dann bleibt der Unterschied gleich.“ Dann sage ich ihnen, das der eine Zehner oben in die Einerspalte - sind ja 10 E – geschrieben wird, dadurch steht da die Zahl 15, bei dem anderen kommt der andere Zehner in die Zehnerspalte – ist ja ein Zehner.

[Die Lehrkraft fragt nach, wie andere Lehrer geantwortet hätten. Ich erkläre, dass es viele unterschiedliche Erklärungsansätze gegeben hat, z.B. auch das Entbündeln eines Zehners zurück zu zehn Einern, sodass also in der oberen Zeile jetzt eine 3 und eine 15 stünde. Daraufhin fragt sie, was denn mit der anderen 1 geschehe, wo die denn hinsolle.]

Frage 2

Ich würde wieder beginnen mit dem Multiplizieren großer Zahlen (als Kopfrechnen), um die Zahlvorstellung zu festigen. So dass ich dann wüsste, wenn ich eine Zahl mit 600 malnehme, dass die beiden Nullen noch dahinter sein müssen.
Ich würde darauf achten, dass alle mit dem größten Stellenwert beginnen. Es ginge zwar auch mit dem kleinsten oder dem mittleren, aber unser Übungsmaterial ist so, dass es immer mit dem größten beginnt, also halte ich mich auch daran, um die Schüler nicht durcheinander zu bringen. Mit einer guten Klasse wäre es aber durchaus vorstellbar, dann würde es sogar Spaß machen.

(*Zur Aufgabenstellung zurück*:) Das Rechenverfahren hat er verstanden, aber das Stellenverfahren, also ich würde darauf dringen, dass die beiden Stellen *[meint bei 73800 die beiden Nullen]* belegt wären. Sie müssten schon die ganze Zahl schreiben, mit Nullen.
Vielleicht würde ich, rein methodisch, noch mal darauf achten, dass sie stellengerecht untereinander schreiben.

Frage 3

Denkt zunächst 3 Minuten (!!!) nach.

Weiß nicht, wie ich antworten soll. Da müssen Sie mir helfen. Worauf kommt es hier jetzt an?

Ich ermutige die Lehrkraft, sich die konkrete Situation einmal vorzustellen und sich ganz spontan zu überlegen, wie ihre Reaktion wohl ausfallen würde.

Vielleicht würde ich sie bitten, der Klasse vorzustellen, was sie herausgefunden hat. Wahrscheinlich kommt die Klasse dann noch mit anderen Ideen und ergänzen.

6.11 *Protokoll 11 H*

Alter der Lehrkraft:*61 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *30 Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Ja. Ich würde da handgreiflich dran gehen, so will ich das mal nennen, ich würde das einführen mit Geldbeträgen; weil man mit Geldbeträgen hantieren, eintauschen kann, z.B. Zehner gegen Einer oder Hunderter gegen Zehner, und das ist für meine Begriffe wichtig, das verstanden zu haben, sonst kann man den Übertrag nicht begreifen, den man ja hier machen muss.

D.h. dieses Ergänzen, dass ich von Sieben bis Fünf nicht Ergänzen kann, sondern bis 15 ergänzen muss, muss ich erst begriffen haben, und das kann man am Besten machen mit Dingen, die man wirklich ineinander einwechseln kann, man kann es auch machen mit Plättchen und Zehnerstreifen, aber das ist nicht so anschaulich, als wenn man es mit Geldscheinen macht und die Kinder wirklich damit hantieren lässt.

Und jetzt zu der zweiten Frage, also es muss begriffen sein: der Aufbau des Zahlensystems, die Beziehungen zwischen Zehnern, Einern Hundertern und so weiter, bevor man das behandelt.

Sie sagen, von 7 bis 15 würden sie gehen und das mit den Schülern so besprechen, dass eingetauscht wird, an welcher Stelle wird eingetauscht beim Üben?

Also, bevor ich dieses überhaupt anschreibe, also bevor ich diese Stunde halte – das ist ja ne wahnsinnige Abstraktion schon – würd ich das zunächst mal im Spiel machen mit Geld. Ich würde Einkaufen lassen, würde Geld einwechseln lassen, ich würde also jemanden jetzt mit – fällt mir jetzt grad nichts ein – fünfzig ist nicht'n gutes Beispiel – ich würde einfach 25 Euro dem in die Hand geben und würde was Einkaufen lassen für 19 Euro und jetzt hat der Andere ja das Problem, dass er was rausgeben muss. Also kommt er unweigerlich dazu, dass er an seine Kasse gehen muss, und seine 20 Euro zum Beispiel eintauschen muss. Dieses würd' ich erst in einer Spielsituation machen.

Ja...

Dann würd ich die Geldscheine anheften – ich geh davon aus, dass ich also Spielgeld für die Tafel habe und dass die Kinder das auch haben – das ist klar, ne? Das muss ich jetzt nicht alles erzählen!
Gut, und dann würd ich an der Tafel das machen lassen, dass ich das eintausche diese DM oder EURO in zehn Einzelne, und dass ich dann wirklich sehen kann, ich kann es wegnehmen, es sind da oben jetzt nicht mehr 5, sondern ich hätte jetzt hier 3 und ich hätte da jetzt Fünfzehn, ne?

Ja...

Und ich würde dann also ´n Haus malen, auch mit diesen Stellen, einzelnen Stellen, Abteilungen, so dass man sehen kann, ich hab jetzt hier plötzlich 15, ich nenn das mal Einer, und da jetzt, weil ich da ja einen weggenommen habe, nur noch drei Zehner. Und wenn ich das jetzt handgreiflich durchgespielt habe, dann würd ich dieselbe Aufgabe daneben schreiben – die ich erst gespielt hab! Und würde jetzt das schriftlich deutlich machen. Wobei hier natürlich das Problem besteht, dass ich dann vorher noch klargemacht haben muss, wenn ich ergänze, dass es dann das gleiche ist, wenn ich hier unten den dazu zähle als wenn ich ihn hier wegnehme, das ist ja noch'n neues, n'weiteres Problem. Ich weiß nicht, bei uns in Hamburg, da sind wir ja dran gebunden, da wird das schriftliche Subtrahieren ja eingeführt als Ergänzung, das wissen Sie, ne?

Ja.

Ja gut!

Sie dran gebunden, oder ist das nur sozusagen ein Hinweis...

Ja, ja, ja, ja, nee, nee, nee, nee, nee, nee, das ist also so, und soweit ich das jetzt weiß, haben jetzt auch alle Rechenbücher, die in Hamburg zugelassen sind, machen das im Ergänzungsverfahren.

Mmh.

Gut, und das kann man natürlich auch – das ist aber schon vorher gelaufen – dass man den Kindern das klar macht, ob ich zweimal etwas wegnehme, oder das, was ich wegnehme, addiere und es dann erst wegnehme, dass das das Gleiche ist, das kann man ja auch in der Anschauung deutlich machen. Ja, das wär so mein Weg.

Dann würden Sie also im Grunde genommen, wenn es das Hamburger Schulbuch nicht vorschreiben würde, einen ganz anderen Weg wählen. Und eigentlich, so wie Sie es beschrieben haben, nehmen Sie hier oben von der 4, tauschen Sie ja einen Zehner gegen zehn Einer...

Ja, so macht das Buch das komischerweise ja auch, ne, obwohl es dann ins Ergänzungsverfahren geht, das erscheint mir immer ein bisschen unlogisch.

Welches Schulbuch ist das?

Das ist hier das da...

Ach, „Denken und Rechnen"!

Denken und Rechnen, aber für meine Begriffe machen die alle das, alles, was in Hamburg zugelassen ist – ich hab das irgendwann mal nachgeguckt – machen das gleiche.
Also, mir persönlich, wenn ich es mir aussuchen würde, wäre es sympathischer zu subtrahieren – weil ich das logischer finde; weil man es auch besser erklären kann.

Hatten Sie Mathematik als Fach an der Universität?

Nee, nee...

Darf ich fragen, welche Fächerkombinationen Sie hatten?

[lacht] Ich habe – ich bin ja schon ein etwas älterer Typ, d.h. ich habe die alte Hamburger Lehrerausbildung. Das ist Klasse 1 bis 10, 6-semestriges Studium an der Universität Hamburg, und dann Examen in Pädagogik und in einem Fach. Und das Fach, was ich hab, war Textiles Werken – also praktisch'n künstlerisches Fach – und anschließend gleich in die Schule mit ´ner Stundenermäßigung von 4 Stunden und einem einwöchigen Klassenlehrerseminar. Also praktisch einen Tag in der Woche war man in einem Seminar und dann zweite Lehrerprüfung nach drei Jahren. Also, ich bin nicht so ein, ich weiß nicht ob Sie... in Hamburg heißen ja die Lehrer

Studienräte jetzt, weil die ausgebildet werden wie die Gymnasiallehrer. Erst rein theoretisch und dann Referendariat. Das hab ich nicht, sondern ich hab also Studium und dann, wie gesagt, gleich rein in die Schule und praxisbegleitend ein Jahr ein Seminar. Und nach drei Jahren, zweite Lehrerprüfung.

Das Mathematische, was Sie jetzt unterrichten, beraten Sie sich viel mit ihren Kollegen? Unterhalten Sie sich viel über das, was Sie im Unterricht machen? Weil Sie ja, Sie haben sich das dann eigentlich ja mehr oder weniger selbst angeeignet, das, was sie machen.

Nein, kann ich auch nicht sagen. Weil wir in... also schwerpunktmäßig habe ich im Grunde genommen mich mit grundsätzlichen Themen auf der Universität befasst. D.h. ich hab sowohl ein Seminar belegt, bei einem Praktiker, ____ hieß der, ich weiß gar nicht, ob der noch lebt – wissen Sie wahrscheinlich auch nicht – der also an einem... ähm exemplarisch dargestellt hat, wie man in der Grundschule Mathematik unterrichtet, und zwar vom Prinzip der Anschauung her, oder vom Prinzip des Begreifens, erstmal mit der Hand oder mit allem durchgängig. Und ich hab genauso mich beschäftigt mit Mathematik in der Mittelstufe bzw. auch mit mathematischen Problemen in der Realschule, das war ja nötig, weil die Ausbildung von 1 bis 10 ging. Und alles andere, was ich dann praktisch gelernt habe, hab ich gelernt durch die Praxis. Also am meisten hab ich in den 8 Wochen Stadtschulhelferdienst, so nannte man das, das war ein Praktikum, das für jeden vorgeschrieben war gegen Ende des Studiums, da war man acht Wochen in einer Klasse.

Ah ja.

Oder dann eben auch durch Fortbildung. Also, ich hab hier angefangen in der Beobachtungsstufe und musste dann innerhalb von sechs Wochen in ´ne erste Klasse. Und hab dann natürlich im Institut für Lehrerfortbildung mich schon mit Mathematik in der Grundschule beschäftigt, und mit solchen Dingen.

Frage 2

Ja, mmh... mmh... Ja! Das ist ganz einfach. Ich würde das einfach nochmal neu einführen, das schriftliche Multiplizieren und würde das klar machen, dass ich ja mal 6 erst rechne, aber eigentlich 600 meine, d.h. hier müssen zwei Nullen dran. Genauso dann kommt der Zehner, mal, ich rechne mal 4, hier kommt eine Null dran, und hier gar keine mehr, weil es der Einer ist, und würde Ihnen dann klar machen, dass diese Treppe entsteht durch ´ne Vereinfachung, dass man die Nullen weggelassen hat. Ja, mehr fällt mir dazu nicht ein...

Ok...

Ich würde also ganz... wie ich das auch einführen würde neu anfangen!

Frage 3

Das muss ich jetzt erstmal genauer angucken. Also mit dem Umfang wird die Fläche größer... Viereck *[kaum hörbar]*... Mmh... Also ich wüsste jetzt also im Moment nicht sofort, wie ich antworten würde, und deshalb würd ich einfach das mal mit verschiedenen Figuren ausprobieren. So würde ich da jetzt persönlich auch rangehen... Weil ich es im Moment wirklich nicht weiß, es ist... Es scheint mir nicht richtig zu sein, dass es so ist! Aber ich kann es im Moment nicht nachweisen. Ich überleg jetzt mal gerade, wenn ich... Also ich würde jetzt unterschiedliche Figuren auf ganz schnell aufmalen und würde versuchen, da ´ne Kette zu entwickeln, um dieses zu belegen oder zu widerlegen. Also, ich würde immer vom Praktischen Ansatz ausgehen, weil ich persönlich auch jetzt bei solchen Dingen jetzt Probleme habe, es mir vorzustellen, gerade in der Geometrie!

Ja. Gut...

Also ich würd jetzt mal sagen, wir probieren das jetzt mal aus...
An vielen verschiedenen Beispielen...und überlegen, ob das stimmt. Oder sehen dann, ob's stimmt!

6.12 *Protokoll 12 H*

Alter der Lehrkraft:*55 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: 28 *Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Ich denke, die Kinder müssten das im Kopf rechnen können, die Kinder müssten per Anschauungsmaterial das auch richtig <u>tun</u> können – das würde ich immer versuchen. Also, ich würde zum Beispiel so... Zehner und Einer benutzen, damit die das machen können, sie müssten eintauschen können, damit das hinkommt. Und dann würd‘ ich das aber auch ganz häufig einfach mechanisch mit ihnen üben.

Mmh. Sie sagten eintauschen, Sie benutzen Zehner und Einer... Wie sähe das konkret aus, in einem Beispiel, wenn Sie diese Aufgabe haben?

45 minus 27. Das ich also von diesen 40 Zehnern einen Zehner in Einer umtauschen würde, und dann hätte ich ja 15 Einer da liegen, und dann könnte ich ja die 7 Einer davon subtrahieren.

Äh, in dem Algorithmus später, wenn die Aufgabe geübt wird, passiert ja so ein bisschen, also... einige Lehrer schreiben Übertrage, andere haben Merkzahlen oder so etwas, wie ist das bei Ihnen?

Ich schreibe bei der Zwei die kleine Eins hin; ich rechne diese Aufgabe, später wenn es noch kompliziertere sind, so und so, aber auch schon diese Einfachen immer als Ergänzungsaufgaben, also weil plus ja leichter zu rechnen ist als minus. Wir sprechen das dann so: Sieben plus wie viel gleich 15; oder von 7 bis 15, wie viel muss ich da ergänzen. Trotzdem übe ich das aber auch auf die andere Weise, eben mit diesem Tauschen, weil ich immer denke: Es gibt unterschiedliche Kinder und unterschiedliche Lösungswege. Einige verstehen dieses und andere das besser.

Ja. Also, Moment, bei Ihnen ist dann das Eintauschen ein anderer Weg als der Ergänzungsweg?

Ja, ich biete, wenn es irgend möglich ist, mehrere Lösungswege an.

Mmh. Äh, nochmal für mein Verständnis: Wenn Sie eintauschen, dann nehmen Sie eine von Ihren Zehnern, hatten sie gesagt...

...mmh...

Dann haben Sie hier ja nur noch drei Zehner.

Das ist richtig.

Notieren Sie das, oben?

Also, dieses Eintauschen, das würde ich handgreiflich machen.
Deswegen, da muss ich ja nicht notieren, da sieht man es dann ja. Und wenn wir es dann auf dem anderen Weg mit dem Ergänzen üben, dann notieren wir die kleine Eins hier unten, vor der Zwei.

Mmh.

Dann ist es kein Eintauschen mehr. Das sind zwei unterschiedliche Wege.

Und wenn Sie eingetauscht haben, also beim Handgreiflichen, dann rechnen Sie hier 15 minus 7.

Ja, dann rechnen wir es exakt als minus.

Ach so, und später nehmen Sie den normalen Algorithmus, sozusagen... also, den, der wahrscheinlich auch in vielen Hamburger Schulbüchern ja so gelehrt wird, und dann...

So ist es, da wird diese Ergänzung... das verwirrt viele meiner Schülerinnen und Schüler. Ich habe sehr viele Schülerinnen und Schüler, deren Eltern aus Polen stammen; die Kinder sind inzwischen hier geboren. Aber Eltern sind ja häufig dann so, dass Sie das auch zu Hause denn mal vorbereiten oder mit den Kindern üben wollen, und dann bringen sie den Kindern dann natürlich diesen Minus-Weg bei. Das ist vielleicht auch ein... Das ist aber nicht der Hauptgrund, aber es ist sicher auch ein Grund, warum ich diese beiden Lösungswege anbiete; damit die Kinder nicht ganz verrückt werden, wenn ihre Eltern dann sagen: Du musst hier aber Fünfzehn rechnen, und dann wird dann oben bei der Vier ´n Punkt gemacht oder `´ne Eins geschrieben, wie man das früher gemacht hat.

Ah ja. Mmh...

Äh, und wenn ich diesen Ergänzungweg übe, dann mach ich immer so ein – ähm, darf ich das hier drauf machen auf den Zettel? ...

...ja gern...

...dann machen wir immer mit Rot so ein Symbol, also wir fangen hier von da... plus... wie viel gleich das. Können Sie das so verstehen?

Ja.

Das schreiben wir ´ne Zeitlang dann immer daneben, und üben auch immer wieder die Sprechweise, aber auch da erlaub ich eben entweder zu sagen, 7 plus wie viel gleich 15 oder von 7 bis 15, wie viel ist das?

Mmh. Die kleine Eins bei dem Ergänzungsweg...

Kommt bei mir da unten hin.

Wie entsteht die dann. Also, Sie sagen ja, das Ergänzungsverfahren unterscheidet sich dann von dem Eintauschverfahren hier oben, und wie entsteht beim Ergänzungsverfahren dann die kleine Eins?

Kleine Eins. Mmh, das besprech ich so mit den Kindern: Von Sieben bis fünf das geht ja nicht...

...Ja...

Wir rechnen ja noch nicht im Bereich der Zahlen mit Minus, und dann muss man einfach denken, von Sieben bis 15! Aber, diese Zehn, die kann man ja nicht irgendwoher aus der Luft nehmen, die muss man ja nachher wieder berücksichtigen – und deswegen schreiben wir sie da unten hin. Und... das erkläre ich... ja, also, das erkläre ich nicht eigentlich, das wird dann so gemacht.

Ja...

Weil... ich weiß jetzt nicht, wie ich das sonst erklären sollte, sag ich jetzt offen...

Frage 2

Aha, ich sehe, ja... Ich würde wahrscheinlich nochmal ganz systematisch anfangen, zunächst das schriftliche Multiplizieren mit einer einstelligen Zahl zu üben, und dann mit zweistelligen und dann mit dreistelligen.

Mmh.

Und da die ja schon'n bisschen Ahnung haben, müsste das nicht mehr so lange dauern. *[Gong]* Schon zu Ende, was machen wir?

Wir unterbrechen, oder? Jetzt beginnt ja hier Unterricht.

Das heißt, zumindest ich müsste die Kinder mal reinholen, ja?

Ja...

Dann sag ich das den Kindern.

Ok. Also, Sie würden nochmal mit Einer, Zehner und Hunderten mulitiplizieren, einzeln?

Mmh, mmh. Das würd ich nochmal wiederholen, um das nochmal ganz klar zu kriegen, wenn ich im sechsten Schuljahr wäre.

Frage 3

Ich würde zuerst mal sagen, das find ich ganz toll, dass Du dir so etwas überlegt hast, ich muss mir das zuhause nochmal in Ruhe ansehen, ob das auch wirklich stimmt, und wenn das alles stimmt, dann musst du das unbedingt den anderen Kindern erzählen und beibringen und dann bekommst du ´ne mündliche Eins in Mathe *[lacht]*.

6.13 *Protokoll 13 H*

Alter der Lehrkraft: *52 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *35 Jahre*

Schulbuch:„Im Augenblick unterricht ich mit **„Welt der Zahl“**, bin aber damit nicht zufrieden. Früher hatte ich das Zahlenbuch und das habe ich dann nicht mehr genommen, weil das für meine Schüler zu anspruchsvoll war. Zu viel Material auf einer Seite. In dem Einzugsgebiet meiner Schule leben sehr viele ausländische Schüler. Die konnten mit dem Buch überhaupt nicht allein arbeiten. Alles, was sie machen sollten, musste ich ihnen dreimal erklären. Und dann konnten sie immer nur drei Aufgaben lösen und bei der vierten mussten sie dann wieder nachfragen.

Deswegen habe ich dann eines genommen, von dem ich dachte, sie könnten es eher bewältigen. Aber da ist mir einfach zu wenig denken und selbst herausfinden und Kreativität.

Ich misch das jetzt so. Also ich nehme das Buch, lass sie darin rechnen und die anderen Aufgaben nehme ich aus dem Zahlenbuch.

Ab dem nächsten Schuljahr nehme ich dann eines von den neuen Büchern. Die sind alle bestechend

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Sie müssen ... verstehen können, äh, sie müssen die Zahlen, also die Zehner in Einer rückverwandeln können. Damit ... damit sie die Einer voneinander abziehen können. Und zwar würde ich das verdeutlichen mit Material, mit Rechenplättchen in der Stellentafel. ...

Hm, z.B. bei der ersten Aufgabe...?

Ähm, also, drei Z und 15 E in die erste Reihe hinlegen und davon dann ... und in die zweite Reihe 2 Z und 7 E und dann können wir jetzt erstmal manuell abziehen, dass die Kinder (hier war ein Wort auf der Aufnahme nicht zu verstehen) sehen und dann würde ich diese Aufgaben mit den Kindern üben.

Sie sagen „abziehen“, würden Sie...

...wegnehmen, richtig, ...

würden Sie das mit dem Ergänzungsverfahren machen? Oder würden Sie von oben nach unten rechnen?

Zuerst würde ich es richtig subtrahieren. .... (schweigt ca. 10 Sek.)

Später kommt dann der Moment, wo Sie den Übertrag auf dem Papier schreiben – oder vielleicht auch nicht – wie machen Sie das mit den Schülern?

(überlegt ca. 10 Sek.)

Ist ja schon lange her, nicht war?

Ja, das stimmt ...
Ja, wir haben das wieder umgewandelt. Oder habe ich oben einen Zehner dazugelegt? Wie hab' ich das gleich noch gemacht?

(Denkt ca. 20 Sek. nach...)

In der Schreibweise, die Sie verwendet haben, wo taucht denn der Übertrag dort auf?

Denkt kurz nach ... Ja unten, also bei der unteren Zahl.

Ja, jetzt weiß ich wieder! Wir haben unten einen dazugelegt und oben auch. Weil ja, wenn man die eine Zahl mit Zehn erweitert, dann muss man dass mit der anderen auch tun. Wir haben also einmal zehn E dazugelegt und einmal ein Z.

Ach so, also haben Sie oben überhaupt gar keinen Zehner eingelöst?

Ja.

Und, äh, wo steht der Übertrag dann?

Nur unten.

Frage 2

Ich würde noch einmal auf das halbschriftliche Rechnen zurückgehen. Erst mal mal 600 nehmen, dann müssen wir da die Nullen dranhängen, dann mal 40, ist die eine Null und dann mal 5 und dann hab' ich's hier richtig untereinander stehen. So wie wir das auch machen, wenn wir mit der schriftlichen Multiplikation anfangen. Also, bevor wir damit anfangen, haben wir erst mal halbschriftliche Multiplikation.
Und dann Überschlag. Na ja gut, dass nützt nichts, da kann man gerade noch sehen, dass das Ergebnis falsch ist, aber weiß trotzdem nicht, wie man es rechnen soll.

Frage 3

Dass ich das ganz toll finde, dass sie das ausgeknobelt hat.

(überlegt ca. 15 Sek.)

Also, das verstehe ich nicht so ganz. Also, wo das Problem ist.

Also, sie steht vor Ihnen mit einem Zettel, da ist diese Zeichnung drauf. Und sie sagt: „Schau'n Sie mal, Frau X, gestern kam mir diese Idee." und zeigt Ihnen das so.

Ja gut, also dann soll sie es mal den anderen Kindern erklären. Und dann, wenn sie jetzt diese beiden Figuren hätte, könnte man ja das darein legen und dann könnte man ja sehen, dass das da zwei mal drin liegt.

6.14 *Protokoll 14 H*

Alter der Lehrkraft: *51 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: 28 *Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch, verwendet aber auch Materialien aus anderen Schulbüchern – je nach Bedarf.*

Benennt Mathematik als eines ihrer Lieblingsfächer → „Hobby". Macht aber keine Fortbildungen. Eignet sich Wissen mit Hilfe der Schulbücher oder durch Rücksprache mit Kollegen. Sieht die schulinternen Vergleichs-Leistungsnachweise als Möglichkeit der konstruktiven Kritik.

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Allgemein geben die vorhandenen Schulbücher kaum Erklärungshilfen zu diesem Thema. Dabei finde ich es sehr wichtig, dass die Kinder nicht nur schematisch rechnen, sondern dass dabei auch logische Rechenschritte erzielt werden *(meint: Verständnis dessen, was gerechnet wird)*.

Ich erkläre es den Schülern z.B. folgendermaßen:

$$\begin{array}{rr} & 3\;2 \\ - & 7 \\ \hline \end{array} \quad \text{ist das Gleiche wie} \quad \begin{array}{rr} & 4\;2 \\ - & 1\;7 \\ \hline \end{array}$$

Wenn also wie im Beispiel ihrer Aufgabenstellung

$$\begin{array}{rr} & 4\;5 \\ - & 2\;7 \\ \hline \end{array}$$

gerechnet werden soll, dann müssen sowohl oben als auch unten 10 ergänzt werden, damit die selbe Differenz rauskommt.

Ich würde Ihnen dann anhand einer kleinen Vorübung erklären: Wenn ich oben 10 dazulege, muss ich unten ja auch wieder 10 abziehen (*meint das „gleichsinnige Ergänzen", benutzt aber mehrmals diese Ausdrucksweise mit „abziehen"*). Und anstelle der 10 schreiben wir in der 2. Spalte ja eine 1, da dies ja die Zehnerspalte ist.

Um solche Aufgaben lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler über folgende Voraussetzungen verfügen:

- Sie müssen den Zahlenraum bis 20 sicher beherrschen
- Innerhalb dieses Zahlenraumes müssen sie den Zehnerübergang verstanden haben und beherrschen.
- Der Begriff „von-bis“ muss klar sein (*verwendet nicht den Begriff „Ergänzen“, sondern eine Standardformulierung aus dem Mathebuch: „von ... bis ... fehlen ... „)*

Frage 2

Ich würde damit Beginnen, die Grundlagen aus dem vierten Schuljahr wieder aufzuarbeiten. Dies würde ich mit dem „Malkreuz“ (*Algorithmus, den das „Zahlenbuch“ vorschlägt*) starten.

Beispiel: 32 x 11

x	30	2
10	300	20
1	30	2

Das ist ja genau das, was in der Multiplikation gemacht wird.

Zurück zu der Frage:

Den Kindern muss erklärt werden, dass die Lehrstellen entstehen, weil ja z.B. mit 100 multipliziert wird. Und das Stellenwertsystem muss aufgearbeitet werden. Die Bedeutung der Stellen muss klar sein.

Eine andere Möglichkeit wäre also, die Schritte nochmals schriftlich aufzulisten → halbschriftliche Multiplikation. Dabei würde ich die entsprechenden „Stellennullen“ farblich kennzeichnen.

Frage 3

Antwortet spontan.

Finde ich hervorragend, komm an die Tafel und zeig uns, was du gefunden hast!

Dabei können dann auch gleich die Begriffe Quadrat und Rechteck wiederholt werden.

6.15 *Protokoll 15 H*

Alter der Lehrkraft: *35 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *5 Jahre*

Schulbuch: *Anfangs Mathebaum, seit zwei Jahren mit dem Zahlenbuch, als Fachvertreterin in der Schule als sehr gutes Buch empfohlen.*

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Vorraussetzung sind die kleinen 1+1 Sätze, die gefestigt sein müssen.

Die Schüler müssen die Stellenwerteinsicht haben, dass es ihnen also klar ist, dass es hier darum geht, im Stellenwert zu rechnen, den Übertrag auch im Stellenwert zu vermerken.

Dann wäre mir hier immer sehr deutlich, dass es da um sehr viele Richtungswechsel geht. Das heißt, also gerade bei den schriftlichen Rechenverfahren muss ja ein Schüler, wenn er diesen Algorithmus anwendet, von oben nach unten, dann wieder schräg rüber, notieren, dann wieder oben gucken, dann unten was beachten und da sind auch in der dritten Klasse Kinder, die in der Raum-Lage-Beziehung Schwierigkeiten haben, sehr stark durch verbalen Unterricht, also durch Versprachlichung dessen, was sie dort tun, zu begleiten, damit dieser Richtungswechsel nicht zu einer Fehlerquelle wird. Das merke ich immer mehr, dass man das nicht einfach nur so hinnehmen kann, sondern dass man mit dem Kind sprechen muss: Was tust du gerade, wo notierst du was, was kannst du dir merken.

Dass man da also ganz gezielt den diagnostischen Blick haben muss: Was beherrscht dieser Schüler schon oder wo sind seine Schwierigkeiten; weil sonst so eine Aufgabe sofort solche Schwierigkeiten aufwirft.

D.h. also, gehen wir jetzt mal ganz nach unten, hier in diesen Aufgaben ist ja links und rechts ganz stark vertreten. Wo fange ich also an? Fange ich bei den Einern an oder bei den Zehnern? Wo notiere ich da den Übertrag? Mittig? Zwischen den Zeilen – was ist da, da ist ja eigentlich gar nichts. Das ist bei schwachen Kindern oft ein Problem.

Und wie ich das thematisieren würde, war Ihre Frage, wie ich an das Problem herangehe.

Ich habe gleich Subtraktion mit Übertrag thematisiert und nicht irgendwie Aufgaben, wo kein Übertrag vorhanden war. Sondern, um gleich diese schwierige Situation

... wenn nämlich ein Übertrag auftaucht. Nicht zu sagen: Das mache ich jetzt! Sondern gleich zu sagen: Wie gehen wir da ran, dass also klar wird, was der Übertrag in der Bündelungsaktivität bedeutet.
Dass ja der nächste Stellenwert durch die Bündelungsaktivität entsteht. Dass man das irgendwo vermerken muss und das dieser Übertrag dann ja diese Merkzahl ist, die wir eigentlich als Bündeleinheit uns merken müssen.
Wenn das nicht klar ist, dann habe ich das begleitend in der Form gemacht, dass ich eine Stellenwerttafel daneben gelegt habe, wo die Kinder das mit Steckwürfeln oder mit Plättchen das handelnd durchführen konnten – was dort gebündelt wird und wie sich das dann überträgt auf die Ziffern.

Ganz konkret: Wie würden Sie das in diesem Fall, 47-25, erklären? Wie würden Sie mit den Schülern ganz konkret bei dieser Aufgabe handelnd da rangehen?

Da würde ich, um es anschaulich zu machen, entweder mit Geld in der Einheit 1ct, 10ct und 100ct arbeiten, oder um es noch anschaulicher zu machen, gar nicht mit Geldwerten, sondern mit Plättchen. Ich würde also 5 Plättchen in die Spalte legen, die die Einer repräsentieren, vier, die die Zehner repräsentieren und null bei den Hundertern. Und dann da drunter in einer zweiten Reihe 7 Plättchen bei den Einern und zwei bei den Zehnern. Es darf dort allerdings nicht drüberstehen H, Z, E, sondern es ist einfache eine Blankotabelle.
So, und dann würde ich diese Richtungswechsel, die nachher beim Schreiben vorgenommen werden, so begleiten, dass ich also sagen würde: Die 7, also stell dir vor diese sieben Plättchen sind Bonbons, die du aufessen möchtest. Du hast aber nur fünf. Das geht ja dann nicht. Also, ich kann ja fünf von oben wegnehmen, aber 7 nicht. Und in diesem Augenblick müsste ich aus dem Stellenwert der Zehner einen Zehner rüberschieben zu den Einzelnen oben. Das darf ich ja aber nicht, also, ich muss ihn ja durch 10 repräsentieren. Dann habe ich dem Feld oben 15 einzelne Plättchen liegen und dann kann ich sieben davon abziehen.
So wird den Kindern einsichtig, dass es darum geht, die Bündeleinheiten aufzubrechen.
Und dann eben Schritt für Schritt weiter. Nur im zweiten Schritt bei dieser Aufgabe ist es dann nicht nötig, ich habe ja nur zwei Zehner gehabt und einen habe ich ja entbündelt rüber zu der fünf geschoben, bleibt also nur noch ein Zehner an der Stelle übrig.
Und (...) das wäre der Ansatz, der noch so traditionell vertreten wird, weil es eben dort in der Minusversion angewandt wird. Was ich stark unterscheide.

Also, es gibt schwache Kinder, die mit dem Ergänzungsverfahren besser zurechtkämen. Das heißt also, wie viel muss ich zu sieben dazutun, um 5 zu bekommen. Das wäre eine Lösung, die an der Stelle auch eine Entbündelung notwendig macht. Also, wie viel muss ich zu 7 dazutun, damit ich 15 bekomme.

Die Kinder, die die 1-1 Sätze schon als kleine Blockade in sich tragen, und dann ja meistens bis zur dritten Klasse mit sich tragen, immer ein Hemmnis, wenn sie sagen „Ooooh, Miiinus“. Und deswegen dann lieber Ergänzen im positiven Sinne auffüllend ergänzend ist.

Ich habe bei den meisten dieses Ergänzen dargestellt, habe mir aber auch, wenn ich merkte, da kommt ein Schüler partout nicht weiter, dann nach Wochen noch einmal einen anderen methodischen Weg eben in dem tradierten auch mal Minus zu sprechen.

Denn ich denke, wenn man dann irgendwann in so eine Sackgasse kommt, dass man dann irgendwann noch einmal einen anderen methodischen Weg anwenden sollte.

Und dann auch Kinder, die das auf der Ebene so nicht verstehen, was ich vorhin sagte mit Geld, dass ich also wirklich hinlege und sage: Du hast 45€ und du möchtest 27 davon ausgeben, weil du dir davon etwas kaufen willst. Wie würde der Vorgang vorgehen. Und das man dann wirklich hin- und herschiebt und dann sagt: So, du hast jetzt hier Euroscheine und Stücke, so dass auch hier wieder dieser Entbündelungsvorgang stattfinden muss. Das ist für viele Kinder auf dieser Geldebene oft viel verständlicher als auf der Plättchenebene.

Frage 2

Ich würde zurückgehen auf die Zerlegung der einzelnen Zahlen. Also, in diesem Beispiel ist es ja wichtig, dass die 645 in drei verschiedene Zahlen zerlegt werden kann. Und würde an einer langen Rechnung, die also dann hieße: 123 x 600, daneben isoliert die Aufgaben 123 x 40 und dann eben 123 x 5. Da wird dann deutlich, dass bei der zuerst genannten Aufgabe ein Ergebnis herauskommt, welches an den letzten beiden Stellen mit zwei Nullen vertreten ist, weil es sich um eine Hunderterzahl, eine glatte Hunderterzahl an der Stelle handelt. Bei der zweiten Aufgabe eben eine Null, weil es sich um die vierzig handelt und zum Schluss eben keine Null.

Und wenn man dann diese drei Rechnungen nebeneinander stellt, und dann den additiven Weg wählt und sagt: Also, diese drei Teilprodukte musst du jetzt addieren, um zum Endergebnis zu kommen, dann sieht man also, dass es hier zu diesem Einrückvorgang käme, weil ja die Nullen nämlich dazu führen, dass die Zahlen wei-

ter nach vorne rutschen. Und oft wird im Grundschulbereich eben leider der Fehler gemacht, dass viel zu früh auf diese Nullen verzichtet wird und das eben einfach oft auch gar nicht klar ist, warum da Nullen stehen. Das heißt, dieser lange Weg wird oft sehr schnell übersprungen, wenn man zum Algorithmus übergeht, der also dieses verkürzte Verfahren hat und möglichst schnell den Kindern wenig Schreibarbeit anbieten soll und dass dann die Einsicht nicht da ist: Warum muss ich unter der 6 anfangen zu notieren. Wie beginne ich, so etwas zu verschriftlichen? Das wird meiner Meinung nach nur deutlich, wenn man sehr lange mit der Null arbeitet. Und dann auch deutlich macht, warum dann eine Zahl vielleicht zwei Nullen am Ende hat oder drei – das also aufbröselt.
Und wenn das so nicht funktionieren würde, dann würde ich sogar noch den etwas längeren Weg machen und auf die Methode mit dem Malkreuz zurückgehen. Ich weiß nicht, ob Ihnen das etwas sagt?

Das kenne ich nicht, wahrscheinlich gibt es dafür noch einen anderen Namen?

Also, das kann ich Ihnen gerne noch einmal erklären, also das müsste ich aufzeichnen, dafür brauche ich einen Stift und ein Blatt...

Sie können die Rückseite des Aufgabenblattes nehmen...

Dann stehen da ja die Teilprodukte und in dem Falle finde ich es ganz offensichtlich für die Kinder, dass wichtig ist, dass hier eine Zahl entsteht, die vier Nullen hat. Das ist auch wieder eine Problematik: Wie thematisier' ich, dass eine Zahl Nullen haben muss? Und wie viele sie haben muss.

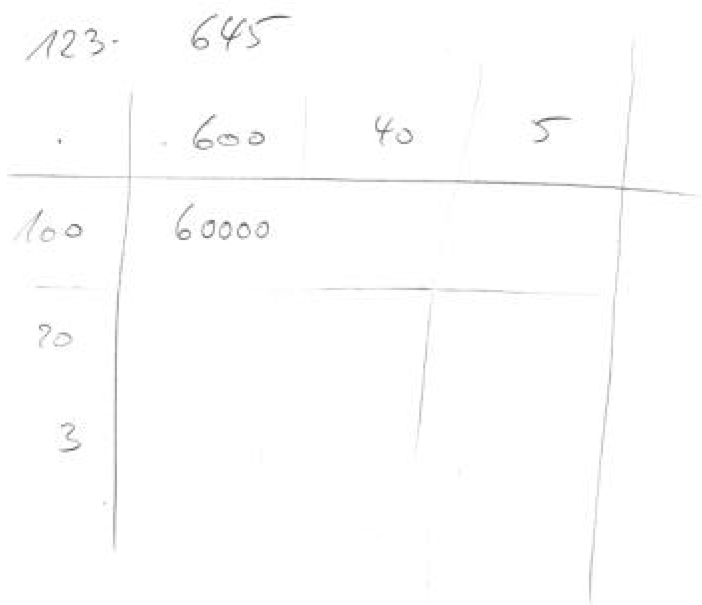


Abb. A 19: begleitende Handskizze der Lehrkraft 15 H

Und wenn diese Teilprodukte errechnet sind, addiere ich ja die drei. Und hier entsteht dann das Ergebnis dieser Teilprodukte, dieser Teilprodukte und dieser Teilprodukte und dann die gesamte Ergebnisdarstellung. Was natürlich wesentlich länger ist, aber eben auch sehr deutlich macht, dass man ganz genau die Stellenanzahl gucken muss, die durch dieses Malkreuz sehr bewusst dargestellt ist. Das also

die Zahlen nach hierhin immer kleiner werden, weil ich ja immer kleinstelligere Zahlen bekomme.
Und dass man natürlich auch noch einmal Wert darauf legt, dass es hier um die Multiplikation mit einer gemischten Hunderterzahl geht und dass da eben wichtig ist (...) es kann nicht sein, dass, wenn ich diese Zahl mal 600 nehme, ich eine dreistellige Zahl herausbekomme, und wenn ich diese Zahl mit einer einstelligen Zahl malnehme auch eine dreistellige Zahl rauskommt, die womöglich auch noch größer ausfallen könnte. Wenn wir jetzt hier 600 mal 49 hätten, dann wäre die Zahl wahrscheinlich noch größer als die erstgenannte.
Und dass das vom logischen Blick für die Kinder einfach auch eine Fehlerquelle ist, die es gilt, zu thematisieren. Damit die Kinder merken: Es kann gar nicht sein. Ich muss da an der Stelle ja auch irgendwo eine fünfstellige oder vierstellige Zahl erhalten.

Frage 3

Überlegt 15 Sek.

Ja, ich würde ihr erst mal Recht geben, dass sie da etwas beobachtet hat und daraus eine Regel ableitet.
Und wenn sie mir dieses Bild zeigt, dann würde ich das als Anlass nehmen, um das der Klasse näher zu bringen und die Schülerin mit einzubinden, dass sie ihre Erkenntnis schildert und dann würde ich das auch wunderbar als Anlass nehmen, wenn eine Schülerin das so „entdeckt“, was ja eigentlich schon in der dritten Klasse hätte sein können, dass man da also einen wunderbaren Anlass hat, wo Schüler sich mit beschäftigen in der Altersstufe und das man das zum Thema machen kann. Es ist ja Thema auch in der Grundschule.
Und hier ist ja die Möglichkeit, einerseits durch Verlagerung des kleinen, der kleineren Darstellung auf die größere auch transparent zu machen, dass es sich hier um die Verdoppelung der Fläche handelt. Bei den Zahlenwerten kann man eben entsprechendes beobachten.
Und das man da dann auch Wirkungen auf die Ergebnisse hat, dass man gleichwertige Beispiele finden könnte und sagen könnte: Das ist hier auch der Fall. Dass man diese Regel dort ableiten kann.
Ich sehe darin eigentlich, dass es in der Grundschule zu kurz kommt, dass man häufig Beispiele bringt, aber diese Beispiele nicht verallgemeinert und hier wunder-

bar eine schöne Aufgabe hat, um schon in der Grundschule anschaulich zu beweisen.

6.16 *Protokoll 16 H*

Alter der Lehrkraft: *49 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *19 Jahre*

Schulbuch: *Mathebaum*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also, sie müssten eine gesicherte Vorstellung haben vom Aufbau des Zahlensystems. Sie müssten Ergänzen können (...) Ja, sie müssten in der Lage sein, bei dieser ersten Aufgabe 45 –27 zu sagen: Bis wohin ergänze ich denn überhaupt? Also, diese Zielvorstellung, so nenne ich das jetzt mal, müssten sie entwickeln können (...) ich denke, das ist also erst mal das Wichtigste, was mir jetzt spontan so dazu einfällt.

Wenn Sie vom Aufbau des Zahlensystems sprechen, was genau meinen Sie damit?

Also, sie müssten wissen, dass 45 irgendetwas zu tun hat mit 35, 25, also dass die Hunderter (...) also, wir haben mit der Hundertertafel gearbeitet, dass sie sehen, das ist eine Symmetrie, da entsteht es, da wiederholt es sich ständig... Ja. (Schweigt, lacht nervös)

Wie würden Sie an die Erklärung dieser Aufgabe herangehen?

Also, wir haben das so gemacht, dass wir gesagt haben: Von 7 bis 5 kann ich nicht ergänzen, äh, bis wohin kann ich denn überhaupt ergänzen. Welche Zahl ist die nächste nach der 5, zu der ich von der 7 ausgehend ergänzen kann.
Wo kriege ich jetzt diese 1 von der 15 her, wo ist sie verborgen, wo steckt sie drin, und dann muss ich mir also überlegen können, dass ich mir von diesen 40 Zehnern einen Zehner entnehme, mit dem ich dann arbeite.
Und den muss ich mit markieren. Und da hatte ich also Differenzen mit den Kindern, als ich das eingeführt habe, dass einige Eltern, ein Koreaner zum Beispiel, der schrieb dann diesen Übertrag da oben hin (...)

Ja?

Und das ist im Grunde genommen das zentrale Problem, nicht, also, dass man ihnen sagt, also ich mache es jedenfalls so, dass ich ihnen sage: wir geben ihn da unten hin. Das, was wir oben weggenommen haben – und das ist unlogisch eigentlich - das tun wir unten dazu.

Sie sagen, das ist unlogisch?

Ich sage mal, für das kindliche Verständnis. Ich nehme da irgendwo etwas weg und tue es woanders dazu und komme dann schließlich doch zum gleichen Ergebnis. Also, da hatten einige Kinder Probleme: Warum nehme ich das erst da oben weg, wenn ich es dann unten wieder dazutue.

Und wenn sie den Kindern das erklären würden, sie sagen ja, das sei unlogisch – und die Kinder kommen jetzt darauf, was sagen sie dann?

Also, für die Kinder wäre es ja logischer zu sagen: Also, ich nehme von der vier einen weg und habe dann nur noch drei. Und ergänze dann von der zwei bis zur drei. Stattdessen tue ich aber unten etwas dazu, um dann wiederum zu ergänzen.

Schreibt das Mathebuch dieses Verfahren vor? Oder die Hamburger Richtlinien?

Ja, jaja. Also, in den Büchern wird es so gemacht. Da steht der Übertrag halt unten. Und um die Kinder jetzt nicht unnötig zu verwirren, mache ich das natürlich auch so. Als Übereinkunft praktisch.

Und Sie erklären dann aber schon, dass es dann „eigentlich" anders sein müsste?

Also, wenn ich es mit den Kindern so herleite, dann komme ich nicht darum herum. So ist es mir jedenfalls im Unterricht mit der Klasse ergangen. Dass sie gesagt haben: Wir müssen da was anbrechen, wir müssen da was wegnehmen. Es ist ja auch immer die Rede vom Wegnehmen. Beim Minuszeichen, da denken die Kinder ja auch zunächst mal ans wegnehmen. Und es ist für sie schon ein großer Schritt, zu ergänzen. Da geht ja in den Köpfen, also zunächst mal muss da ja einiges umgesetzt werden.

Frage 2

Ich würde dann wahrscheinlich die Stellenwerttafel wieder aus der Tasche ziehen, (...) um ihnen zu vermitteln, dass das ja keine Hunderter, Zehner und Einer sind (*deutet auf das richtige Ergebnis*), sonder Tausender und Zehntausender u.s.w.

Wir haben es, wieder analog zu den Lehrwerken, wieder so gemacht, dass wir tatsächlich sagen: 100 mal 645, 20 mal 645,... so rechnen und dann auch zunächst einmal die Nullen mitschreiben lassen.
Und dazu kommt, also damit bin ich gerade in der vierten Klasse, in der ich tätig bin, beschäftigt, dass wir auch Überschlagsweise rechnen und so eine Vorstellung davon bekommen: In welchen Größenverhältnissen rechnen wir denn eigentlich. Das ist manchmal (*lacht*) ein großes Problem! Eine Null mehr oder weniger wirkt ja wahre Wunder.
Also, so würde ich, (...) also ich würde noch mal wieder einige Schritte zurückgehen. Und würde gucken, was es denn heißt, wenn ich etwas mal Hundert nehme. Ob es dann wirklich 738 sein können.

Also, wie würde Sie den Schülern den Fehler dann konkret erklären?

123 x 600. Diese Rechnung müssten sie in der sechsten Klasse dann ja eigentlich schaffen. Und dann 123 x 40, und 123 x 5.

Frage 3
Überlegt ca. 8 Sek.

Also, da bin ich jetzt im Moment zu blöd. Also, das ist jetzt ihre Rechnung praktisch (*zeigt auf die Skizze der Frage 3*)

Ja, das hat sie sich wahrscheinlich zu Hause so aufgemalt.
Vorstellbar in diesem Moment wäre, dass sie vielleicht schon Flächenberechnung gemacht haben im Unterricht und sie daher diese Technik zur Umfangs- und Flächenberechnung kennt.

Ich steh im Moment ehrlich gesagt ein bisschen wie der Ochs vor'm Berg. Ich würde ihr sagen: Das ist ja wunderbar, was du da herausgefunden hast. Aber diese Theorie, die sie da ausgeknobelt hat, die sehe ich jetzt noch nicht.

Sie hat gesagt, das immer, wenn sich der Umfang einer geschlossenen Figur vergrößert, auch gleichzeitig die Fläche größer wird. Es ist also eine Art Gesetz, das sie aufstellt.

Überlegt ca. 8 Sek.

Mir ist im Moment ehrlich gesagt nicht klar, was die Schülerin jetzt macht.

Na ja, sie steht vor Ihnen mit dem Zettel und sagt: Schau'n sie mal, das hab ich mir gestern Abend ausgedacht. Und jetzt sagen Sie: ...... ?

Klasse! (lacht) Ich würde sie über den grünen Klee loben

6.17 *Protokoll 17 H*

Alter der Lehrkraft: *46 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *20 Jahre*

Schulbuch: *Welt der Zahl*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also, erst einmal müssten sie sich in dem Zahlenraum, das ist hier der Zahlenraum bis 100, zurechtfinden, d.h. sie müssen wissen, wie dieser Zahlenraum aufgebaut ist, mit den Zehnern und Einern.

Ich denke, man sollte das eben auch erst visuell irgendwie darstellen, d.h. also nicht gleich nur mit den Ziffern und Zahlen kommen, sondern eben den Kindern klarmachen, dass sie sozusagen einen Zehner mit zu den Einern nehmen müssen um eben überhaupt abziehen zu können oder ergänzen zu können, so wie wir das ja rechnen, wir rechnen von der 7 bis zur 15.

Und ich denke, es sollten vor allem erst einmal auch die Schwächeren handelnd hantieren, und dann wird es später abstrakter, indem es dann eben handschriftlich wird. So würde ich da herangehen.

Frage 2

Ich würde diese Aufgaben noch mal versuchen mehr so halbschriftlich den Kindern zu verdeutlichen, d.h. also 123x645, da würde ich das in Schritten 123 x 600 erst, damit die Kinder merken, dass an dieses erste Ergebnis eigentlich noch die beiden Nullen herangehören, weil es eben 600 sind, dann 123x40 und dann 123x5. Dementsprechend die Ergebnisse dann sauber untereinander schreiben und dann werden die Kinder – hoffe ich – dass sie dann merken, da gehört noch eine Null, da gehören noch zwei Nullen hin und dann komme ich wieder auf diese Aufgaben zurück.

Dann sage ich Ihnen, dass man als Mathematiker immer versucht, möglichst wenig zu schreiben. Und dann lassen sie halt die Nullen, die hier ja eigentlich hingehören könnten, die man ja auch mitschreiben könnte, weg.

Das wäre mein Ansatzpunkt, dass man die Zahl aufteilt in die glatten Hunderter, Zehner und Einer.

Frage 3

Denkt nach, betrachtet die Skizze, murmelt überprüfend die Umfangs- und Flächenberechnung (ca. 45 Sek.)

Das ist wirklich eine Sache, vor der ich noch nicht gestanden habe.

... lacht ... denkt nach (wieder ca. 45 Sek.)

Ich denke, da müsste man z.B. Figuren suchen, die einen Umfang von 16 cm haben und die Kinder überprüfen lassen: Ist das wirklich wahr? Bleibt dieser Inhalt dann immer kleiner als bei dieser zweiten Figur, die sie sich ausgesucht hat? D.h. man könnte aus diesem Quadrat, das sie hat, eben auch ein Rechteck machen und dann überprüfen lassen, wie verändert sich dann der Flächeninhalt und stimmt dann ihre Behauptung weiterhin. Dass die Kinder das also selbst noch einmal ausprobieren. Welche Möglichkeiten gibt es, eine Figur mit dem Umfang von 16cm zu zeichnen, ein Quadrat habt ihr hier, wie ist es, wenn es ein Rechteck wird, also 2 cm Seitenlänge und dann wäre das andere 6cm oder 1 cm .... und so weiter. Und dann können sie selbst sehen: Hat sie nun Recht, diese Schülerin, mit ihrer Vermutung, oder ist das Zufall bei diesen beiden Figuren.

6.18 *Protokoll 18 H*

Alter der Lehrkraft: *35 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *5 Jahre*

Schulbuch: *Welt der Zahl*

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Das wichtigste ist erst einmal das Stellenwertsystem, dass sie also wissen, wo die Einer und die Zehner stehen.
Und das Entbündeln eines Zehners.
Ja und dann die Anordnung, also die Orientierung in dieser Anordnung: Dass die Einer unter den Einern stehen, die Zehner unter den Zehnern.
Am Anfang würde ich den Kindern sagen, dass das nur eine andere Art ist, das aufzuschreiben – sie kennen das ja sonst nur so von links nach rechts geschrieben.
Und um konkret damit zu rechnen, also mit dem Übertrag .. also, ich kann mal kurz erzählen, wie ich das eingeführt habe:
Ich habe zuerst die Aufgaben ohne Übertrag gemacht und habe die Kinder selbst überlegen lassen: Wie kann man die Aufgaben rechnen. Und dann war das ganz leicht.
Und bei Aufgaben mit Übertrag haben die Kinder dann eben angefangen: Wenn das so nicht geht, dann mache ich das anders herum. Und dann war aber klar: Das geht nicht.
Den Subtrahenden habe ich dann in der ersten Zeit immer farbig markiert, damit immer klar war: Was wird abgezogen. Da dann auch den Übertrag in der Farbe hingeschrieben.
Denn das war dann eigentlich immer das größte Problem. Ich hatte gestern auch wieder ein Kind, dass das eigentlich sehr sicher kann. Das hat auch gestern wieder gefragt: Soll ich den Übertrag nun oben oder unten dazuschreiben? Also, das hat der wieder vergessen. Wobei ich da nun auch wieder dachte: Ein Kind, dass das verstanden hat, dass ich ja hier einen entbündel, dann muss ich den, den ich als Übertrag dazugeschrieben habe, den muss ich mit abziehen.

Wenn Sie entbündeln?

Nee, also, ich entbündele nicht, aber ich ziehe sozusagen einen mehr ab. Also wenn ich jetzt von der 7, also 7 + mh mh mh = 15 rechne, dann habe ich ja einen

Zehner mehr abgezogen. Also dann ziehe ich nicht nur zwei Zehner ab, sondern drei Zehner.

9 Sek. Schweigen, dann ich: Das verstehe ich noch nicht. Erklären sie bitte noch einmal.

Ja also, (illustriert mit Skizze handschriftlich) von der 5 kann ich keine 7 abziehen. Also muss ich von der 15   7 abziehen. Zuerst haben wir uns dass dann so aufgeschrieben. 15 –7 also das sind 8 (schreibt etwas...)

Jetzt haben Sie unten eine 1 hingeschrieben...

Abb. A 20: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 18 H

Ja. Das ist dieser Zehner, den ich hier vorhin schon weggenommen habe. Also, ich rechne, wenn ich es nicht schriftlich rechne, sondern es anders aufschreiben sollte, rechne ich 15 – 7 und dann rechne ich, also einen habe ich hier dann schon weggenommen, 30 – 20. Also den Zehner, den habe ich hiervon weggenommen (zeigt auf die 45).

Sie schreiben dann aber unten die 1 hin, und oben aber gar nichts.

Oben gar nichts.

Obwohl oben ja eigentlich eine ganze Menge passiert...

Ja, den Kindern habe ich das am Anfang auch so aufgeschrieben. Also habe ich den Übertrag hier unten erstmal nicht, sondern gesagt: 7 bis 5, geht nicht. Also: Von der 7 bis zur 15. Und hab die 15 hier oben hingeschrieben. Ich habe gesagt: Wir klauen uns hier einen weg. Dann sind das hier nur noch dreißig, und den einen nehmen wir mit hier herüber, damit wir das überhaupt rechnen können.

Ah ja.

Das Problem ist dann teilweise, dass dieser Zehner, den man sich hier wegnimmt, dass den Kindern nicht klar ist, rechne ich jetzt von der 2 bis zur 5 ... also wo gehört dieser Übertrag hin: unten hin oder oben? Zum Minuenden oder zum Subtrahenden. Und den nehme ich ja aber weg, von dem Minuenden (*meint die 1 von der 15*)
Also, das meinte ich vorhin mit entbündeln. Das ist kein Entbündeln in Einer, sondern ich nehme aus der Zehnerspalte nehme ich einen Zehner rüber und drösel den hier sozusagen auf, damit ich hier nicht 5, sondern 15 stehen habe.
Was ich ganz wichtig finde, ist das Überschlagen.
Also, da ist schnell zu sehen, da muss so ungefähr 20 rauskommen. Also, das Überprüfen hinterher.
Ja und die Sprechweise, die haben wir richtig eintrainiert. Also, für diesen Fall: 7 + mh mh mh = 15.
Mit einem Pfeil in die richtige Richtung.
Und ich habe gemerkt, dass ungefähr die Hälfte der Kinder das verstanden hat und die andere Hälfte das versucht, zu verstehen, letztendlich dann aber diesen Algorithmus eintrimmt.
Und Probleme – also es wundert mich, dass hier keine Aufgabe mit der Null dabei ist. Damit haben alle Probleme, immer wieder.

Das ist ein Zufall. Also die Aufgaben sind einfach beliebig gewählt.

Also, egal ob unten `ne Null oder oben, da gibt es immer wieder Probleme. Auch Kinder, die den Algorithmus eigentlich sicher beherrschen, haben bei der Null immer wieder Schwierigkeiten. Weil sie dann nämlich doch wieder andersherum abziehen. Beziehungsweise den Übertrag vergessen.

Frage 2

Also, wir haben noch nicht schriftlich multipliziert, sondern machen jetzt Vorübungen dazu mit dem Keppler-Malstreifen. Und als nächster Schritt dazu würde anstehen, die Aufgabe so aufschreiben *(s. Abb. A 21)*.

Ich schreibe noch einmal darüber, was für Stellenwerte das sind. Es gibt zwei Teilschritte. Also einmal würde ich erst mal nur eine einfachere Aufgabe nehmen, um zu gucken, ob die vielleicht ... also nehmen wir mal 23 x 64 ... um zu gucken, ob die Schüler wirklich wissen, dass ich wirklich alles mit dem multiplizieren muss. Also 20 x 60 + 3 x 60 + 20 x 4 + 3 x 4. Also das ist so die erste Voraussetzung. Das muss den Schülern klar sein. Also, ich kann das zuerst in 23 x 60 und 23 x 4 auflösen. Und wenn die immer noch zu schwer sind, dann löse ich die eben noch weiter auf.

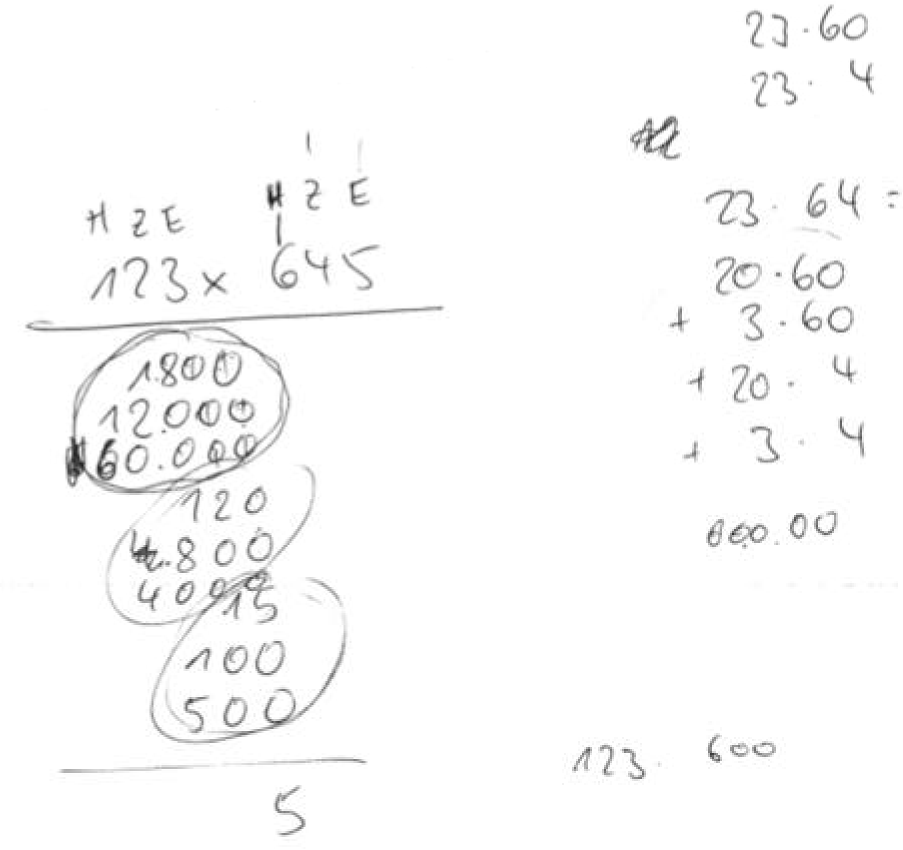


Abb. A 21: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 18 H

Wenn ich merke, dass den Schülern das klar ist, also so können sie es rechnen, dann würde ich jetzt sagen: Also gut, wir müssen also jeden Stellenwert mit jedem Stellenwert multiplizieren. So wie hier. Und gucken uns dann noch mal genau an: Was sind das eigentlich für Stellenwerte. 600 x 3. 3 x 600 sind 1800. 20 x 600 sind 12000. 100 x 600 sind 60000. Dann kommt 40 x 3 = 120 u.s.w. Hier kann ich dann sehen, wenn ich das obere ausrechne, das sind dann 62800, dann kann ich die Nullen weglassen, die sind ja überflüssig.

Bei der nächsten, also wenn ich mit den Zehnern multipliziere, dann taucht hier `ne Zahl auf, da kann ich nichts wegstreichen. Also hier, na, ich mach’s mal zuende:

Also: 40 x 3 sind 120, 40 x 20 sind 800 und 40 x 100 sind 4000. Und dabei ist eben dieses Untereinanderschreiben auch sehr wichtig. Das gleiche mit der Einerspalte: 5 x 3 sind 15, 5 x 20 sind 100 und 5 x 100 sind 500. Hm, jetzt habe ich irgendwas vergessen....

Sie haben bei der 4 x 20 bzw. 4 x 100 die 4000 gleich vor die 800 geschrieben...

Ah, ja, das hab ich gleich automatisch gemacht, ich mache es lieber noch einmal so...
So ... wenn ich mit dem Hunderter malnehme, dann würde ich den entsprechend farblich..., und mit dem Zehner multipliziert habe ich dieses Päckchen und wenn ich mit dem Einer multipliziere, dieses Päckchen.
Und stelle dann fest, dass ich hier eigentlich nur einmal ´ne fünf habe, und sonst eigentlich nur Nullen. Und die kann ich nachher, wenn es ums Addieren geht, einfach weglassen. Und nicht mit Hundertern rechnen, sondern quasi mit Einern. Also nicht 600 x 3, sondern 6 x 3. Und entsprechend bei den Zehnern eben auch, da fällt die letzte Stelle weg. Aber ich würde, bevor ich die schriftliche Multiplikation so einführe, würde ich die Nullen immer dazuschreiben.
Ja, und der nächste Schritt ist dann eben, dass ich da nicht mehr drei Zeilen habe, sondern das da in einer Zeile schreibe. Und mir immer den Übertrag merken muss. Aber es ging ja jetzt um die Erklärung: Warum wird das so schräg aufgeschrieben? Und nicht untereinander. Und nicht vielleicht anders schräg. Die wissen ja: schräg um einen versetzt, dann geht das ja auch so rum... Die haben sich dann einfach gemerkt: Ich muss das irgendwie schräg schreiben.

Frage 3

Ich würde ihr Gegenbeispiele anbieten und sie auffordern zu gucken, ob das da auch stimmt, ihre Theorie.
Das müsste ich jetzt ausprobieren, wie ich die Fläche zeichnen würde.

6.19 *Protokoll 19 H*

Alter der Lehrkraft: *40 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *12 Jahre*

Schulbuch: Welt der Zahl

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Ja, also der Reihenfolge nach: Wie würden Sie an solche Probleme herangehen. Hm, wie würde ich da herangehen? Also, wir gehen erst mal möglichst konkret daran. Wir machen das erst mal nicht schriftlich, sondern rechnen sozusagen mit Gegenständen, um überhaupt erst mal das „Minus" zu kapieren. Das ist für mich der wichtigste Schritt: dass man „praktisch" versteht, worum es geht. Dass also etwas abgezogen wird. Und um sich das zu erleichtern, wird es dann schriftlich gemacht. Und sie müssen verstehen können, worum es eigentlich geht, was da theoretisch dargestellt wird. Und dann kann ich ihnen das erklären, dass sie das technisch leisten können, das Verfahren.

Der Übertrag ist ja ein „Moment", in dem das erste Mal so eine „Hilfe" auftaucht...

Ach so, ja, also das war jetzt sozusagen zum schriftlichen Minus überhaupt, und der Übertrag, da müssen sie das Zehnersystem kapiert haben. Was einigen schwerfällt.

Wie würden Sie es erklären, wenn es drankäme?

Ich habe da so verschiedene Arbeitsmittel, z.B. diese Drehscheiben, wo man das Zehnersystem noch mal dran erklären kann. Also bis 9 drehen, dann dreht man einen weiter und dann kommt ein Zehner. Also, mit möglichst anschaulichen Materialien. Oder am „Abakus" kann man ja auch noch mal am Anfang erklären, wie das Zehnersystem geordnet ist. Eigentlich müssen sie ja erst mal begreifen, was die „1" an der Zehnerstelle überhaupt bedeutet. Dass es sich um 10 einzelne handelt, die dann sozusagen notiert werden.

Ganz konkret: Wenn sie in der Beispielaufgabe hier die 7 und die 5 haben, dann stoßen Sie ja hier an das Problem, dass Sie die 7 nicht von der 5 subtrahieren können.

Wir haben das immer so gemacht, dass man sich die Zehner dann „ausborgt". Und wir haben das dann trainiert z.B. mit dem Budenberg Computerprogramm, wo das ganz anschaulich dargestellt wird und wo man sich sozusagen nicht vertun kann. Das Programm akzeptiert nur, wenn man den Zehner auch notiert und den nicht vergisst oder unter den Tisch fallen lässt.

Notieren Sie oben und unten Zehner?

Wir notieren nur unten. (Denkt nach....). Also, ich kenn' das nicht anders. Das man oben notiert?

Es gibt ja verschieden Möglichkeiten, wie man schriftlich subtrahieren könnte.

Also, wir haben den Zehner immer unten notiert.

Und Sie haben ihn sich links oben ausgeborgt...

Ja, genau.

Und so erklären Sie das den Kindern dann auch, dass Sie sagen: „Wir borgen uns in der Zehnerspalte einen Zehner..."?

Ich habe das auch nach diesem Lehrbuch gemacht. Man ergänzt ja nach oben hin normalerweise. Wenn jetzt kein Zehnerübertrag wäre und oben stünde die 7 und unten die 5, dann würde man ja nach oben hin ergänzen und auf 2 kommen. Bei 5 und 7 kann man das ja nicht, dann machen wir da oben eine 15 draus. Dann haben wir das so gemacht, dass man sich den Zehner borgt. Und dann unten notiert und dann wird er sozusagen wieder mit eingebracht.

Frage 2

Ja, hatten wir gerade konkret im Mathetest, den Fall. Ich würde den Kindern erklären, dass das Teilprodukt direkt unter der Ziffer, die jetzt multipliziert worden ist, notiert werden muss. Das wäre natürlich ein technisches Verfahren, das zu erklären. Aber für die Kinder ist sowas dann einfach zu verstehen, wenn man ihnen sagt: Da muss es direkt drunterstehen.

Und von Ihrem eigenen Verständnis her?

Wir haben ein paarmal besprochen, wie das wäre, wenn das Nullen wären. Wenn man z.B. darauf verzichten würde, die zu notieren. Das dann zwar von der Ziffernfolge ein ähnliches Ergebnis rauskommen würde, aber das natürlich um einiges zu klein ausfällt, da so eine Null am Ende ja natürlich bedeutet, dass es ein Z, H, T oder so mehr wäre. Das haben die Kinder dann auch eingesehen. Das kann man ja an kleinen Beispielen konkret machen. Wenn man jetzt mal 8 oder mal 80 rechnet. Das man sich erst mal in einem Bereich befindet, wo die Kinder sich das noch vorstellen können was dabei rauskommt. Das die auch sehen: O.K., ohne die Null ist es ja viel zu wenig. So hatten wir das jetzt gerade neulich besprochen. Das es wichtig ist, dass man die Stellen betrachtet. Das ist ja kein Hunderter hier, sondern das ist, im letzten Moment, dann ein Zehntausender. So haben wir das mit den Kindern auch besprochen, dass wir hier drunter dann notiert haben E, Z, H, T, ZT und dass das hier unten zwar ein E, das dann aber zwei Z u.s.w.
Mit den Zahlendiktaten haben wir das ganze dann auch noch mal gestützt. Haben wir gerade heute noch mal gemacht. Kann man auf der anderen Seite der Tafel sehen. Oder ich schreibe einfach große Zahlen an und die Kinder sagen dann, welche Zahl ich angeschrieben habe.

Frage 3
(*murmelt*) ... das mit dem Zunehmen des Umfangs die Fläche größer wird .... (*überlegt*) .... wie würden Sie der Schülerin antworten ....
Ich würde mich darüber freuen, dass sich die Schülerin damit beschäftigt hat – nachmittags. Und das auf eigene Faust herausgefunden hat.
Und wenn ich mit den Kindern jetzt schon was zu dem Thema gerechnet hätte, sagen wir mal – diese Quadratmeterrechnung. Wo irgendwelche Raumgrößen nachgerechnet werden oder wie auch immer. Dann könnte man das ja auch nachrechnen, ob das stimmt, was sie hier gerechnet hat.
....
Ach so, sie hat das Bild schon mitgebracht. Dann ist es ja quasi schon bewiesen. Ich würde sie bestätigen und sagen: Ja, so haben wir das doch auch immer schon ausgerechnet.

Sie hat ja ein eigenes Gesetz aufgestellt. Sie behauptet ja, das sei Satz: Wenn der Umfang größer wird, wird auch die Fläche größer.

Ja, die Seiten werden größer, also wird auch die Fläche größer....

Dann bedanke ich mich herzlich für das Gespräch!

Wie, das war schon alles?

Tja...

Wir sind ja hier in der Grundschule immer eher praktisch orientiert. Vielleicht würden Sie ja umfassendere Antworten erhalten, wenn Sie mit einem Lehrer sprechen, der an einem Gymnasium unterrichtet.

Der Verfasser schaltet das Band ab, nach ungefähr 3 Min. Gespräch schaltet er es jedoch wieder ein, da noch wesentliche Ansichten zum Unterricht geäußert werden.

[...] Ganz wichtig ist z.B., das ein Kind diese Aufgabe am Ende von Klasse 4 lösen kann. Es wird aber immer nur darauf geachtet, dass unten die richtigen Zahlen stehen. Es wird aber überhaupt nicht danach gefragt, ob dem Kind überhaupt klar ist, was es da eigentlich gemacht hat.
Nehmen wir z.B. eine Sachaufgabe aus einem Mathetest: Linda hat 37 Säcke mit Murmeln gekauft. In jedem Sack sind 20 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Linda jetzt eigentlich gekauft?
Würde ich statt dessen schreiben: Rechne schriftlich: 37 * 20, dann hätten das viele Kinder ausrechnen können. Weil sie technisch in der Lage sind, dieses Verfahren durchzuführen. Aber so, die Aufgabe entsprechend formuliert, kamen einige an und sagten: Was soll ich denn da jetzt rechnen? Das ist aber jetzt gemein! Wie kriegen wir das jetzt raus u.s.w.
Mir wäre eigentlich viel wichtiger, dass die Kinder ein echtes Verständnis davon haben, was passiert und in der Lage sind, Lösungen zu finden. Vielleicht sollte man mehr Zeit auf diese Dinge und nicht auf die reinen Fertigkeiten verwenden. Für die Einübung eines solchen Verfahrens wie der schriftlichen Multiplikation braucht man vielleicht 100 Stunden – die man bestimmt besser einsetzen könnte. Auch wenn man dann einen Taschenrechner verwenden müsste.
Aber das wird hier nicht so gerne gesehen. Und es gibt ja auch manchmal diese Untersuchungen in Klasse 5. Und dann müssen diese Fertigkeiten da sein. Aber ich hab jetzt schon oft genug mitbekommen, das Kinder sowas zwar können, aber nicht wirklich verstehen.

Was meinen Sie mit „nicht wirklich verstehen"? An welcher Stelle fehlt das Verständnis?

Einige haben gar keine Vorstellung von der Dimension. Die wenden ihre Fertigkeiten an und wenn die sich verrechnen und unten steht eine dreistellige Zahl und eigentlich müsste das aber eine achtstellige Zahl sein, dann wundern sie sich nicht. Dass, wenn man eine Zahl über 1000 mit einer anderen Zahl malnimmt, das dann ja auch mindestens eine Zahl im 1000er-Bereich rauskommen müsste.

Und das ist schwer, das den Eltern zu verkaufen, das solche Dinge auch wichtig sind?

Ja, also besonders in diesem Einzugsgebiet. Hier ist man sehr leistungs- und notenorientiert. Obwohl wir hier gar keine Noten geben. Aber die *(Eltern)* wollen halt in Klasse 5 gute Noten. Und wenn in Klasse 5 Tests gemacht werden, dann sind die ja auch eher auf dieser oberflächlichen Ebene.

Welches Verständnis müssten Schüler denn eigentlich erwerben, um z.B. schriftliche Subtraktion wirklich verstehen zu können?

Eine Kollegin hat Minus z.B. mit Rückwärtsgehen eingeführt.
Wir selbst hatten hier im Klassenraum Teppichfliesen. Darauf haben wir uns vorwärts und rückwärts bewegt. Einige Kinder haben Mühe, diese Operation „Minus" überhaupt auszuführen.
Dann haben wir kleine Gegenstände genommen und tatsächlich auch welche weggenommen. Von einer bestimmten Menge. Das erstmal ganz deutlich wird: Was passiert da eigentlich? Wenn man „Minus" rechnet.

Und welche Schritte wählen Sie, um dann schließlich im dritten Schuljahr die Voraussetzungen für die schriftliche Subtraktion geschaffen zu haben?

Ich steigere die Mengen so weit, das man das dann eben nicht mehr zählen kann, also nicht mehr konkret damit handeln kann. Das die Kinder einsehen, dass sie sich da eines Verfahrens bedienen müssen, weil es von der Größe her nicht mehr anders geht.

Ähnlich wie jetzt mit dem 1x1. Ich kann ja nicht jedesmal 12 + 12 + 12 ... rechnen. Da muss man eben irgendwann mal die 1x1-Ergebnisse beherrschen, damit man solche Aufgaben überhaupt noch bewältigen kann.

Und in welchen Schritten würden Sie die Größe der Zahlen steigern?

Naja, das ist ja schon ein bisschen vorgegeben, dass man sich zuerst im Zahlenraum bis 20 und dann im Zahlenraum bis 100 bewegt, später dann bis 1000.
Wir bewegen uns im 1. + 2. Schuljahr ja in einem Spiralcurriculum. Was wir zuerst im Bereich bis 10 und 20 gemacht haben, machen wir dann später im Bereich bis 100 und wieder später bis 1000. Wir haben auch konkrete Aufgaben gemacht, hier etwas mit 100 Klötzen zu bauen, aber dann ist natürlich irgendwann Schluss. Und dann lernen Kinder in dem Alter auch schneller zu abstrahieren.
Es gab hier mal eine Lehrerin, die hat ihren Schülern verboten, in Klasse 2 konkret die Finger zu Hilfe zu nehmen. Hat das irgendwie als albern dargestellt und so. Die ist da auf den Bauch gefallen. Obwohl das eine ganz erfahrene Kollegin war. Dann stellte sich heraus, dass diese Kinder weit hinter der Parallelklasse zurück waren und dann sind die Eltern da auf den Plan getreten.
Alle sind sich hier einig, dass man sehr konkret unterrichten muss. Dennoch meine ich auch, das vor allem in Klasse 3 / 4 der verfahrensmäßige Anteil zu groß ist.
Ich musste mir als Lehrer ja erst mal selbst wieder vergegenwärtigen, wie das geht, das Verfahren. Man tippt die Aufgabe ja sonst einfach nur ein und fertig. Und dann muss man sehen können, ob das ungefähr hinkommt.

6.20 *Protokoll 20 H*

Alter der Lehrkraft: *45 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *23 Jahre*

Schulbuch: *Kopien aus verschiedenen Werken*

Fakultas Mathematik: *nein*

Hat erst eine dritte Klasse in Mathematik unterrichtet (erster Durchgang)

Anmerkung: Die Lehrkraft war etwas unter Zeitdruck und recht hektisch – bekam zwischendurch häufig Anrufe. Insgesamt erschien sie leicht reizbar....

Frage 1

(...) Zunächst ... würde ich das ...äh ... nicht als schriftliche Subtraktion an die Tafel schreiben, sondern ich würde es als im Kopf zu rechnende Aufgabe vorgeben. Um den Kindern zu verdeutlichen, dass viele Fehlerfallen in solch einer mündlichen oder kopftechnischen Behandlung stecken. Um ihnen erst mal zu verdeutlichen: Das Schriftlich-Rechnen hat einen Vorteil für mich. Ich bin damit sicherer. Wenn ich das im Kopf rechne: 45 – 27, kann ich viel mehr Fehler machen. Also muss ich mir etwas ausdenken, womit ich weniger Fehler mache, damit ich den sichereren Rechenweg habe. Um sie erst mal ein bisschen zu motivieren, ja, vielleicht auch so ein bisschen problemorientiert... Das ist eine ziemlich schwierige Aufgabe, Minusaufgaben rechnen sie ja sowieso nicht so gerne, und dann noch mit diesem Übertrag im Kopf zu rechnen ist schwer. Also suche ich mir etwas anderes. Dann schreibe ich es untereinander.

So, dann sind wir bei dem schriftlichen Weg. (...)

Ja, (...) ich denke, was Kinder verstehen müssen, ist hier, dass sie immer eine Ergänzungsaufgabe rechnen müssen.

Erst mal finde ich es ganz wichtig, dass wir Rituale einführen, dass man generell bei den Einern anfängt. Also, das ist erst mal verhaltenstechnisch ganz wichtig: Fange immer an zu rechnen bei den Einern. Wenn ich so eine Aufgabe habe, gucke ich immer zuerst auf die Einer. Das muss in Fleisch und Blut übergehen. Ich fange nicht da an (zeigt auf die Zehner), sondern ich fange bei den Einern an. Das ist erst mal wichtig, um überhaupt korrekt an diese Aufgabe heranzugehen.

Und dann müssen sie verstehen, dass sie eine Ergänzungsaufgabe bilden müssen. Ich finde es auch immer wichtig, zu sprechen dabei. Solche prägnanten Sätze: Sieben plus wie viel ist gleich ... . Sieben plus fünf: geht nicht. Also muss ich mir die 10 dazuholen. Die schreibe ich auch hin.

Aha, ja, Sie schreiben die Zehn über die fünf?

Ja. Wir schreiben sie klein dazu. Am Anfang, nicht? Irgendwann lassen wir sie weg. Aber ich finde auch wichtig, es ihnen zu veranschaulichen. Auch visuell.

Wie erklären Sie den Kindern, woher Sie die Zehn nehmen?

Lassen Sie mich kurz nachdenken (lacht nervös) ... wie habe ich denen dass erklärt? Jetzt haben Sie mich aber kalt erwischt. Wo ich die herhole (...)
Also: Ich nehme sie mir erst mal hier oben und rechne sie dazu und stelle sie dann unten – da erscheint sie ja dann wieder, als kleine Eins.
(Schweigt ca. 5 Sekunden)

Hm. (fünf Sekunden Schweigen) Also Sie legen jeweils oben und unten eine Zehn dazu?

Ja genau. (...) Man, Sie stellen mir vielleicht schwierige Fragen hier! (lacht) Jetzt stehe ich hier ja auf dem Prüfstand...
Ähm (...)

Naja, also die kleine 1 muss ja nun hier unten wieder erscheinen. Sonst ist es falsch! Also, ich muss Ihnen gestehen, dass ich nicht mehr genau weiß, wie wir das erklärt haben. Wir haben hier oben die Zehn hingeschrieben und dann konnte man rechnen: Sieben plus wie viel ist gleich 15. Acht kommt hier unten hin. Nicht vergessen: Da habe ich die kleine Eins. Eins plus Zwei gleich drei. Und da brauche ich die Zehn nicht, weil die Zahl hier größer ist als die da drunter. Da kann ich ja eine Ergänzungsaufgabe machen.

Sie könnten oben ja auch eine 20 dazuschreiben...
Mich interessiert natürlich, wie Sie den Schülern erklären, dass sie da oben nun ausgerechnet eine Zehn hinschreiben. Und dann unten `ne kleine Eins. Ein Schüler fragt vielleicht: Warum soll ich da eine Zehn hinschreiben, ich kann doch auch eine Zwei nehmen. Von Sieben bis Sieben, das geht doch auch!

Ja, das stimmt. Aber so was hat noch nie irgendjemand gefragt! Weil, es ist doch klar, es muss doch einfach eine Zehn da hin!

Wenn wir noch einmal kurz zu den Vorraussetzungen gehen. Wenn Sie daran denken: Was müssen Schüler verstehen oder tun können. Sie haben schon gesagt: Ergänzen. Sie gehen ja von Kopfrechenaufgaben aus, das heißt, sie müssen in einem ganz bestimmten Bereich schon Kopfrechnen können. Gibt es etwas, von dem Sie sagen: Das muss ich in meinem Unterricht unbedingt noch vorweg geschaltet haben, bevor ich so mit der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag beginnen kann?

(Überlegt ca. 15 Sekunden) Na ja, ich meine, es muss ganz viel vorweg geschaltet sein. Es muss ja die Orientierung im Zahlenraum sein, (...) ähm, also, ich verstehe Ihre Frage jetzt nicht so richtig... Also, ich finde das ganz schön schwer, was Sie mich hier fragen (lacht), muss ich ehrlich sagen! Ich wollte hier kein Examen machen (wird jetzt ernster)

...nein, nein, nein, dass soll es auch wirklich nicht sein, also wenn Sie mögen, gehen wir direkt zur nächsten...

...ich komme mir nämlich im Moment wirklich so vor! ...

... Ja? ...

... also ich finde das, also ich weiß nicht, fragen Sie mal, also was wollen Sie jetzt wissen?

Ganz konkret, wenn Sie sagen, sie sollen in die dritte Klasse gehen, und sollen schriftliche Subtraktion machen, dann musst du das und das und das können.

Ja, ich muss mich orientieren im Zahlenraum, ich muss eine Mengenvorstellung haben, ich muss Zahlen auch fraktionieren können, ich muss, wenn ich von 7 bis 15 rechne, dann muss ich ergänzen bis 10 und muss, also, sieben plus drei gleich 10, da muss ich wissen, wie viel noch übrig bleibt von der 8. Zehn plus fünf, ich muss also noch fünf dazutun, das ist noch ganz wichtig. Ergänzen auf die Zehn, das ist wichtig.

Frage 2:
Also Moment mal, dass ist doch falsch, oder? (deutet auf die falsch gelöste Aufgabe) So ist es ja richtig.

Ja genau, also die Schüler machen hier einen Fehler.

Ja ist klar, die schreiben das hier falsch untereinander.

Und so sollte es ja eigentlich sein – also so wird es, glaube ich, üblicherweise in Hamburg gelehrt. Was würden Sie tun? Was würden Sie jetzt diesen Schülern sagen?

Also, das ist kein Grundschulstoff, ne? So etwas machen wir nicht in der Grundschule. Aber das ist jetzt egal.

Schriftliche Multiplikation im vierten Schuljahr?

Also im Moment machen wir es nur mit einer Zahl. 123 mal 6. Vielleicht kommt es irgendwann noch einmal... Das kann sein. Das habe ich mit denen aber noch nie gemacht. Also, wir machen im Moment nur Hunderter oder Tausenderzahlen mal Einer.
Also, ich müsste ihnen ja verdeutlichen, dass das keine Addition ist, bei der alles untereinander geschrieben wird, sondern dass es versetzt gerechnet wird.
Ja, also, wie gesagt, ich habe es noch nie gemacht. Ich würde ihnen deutlich machen, dass das (...), dass man ja einmal die Hunderter, dann die Zehner und dann die Einer ausrechnet.
Ansonsten (...) also, ich überleg jetzt gerade, also wenn ich hier anfange hier 6 mal 123 dann würde ich erst mal klar sagen: wenn du anfängst, 123 mal 6 zu rechnen, musst du auch unter der 6 anfangen. Weil du die Hunderter ausrechnest: Du rechnest 123 mal 600. Und ... äh, genauso ist es mit den Zehnern. Da musst du auch unter der 4 anfangen.
So würde ich das machen.

O.K. Es gibt noch eine dritte Situation ....

...Reicht das?

Na ja, ich gebe nicht das Ziel vor. Sie sagen, wie Sie es erklären und unterrichten würden. Wenn Sie sagen, das ist so der Weg, den Sie gehen würden, ...

Ja, wie gesagt, ich habe das noch nie unterrichtet. Ich kann es Ihnen nicht sagen. Vielleicht würde ich das besser machen oder konkreter oder...

Frage 3:
Also: Sie hat herausgefunden, dass mit der Zunahme des Umfanges – ist das richtig? Den Umfang rechne ich 4x4 ja klar, ist ja ein Quadrat (...) Also, wenn der Umfang größer wird (...), der kann sich dann ja eigentlich nur zum Rechteck vergrößern. (...) Ne, er könnte auch quadratisch größer werden (...), dass auch gleichzeitig die Fläche größer wird. (...)
Ja, das ist doch klar, dass die Fläche da größer wird – oder nicht?

Wie würden Sie der Schülerin antworten?

Erst mal würde ich sagen: Toll, dass du das herausgefunden hast. Wenn jemand an so etwas arbeitet und ein Kind sagt: Ich habe da etwas herausgefunden und ich bin da ein Stück weitergekommen. Da würde ich sagen: Ich finde das klasse, dass du an so was knobelst. So wissensdurstige Kinder finde ich erst mal gut.
Dann muss ich gestehen weiß ich gar nicht, ob das überhaupt Thema der vierten Klasse ist.

Es wird gerne ausgespart. Geometrie ist immer so ein Bereich, den man gern weglässt. Es steht aber in den Rahmenrichtlinien...

Wir haben gar keine!

Ach...?

Nein. Es gibt keine.
Also, wir haben nämlich überhaupt gar keine Geometrie gemacht und so weiß ich überhaupt nicht ...
Ich würde wahrscheinlich zu ihr sagen: Du, das kommt noch, wie schön, dass du das schon kannst. Dann kannst du mich ja unterstützen und kannst deinen Mitschülern ja mal das vorstellen, was du herausgefunden hast.

Da würde ich sie ermuntern und würde das auf jeden Fall ganz positiv aufgreifen.

6.21 *Protokoll 21 H*

Alter der Lehrkraft: *52 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *30 Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Interview wurde von mir handschriftlich notiert, die untenstehenden Formulierungen genauso mit der Lehrerin abgesprochen

Frage 1

Erst einmal müsste ich also prüfen, welche Voraussetzungen vorhanden sind. Sie (die Schüler) müssen den Zehnerübergang kennen, müssen Z, E und H voneinander unterscheiden können. Die Schüler müssen addieren können und Ergänzungsaufgaben geben können

Zunächst rechnen wir ohne Übertrag. Dabei sprechen wir: Wie viel plus 7 ist gleich 8 *(Bezieht sich auf keine der gestellten Aufgaben, sondern ist ein spontanes Beispiel).*

Dann machen wird das gleiche mit Übertrag. Dabei stellen die Kinder fest, dass das irgendwie nicht geht.

Ich gebe ihnen dann vor, dass aus der 5 eine 15 gemacht werden muss, also dass ein Zehner dazugenommen werden muss. Um sich das besser merken zu können, schreiben wir dann eine kleine 1 unten in die Zehnerspalte. Oben steht dann keine kleine 1, diese wird im Kopf behalten. Nur unten bei den Zehnern wird die 1 geschrieben, die dient der Gedächtnisstütze.

Z, E und H unterscheiden sie, indem sie zuerst richtig in der Tabelle, später in den Rechenkästchen untereinander schreiben.

Wenn ein Schüler nachfragen würde, was das mit der 1 soll, könnte man erklären, dass man sich den Zehner von der Zehnerspalte „ausleiht“. Und wenn man ihn ausgeliehen hat, dann muss man ihn auch wieder zurückgeben. Daher dann die 1 unten in der Zehnerspalte.

Frage 2

Ich würde noch mal auf die Inhalte der 4. Klasse zurückgreifen und eine Wiederholung einschieben von dem, was in der 4. Klasse meines Erachtens nicht richtig unterrichtet worden ist. Ich würde auch diejenigen Kollegen, die betreffende Schüler in

der 4. Klasse hatten, ansprechen, woran es liegen könnte. Also, ich würde fragen, woran die Fehler liegen könnten, auch als Tipp für die Kollegen, da diese Fehler ja später auch einmal wieder auftauchen könnten und von ihnen dann vermeidbar wären *(meint: die Lehrer könnten präventiv den Fehlerquellen entgegenwirken).*
Ich würde bei der Wiederholung ganz genau darauf achten, dass die Schüler die Zahlen ganz korrekt in das richtige Kästchen schreiben, z.B. wenn die 6 mit der 3 multipliziert wird, dass die 8 von der 18 genau unter der 6 steht *(bezieht sich auf das vorgegebene Beispiel)* und von da aus die Zahlen dann weiter nach links verschoben werden.
Dann multipliziere ich die Zehner und achte auch dabei darauf, dass in der richtigen Spalte angefangen wird und die nächste Zahl von da ab auch weiter links daneben steht *(meint nicht das darunter stehende Teilprodukt sondern die der Zahl angehörigen weiteren Ziffern).*

Die Zahlen stehen versetzt zueinander, da die Hunderter ja eine ganz andere Wertigkeit haben als die Einer. Man kann ja die 5 nicht mit der 6 gleichsetzen, da 600 x 123 etwas ganz anderes ergibt als 6 x 123, also nur als Einer gewertet. *(Geht nicht weiter darauf ein, das sich das Erscheinungsbild der Zahl ja auch dahingehend ändert, dass sie um zwei Nullen länger wird – aufgrund ihrer höheren Wertigkeit.)*

Wenn der Schüler es dann immer noch nicht versteht, kann man versuchen, ihm immer noch zu sagen: Es ist eben so! Das musst du dir zum korrekten Rechnen der Antworten einfach merken.

Frage 3
Ich würde erst einmal das Problem auf den nächsten Tag verschieben, da ich es in dem Moment nicht so schnell überblicke.

[*Besinnt sich*.]

Außerdem geschlossene Figur – hmm, ein Kreis wäre ja auch eine solche Figur (geht dabei aber nicht näher auf andere geschlossene Figuren ein)

Ich würde ihr ein Gegenbeispiel nennen, z.B. ein Rechteck mit einer Kantenlänge 11cm x 1cm. Das hätte eine Fläche von $11cm^2$ aber einen Umfang von 24cm. Damit würde ich ihre Theorie widerlegen.

Das würde ich ihr sagen. Deine Theorie ist nicht richtig. Siehst du, es gibt ein Gegenbeispiel.

6.22 *Protokoll 22 H*

Alter der Lehrkraft: *58 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *33 Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Ich denke, erstmal müssen sie das Stellenwertsystem sehr gut kennen. Also, die Kinder. Also, sie müssen ganz genau wissen: E oder Z.
Und sie müssten solche Aufgaben auch schon im Kopf rechnen können.
Darüber hinaus wäre es gut, wenn sie sie auch halbschriftlich lösen können.

Wenn sie so eine Aufgabe erklären sollten, also da kommt ja nach einer Gewissen Zeit der Punkt, an dem es auf einmal nicht mehr so einfach geht. Da wird dann immer von Übertrag gesprochen...

Also, wir sprechen dann von Ergänzen, dass wir von 27 hier z.B. bis zur 45 ergänzen. Und dass dann bei dieser Aufgabe, so wie sie aufgeschrieben ist, die Rechenrichtung von unten nach oben erfolgt.
Deswegen schreiben wir dann immer noch einen Pfeil daneben.

Der geht dann von der 7 zur 5 nach oben?

Ja. Daneben schreiben wir einen Pfeil von unten nach oben. Und dann sprechen wir das auch deutlich vor: Von der 7 bis zur 5, das kann nicht gehen, weil die 5 kleiner ist als die 7, also muss ich von der 7 bis zur 15 rechnen. Und diesen Zehner muss ich mir an der nächsten Zehnerstelle notieren.

Wo notieren Sie ihn?

Wir notieren ihn unter der 2. Also wir machen den Strich (*Summenstrich unter der Aufgabe*) in einem kleinen Abstand zu der Zahl. Da lassen wir etwas Platz. Und dann rechnen wir eben von 7 bis 15, und an der nächsten Stelle dann eben von drei bis vier.

Die Position der „1“ unten ... Haben Sie die bewusst so gewählt?

Ja, weil man dann einfach diese beiden im Kopf addiert, bevor man sagt: Von...bis. Also man rechnet dann ja 2+1 und rechnet dann von drei bis vier.

Wenn jetzt eine Schülerin sagt: Frau X, ich verstehe das irgendwie nicht, das mit der 1. Warum soll ich da unten `ne 1 schreiben? Warum rechne ich bis 15? Da steht doch eine 5! Wir können doch nicht einfach einen Zehner dazulegen? Und warum dann der Zehner bei der 2? Es soll doch 15 und nicht 21 sein...?

Dann kann man ja noch einmal erklären, dass man nur von einer kleineren zu einer größeren Zahl hin rechnen kann. Und dann reicht die 5 eben nicht. Und dann muss ich die nächste Stelle sozusagen schon mit einbeziehen. Die Zehnerstelle. Und muss ein Zehner schon mit benutzen an der Einerstelle.

Wie meinen Sie das: Mitbenutzen?

Also mitbenutzen, also schon dazunehmen, zu der 5. Einen Zehner dazunehmen, um von 7 bis 15 rechnen zu können.

Frage 2

Im Grunde muss man sie dann noch einmal auf das hinweisen, was sie eigentlich in Klasse 1 und 2 lernen. Nämlich, dass sie an die Stellenwerte denken. Also, ob ich nun einen Einer benutze, um damit malzunehmen, oder einen Zehner, das ist ein gewaltiger Unterschied. Dahingehend, dass das Ergebnis dann ja an einer anderen Stelle steht.

Deswegen gibt es ja dann auch noch die dritte Möglichkeit, dass man grundsätzlich sich dort Nullen notiert, wo eigentlich eine Stelle frei bleiben muss, weil man mit der nächsten rechnet.

Also, wenn ich z.B. mit dem Zehner multipliziere, könnte ich mir vorher an die Einer-stelle schon eine Null schreiben. Oder wenn ich mit dem Hunderter multipliziere, dann könnte ich mir auf jeden Fall schon an die Einer und Zehnerstelle eine Null setzen, damit ich auf jeden Fall mein Ergebnis bei der Hunderterstelle beginne.

Also ich würde sagen, das ist eigentlich ein Fehler, der dürfte nicht passieren, wenn man das Stellenwertsystem gut behandelt hat.

Dann würden Sie also mit den Schülern das Verfahren noch einmal durchgehen?

Ich würde vor allen Dingen auch noch einmal darauf verweisen, dass die 3 ein Einer ist, die 2 ein Zehner und die 1 ein Hunderter. Und genauso bei der zweiten Zahl. Und dass man eben ganz streng darauf achten muss, dass jedes an die richtige Stelle kommt. Weil sonst eben z.B. anstatt der 6 eine 60 herauskommt und umgekehrt.

Frage 3

Liest sich die Aufgabe noch einmal genau durch (ca. 15 Sek.)

Ich meine, recht hat sie ja natürlich. Sie wird wahrscheinlich die Seitenzahlen mal genommen haben.
Also, beim Quadrat: Klar, 4x4 = 16 cm², beim Rechteck sind's 4x8 also 32 cm². Weil sich die Seitenlänge verdoppelt hat.
Mir fällt jetzt auch nichts anderes ein...

Mhmmm...

Weil, das hörte sich so ganz kompliziert an...

Also, sie erklärt, nein, sie hält die beiden Bilder hin. So. Und sagt: Frau X, schau'n Sie mal, ich hab' herausgefunden, wenn ich hier den Umfang vergrößere, dann wird auch die Fläche größer. Und das gilt ja immer so.
Welche Antwort geben Sie? Was machen Sie dann in dem Moment?

Na, ich würde sagen: Du hast natürlich recht. Das ist doch ganz klar.
Und dann würde ich sie fragen, was sie unter Umfang versteht. Vielleicht ist das ja noch nicht erklärt worden. Und wie sie sich den errechnet hat. Und, wie sie dann zu der Fläche gekommen ist.
Also, generell finde ich es immer gut, wenn Kinder mit irgendetwas kommen und sagen: Ich habe das und das herausgefunden. Und ich wünsche mir, dass das häufiger vorkommen würde. Dass sie kommen würde und sagen: „Oh, das habe ich bemerkt!". Aber meistens kommen sie ja und sagen: „Das kann ich nicht" oder „Ist das so richtig?".
Aber, so richtig etwas Neues entdecken, das wäre mir eigentlich das Liebste.

6.23 *Protokoll 23 H*

Alter der Lehrkraft: *52 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *30 Jahre*

Schulbuch: *Das Zahlenbuch (Arbeitsheft), Fortbildungsmaterialen*

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Also ich würde vorher ja auf jeden Fall mündlich viel arbeiten, bevor ich's schriftlich mach'. Also, alle Dinge, die eben drankommen, alle Probleme, auch im Kopf durchgespielt haben. Also, über'n Zehner rüber, nicht über'n Zehner rüber, und die Zahl eben aufteilen und dann versuchen, das zu verdeutlichen, was sich da abspielt. Und das ist praktisch dann die Formalisierung dessen, was man denkt. Also, so wäre das für mich jetzt. Dass wir uns das eben sparen können, die einzelnen Sachen im Kopf uns noch mal aufzuschreiben, was sich da so alles abspielt, sondern, dass wir wissen: Weil wir wissen, dass es so geht, können wir eben dieses Verfahren dafür anwenden.

Und dann würd ich das eben so erklären, dass ich eben von 7 bis zu der Zahl ergänze, also von 27 bis zur 47, und da ich eben nicht bis fünf ergänzen kann, muss ich die fünfzehn mir denken und schreibe dann das Ergebnis hin und da ich ja einen Zehner weggenommen habe, kann ich den entweder da unten mit dazu schreiben oder eben oben weniger haben. Da es einfacher ist, sich den da hin zu schreiben, vor allem, wenn man nachher eine lange Reihe hat, nehme ich den nicht oben weg, weil ich das vielleicht da vergess', sondern schreib den da unten dazu. Ich hab also vorher auch klar gemacht, dass es egal ist, ob ich bei dem Einen einen mehr hab oder bei dem Anderen einen weniger, dass das Ergebnis dann gleich bleibt. Also dass das – ist das nicht verständlich, was ich gesagt hab? Das ist jetzt eine Vorstellung für mich...

Sie nehmen oben einen weg, haben Sie gesagt?

Ja. Ich hab ja die 15 mir genommen, in dem Moment sind ja nur noch drei Zehner davon... weil ich ja 15 hab. Und ich hab ja die Ergänzung zu 15 vorgenommen. Und nun kann ich dann natürlich von 2 bis zu 3 ergänzen. Aber um diesen Schritt, um da diese drei nicht zu haben, schreib ich eben die Eins, die ich da oben weggenommen habe, die nehm ich dann dazu, weil dann der Unterschied gleich bleibt von 2 zu 3 oder von 3 zu 4. Und also, ich finde das einfacher dann, wenn man das immer da unten hinschreibt, vor allem, wenn die Reihe länger wird nachher, weil man das dann besser addieren kann, wenn man es da oben setzt. Ja, ich hab da keine Methode gefunden. Dass das gut wäre, das da wegzunehmen, dann, wie ich das da hinschreiben kann, das find ich schwieriger...

Und es wurde mal eine andere Methode unterrichtet?

Ja. Es wurde zwischenzeitlich mal – ich weiß nicht, ob das nur ein Jahr war oder auch länger – ich bin gerade in den Rest reingekommen – das ist dann aber wieder aufgehoben worden. Das hat meine Kollegin vor mir gemacht... Da wurde abgezogen... Ich weiß es nicht mehr, ich hab mich darauf nicht eingelassen, weil es irgendwie schwierig war, das Umdenken, und da dann im Laufe der Zeit das sich dann so wieder gedreht hat, hab ich dann gedacht: „Gut, das muss ich jetzt nicht mehr..." Ich hab mir das damals von den Kindern erklären lassen, und hab die das auch so machen lassen, die das so gelernt haben, weil die damit einfach zurecht kamen – also ich bin da in der vierten Klasse eingestiegen – und das war auch in Ordnung, ich konnte das dann auch nachvollziehen, aber ich kann es jetzt, ehrlich gesagt, nicht sagen.

Gut, gehen wir zur nächsten Situation... Aber auch immer mit der Option, dass, wenn Ihnen spontan noch irgendwas einfällt, sie immer noch sagen können: „Ach, ich..."

Also, es geht ja jetzt darum, das man das auf jeden Fall schriftlich machen soll, ja? Es gibt ja auch so Aufgaben, wo man sich fragt, ob es sinnvoll ist, das schriftlich zu machen, wo man eben's... Also, das versuch ich natürlich auch bei solchen Aufgaben, dass ich sage: „Na ja, guckt's euch an, ne?" Also, man kann das zwar in jedem Fall schriftlich machen, aber wenn man das so besser übersehen kann, kann ich auch gleich das Ergebnis hinschreiben. Also ich muss es nicht schriftlich machen, ne?

Frage 2

Ja, ich würde wahrscheinlich wieder auf die halbschriftliche Multiplikation zurückgehen. Also, wir nennen das halbschriftliche Multiplikation, wo man die Zahl dann aufteilt in Hunderter und Zehner und Einer. Tja. Ja, dass ich also 123 mal 600, 123 mal 40, 123 mal 5. Und dann ergibt sich natürlich die Schreibweise, dass ich dann also 600 hab, 40 hab und 5 hab und dann natürlich auch im Ergebnis nachher eine ande-

re Schreibweise. Und das ist also natürlich eine Grundvoraussetzung, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner und Hunderter unter Hunderter zu schreiben, würde das dann auf jeden Fall zu dem Zeitpunkt... Es müsste klar sein, dass das so ist. Aber wenn nicht, dann müsste man natürlich auch diese Sache erst noch mal wieder aufgreifen, mit den Stellenwerten. dass es sinnvoll ist, Stellenwerte untereinander zu schreiben. Aber das bietet sich ja bei so einem Problem an, anzuzeigen, dass es sinnvoll ist, die Stellenwerte untereinander zu schreiben. Also es ist ja wichtig, deutlich zu machen, dass das eben die 600 ist, mit der man hier mulitipliziert, und das hier die 40 ist, und dass es da die 5 ist. Und dass man eben an die andere Stelle... Also, ich würde immer mit der 6 anfangen, um deutlich zu machen – das gibt es ja auch andersrum, mit der hinteren Zahl zu beginnen. Dass man eben hier auch Nullen hinschreibt, dass es deutlich wird, dass ich mit 600 multipliziert habe, und dass ich hier mit Vierzig multipliziert habe, dass ich eben die Nullen nochmal dran stell. Ja erstaunlich find ich, dass die 8 überhaupt darunter geschrieben wird... Also, so erleb ich das eigentlich nie. Was schon auch mal vorkommt, ist, dass das so richtig begonnen wird, aber dann mit den andern darunter untereinander geschrieben wird. Also, dass die Zahl dahin gerückt wird. Oder entweder, wenn sie mit der 5 anfangen, dass dann alle so untereinander geschrieben werden, oder wenn sie mit der 6 anfangen, dass dann alles da untereinander geschrieben wird. Das die 2 also unter der 8 und die 5 unter der 8 stehen würde.
So hab ich das komischerweise...

Die zwei unter der... Ach so, jetzt versteh ich...

Ja, weil sie das irgendwie wissen, entweder damit oder damit beginnen sie, also sie beginnen irgendwo, da oder da, und dann kommt eben der Fehler, dass es alles untereinander, oder da alles untereinander geschrieben wird und na, ja, also ich empfinde das eben als große Hilfe, die beiden Nullen eben nochmal hin zu schreiben, und das kann man dann damit nochmal verdeutlichen, dass man das nochmal aufteilt in 600... Ich arbeite dann auch immer gern nochmal wieder mit dem Mal-Kreuz, dass ich das eben nochmal aufteil, das eben auch eine Grobvoraussetzung ist, wenn Kinder überhaupt Schwierigkeiten im schriftlichen Multiplizieren haben, dass sie immer wieder auf das Mal-Kreuz zurückkommen. Dass sie immer wieder versuchen, sich daran zu erinnern: „Wie ist es nochmal, ich kann jede Zahl aufteilen und dann kann ich eigentlich alles einzeln ausrechnen. Und dann kann ich das auch richtig kontrollieren. Aber es soll ja dann auch zur schriftlichen Multiplikation gehen, dass der Fehler dann da ausgemerzt wird. Ja, das wäre das, was mir jetzt dazu einfällt. Also, ich würde wieder auf die halbschriftliche nochmal zurückgehen, ich würde auch das Mal-Kreuz nochmal nehmen und eben hier auf jeden Fall das Verständnis dafür zu erlangen, dass das eben mit 600 multipliziert wird, die ganze Zahl, und deswegen die beiden Nullen da noch ran gehören.

Frage 3

Das hab ich schon gehabt, das Problem, aber...

Ja? War eine Schülerin bei Ihnen und hatte das so?

Nee, also nicht in dieser Formulierung. Sondern, dass sie gesagt hat: „Das ist doch das gleiche!" Oder nicht das gleiche, sondern mit dieser Vergrößerung, aber nicht in der Formulierung. Aber wir haben schon mal genau vor diesem Problem gestanden! (zum Kollegen) In der ersten vierten Klasse, die du vorher hattest. Ich glaub, Charlotte war das. *[lacht]* Entschuldigung. Das ist interessant. So, da muss ich mich jetzt mal drauf konzentrieren: dass die Fläche größer wird, wenn der Umfang größer wird!

Also, ich würde natürlich versuchen, bevor ich das jetzt selber für mich klar kriege, verschiedene Beispiele zu finden. Ob das immer so ist - würd ich erst mal machen. Also, einfach um rauszufinden, einfach um mir auch Zeit zu gönnen, selber in das Problem einzusteigen. Damit ich also nicht gleich irgendwie eine Antwort parat haben muss, sondern einfach gucken, vielleicht haben andere Kinder noch eine Idee dazu, oder so, dass sie einfach gucken: „Ist das eigentlich immer so!" „Versucht mal, andere Beispiele rauszufinden!" „Oder findet irgendjemand eine Idee, wo es nicht so ist?" Das ist, wo ich mich jetzt so drum kümmern müsste. Und dann würd ich das mit denen halt zusammen versuchen rauszukriegen. Also eigentlich, indem ich entweder eine ganze Reihe habe, wo das immer das Gleiche ist, und wenn ich selber aber der Meinung bin, dass es nicht so ist – was ich jetzt selber aber erst mal überlegen muss – dann zum Schluss kommen würde, und sagen würde: „Halt stop! Hier haben wir aber ein anderes Beispiel, kann also nicht sein!" oder indem ich mehrere Beispiele finde, und dann irgendwann kommt ein Schüler selber und sagt: „Hier hab ich aber ein Beispiel, da geht das nicht!" Also ich würd sie damit schon einfach ein bisschen rum probieren lassen. Also, andere Beispiele zu finden, wo das dann so ist, oder ob das nicht so ist.

Ja... Mit welchem Mathebuch unterrichten Sie?

Teilweise mit... Wie heißt das? Welt der Zahlen? Als das Buch selber haben wir nicht, wie haben nur das Arbeitsheft benutzt, und dann ganz viel Materialen von der Fortbildung benutzt und ganz viel Zusammenstell- und hier Büchermacht [?] und so was alles benutzt... Was die Kollegen auch haben... Hier... Das Zahlenbuch ist das...

Das Zahlenbuch?! Ja.

Also, ich benutz das jetzt in der vierten Klasse auch nicht mehr so als Buch, weil mir das nicht gut gefallen hatte in der Form, dass das zu viel springt. Also, dass nach einer Einheit, oder nach einem Thema dann eine Seite plötzlich zu einem neuen Thema kommt, und dann wieder was anderes und dann wieder was anderes und dann wieder eine Seite dazu... Ich mag das also lieber, dass das ein bisschen zusammenpasst dann. Und wir arbeiten ja aber mit dem Arbeitsheft, weil da so eine ganze Menge Übungsmaterial drin ist, was man dann schon zusätzlich auch benutzen kann.

Das Arbeitsheft vom Zahlenbuch...Ach so, und das andere Material, das stellen Sie sich dann selbst aus Fortbildungsmaterial und verschiedenen Schulbüchern zusammen?

Ja. Genau, und aus verschiedenen Schulbüchern. Also, ich nehm' auch aus dem Zahlenbuch selber Material, oder stell das zusammen und ich versuch dann immer, so kleine Lehrgänge zu organisieren. Also, dass man so ein bisschen ausführlicher macht...

Hatten Sie Mathematik als Fach?

Nein. Im Referendariat. Wir haben im Studienseminar... Also, in Hamburg ist die Ausbildung ja damals so gewesen, dass man Pädagogik und ein Fach studiert hat – das war bei mir Sport – und dann im Referendariat noch ein anderes Fach hatte, das war bei mir Mathe.

Also dann ja quasi doch als Fach gehabt in der Ausbildung, so als...?

Ja, aber ich hab’s nicht studiert, ne? Ist nicht Studienfach. Und ich bin sprachliche Mathematikerin, im Gegensatz zu den naturwissenschaftlichen Mathematikern... Das möchte ich immer... Wo da der Unterschied ist? Oh, da müssen Sie mal die Lehrer angucken... Sie sind doch Mathematiker... Ja, das sind die, die Mathematik gerne mögen und auch ganz gut können, oder mal ganz gut gekonnt haben, verbunden mit Sprachen. Und die naturwissenschaftlichen sind die, die dazu die anderen Naturwissenschaften nehmen, Mathe-Physik, Mathe-Chemie, solche Scherze... Und die sprachlichen Mathematiker haben selten etwas mit Physik und Chemie am Hut, aber eben mit Mathematik und Sprachen. Das gibt’s nur sehr selten, wir hatten einen einzigen Kollegen, der tatsächlich beide Fächer, also eine Sprache und Mathematik studiert hatte. Alle anderen hatte eine Naturwissenschaft studiert.

6.24 *Protokoll 24 H*

Alter der Lehrkraft: *35 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *4 Jahre*

Schulbuch: *Kein festes Buch. Stellt Unterrichtsmaterial aus verschiedenen Werken zusammen. Gibt an, dass ihre Kinder trotz des vierten Schuljahres leistungsmäßig auf Stufe 3 stehen. Hat im ersten Schuljahr mit dem Zahlenbuch angefangen, das hat sich aber als zu schwer herausgestellt. Für ihre Schüler nicht machbar und schon gar nicht, um selbständig damit zu arbeiten.*

„Ich nutze das Zahlenbuch jetzt mal, wenn da ein Thema drin ist, das gerade dran ist, weil es dort dann schön anschaulich ist. Bunte Bilder und so, dass sie mal etwas Schnuckeliges haben. Aber halt nur so zusätzlich. Auch das Arbeitsheft finde ich viel zu schwer für unsere. Die können dort keine Aufgabe allein machen."

Woran liegt das?

Ich finde, die Aufgabenstellungen sind oft mathematisch sehr komplex und wahrscheinlich auch gut ausgedacht, aber die kommen gar nicht mit den Aufgabenstellungen klar. Die verstehen auch nicht, was sie machen sollen. Das heißt dann oft, das ich am Hin- und Herspringen bin und das kurz erklären muss. Und das ist schwierig. So komplexe Zusammenhänge, da haben die einfach viele Probleme. Weil dann oft das Sprachproblem als erstes auftaucht. Dann bist du am Lösen des Sprachproblems. Dann versuchst du das inhaltlich zu klären und dann kommen natürlich Grenzen.

Wie gesagt bin ich in der zweiten Klasse davon weg, hab jetzt immer parallel noch ein Arbeitsheft dabei, eines das ich speziell ausgesucht habe, dass sie da gut drin arbeiten können. Auch mal alleine was machen können. Sodass ich hin- und hergehen kann und mir einfach mal ein paar Kinder individuell schnappen kann und mit denen was machen kann.

Es gibt ein oder zwei bessere Kinder, die kriegen dann auch noch Zusatzgeschichten. Ein anderes Arbeitsheft, oder dann auch mal was extra.

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also, ich fange mal mit der letzten Frage an. Also, was müssten sie verstehen oder tun können.

Fakt ist: Ihnen müsste klar sein, was Subtraktion ist. Das kann man bei unseren Schülern nicht unbedingt voraussetzen.

Sie müssten die Unterscheidung zwischen Zehnern und Einern hinkriegen. D.h. das Sortieren-Können, das würde dann vorher über die Form auch schon vorweg gelaufen sein. Also, damit sie das dann überhaupt so untereinander tragen können.
So, und dann müssen sie das Problem des Übergangs (...) ja, obwohl, das müssen sie dabei erst lernen.
Also, sie müssten springen können, ne, im Grunde von den Einerstellen auf die Zehnerstellen. Diese geistige Tätigkeit vollbringen können – sozusagen. Die Fähigkeit. Das sollte man vorher auch schon begriffen haben.
Ich finde, dass ist alles, was sie können müssen. Ja.

Was meinen Sie mit „Springen auf die Einer und die Zehner?

Na, dass sie so variabel im Kopf sind, dass sie nicht mehr zählen müssen, sondern dass ihnen klar ist: die nächste größere Geschichte ist im Zehnerbereich. Oder eben im Hunderterbereich – je nachdem, in welche Stelle da nun gerade gesprungen wird. Das ist bei unseren nicht immer ganz klar. Dass man da von der 7 nicht auf die 25 gehen kann zum Beispiel.
Soweit zu den Grundvoraussetzungen.
Es ist ja noch nicht so lange her, dass ich dieses Thema im Unterricht gemacht habe.
Für mich war da auch wichtig, z.B. die Sortierung hinzubekommen. Dass die Kinder allein in der Lage sind, die Zahlen überhaupt untereinander zu schreiben. Dass man ihnen eben nicht nur die Aufgaben gibt und sie müssen dann damit klarkommen, sondern dass sie da dann schon merken, z.B. wenn die zweite Zahl nicht ne Zehnerzahl und ´ne Einer wäre, sondern nur ´ne Einer, dass ihnen dass schon mal klar ist. Dass man das darüber abfragt.
So, und wie würden wir an solche Probleme herangehen?
Ich denke, es gibt wahrscheinlich wahnsinnig schöne und lustige Sachen, wie man da herangeht. An sich ist das für mich ´ne relativ technische Geschichte.
Also, es ist eine reine Technik, die man nett verpacken kann. Vorneweg, wo man bestimmt ein paar Vorübungen machen kann mit irgendwelchen Zehnerstreifen wegnehmen und Einer weg und solche Geschichten. An sich das schriftliche Subtrahieren ist für mich eine mathematische Technik, die man auch technisch sich aneignen sollte.
Wenn dann klar ist, was da getan wird. Also hier ist man dann ja schon soweit, wie man das macht....

Wenn klar ist, was da getan wird.... Wie erklären Sie den Schülern den Vorgang?

Ich habe es z.B. über einen Sprung gemacht. Im Grunde ist das für mich eine sehr schematisch-theoretische Herangehensweise. Dass wir uns Aufgaben angeschaut haben: Wie unterscheiden die sich. Z.B. oben sind die größeren Zahlen. Und das dann vorher ohne den Übergang geklärt haben und dazu haben wir immer den gleichen Spruch gesagt. Also, wir sind immer von den Einern losgegangen. Von 7 Einern auf 15 Einer fehlen soundso (...) und dann irgendwie fünf ran und eins gemerkt. Also eine rein schematische Wiederholung der Geschichten.

Dieser Sprung zu 15. Sie sollten ja von 7 bis 15 rechnen. Da haben sie ja sozusagen im Kopf jetzt noch eine Eins dazugetan. Es sind ja auf einmal nicht mehr von 7 bis 5 sondern von 7 bis 15. Wie führen Sie die Schüler da ran?

Also, wir haben vorher Aufgaben ohne Übertrag gemacht. Und wenn man dann versucht, die zu rechnen, stoßen wir an ein Problem. Und dann lass ich das Problem formulieren: Was ist denn jetzt das Problem und wie könnte man es lösen?
Und eine Möglichkeit ist bei den Schülern dann immer: Sie gehen zu 5 zurück. (...)
D.h. sie sagen zwei. Weil: Von der 7 bis zur 5, das sind ja nur 2.
Dann sage ich: O.K., wir bewegen uns doch aber nach oben! Also: Wo müssten wir dann hingehen und dann kommen die halt darauf, dass die nächste Zahl eine 15 sein muss. Und dass denn ja ein Überhang hier irgendwo ist. Auf der Seite muss dann ja etwas dazukommen, denn auf der anderen Seite haben wir ja ein bisschen geschummelt. Also, eigentlich von der Methode her etwas schematisch-technisches. Nichts aufregendes, spielerisches, (...) so, verstehen Sie?
Formal abstrakt. Weil ich finde, von der Vorgehensweise her ist das eine abstrakte Technik, die uns das Subtrahieren erleichtern soll. Das heißt, es geht um eine technische Geschichte – finde ich.
Es ist ja nicht der Schritt der Subtraktion gemeint, sondern die schriftliche, oder?

Ja, die schriftliche ist gemeint, aber natürlich auch alles, was damit zusammenhängt! Es geht ja auch um Grundvoraussetzungen. Also nicht nur um die Technik als solche, sondern auch um das, was sie verstehen sollen... Davon haben Sie ja schon einiges genannt.

Also, die Subtraktion an sich sollte man auf jeden Fall bildnerischer oder spielerischer erkunden. Das ist für mich sozusagen der abschließende Schritt, damit der dann das ganze noch mal auf so eine ganz theoretische Ebene hebt.
Ja, und dann müssen sie halt begreifen, dass das halt eine 15 dann ist und dass man zum nächsten dann geht und dass wir da Schritte hinzugehen haben auf der ... was weiß ich ... auf dem Zahlenstrahl ... wie auch immer ... dahin laufen und das wir dann aber auch irgendwie schon im Zehnerbereich sind. Das heißt, dann müssen wir das im Zehnerbereich auch irgendwie markieren.
Tja, und dann geht man da weiter, ne?
Also eigentlich so ein bisschen mit „trial and error", ne?

Ja. Wenn jetzt ein Schüler fragen würde: Frau X, warum soll ich denn da unten bei der zwei jetzt eine kleine 1 hinschreiben? Was würden Sie ihm dann sagen?

Ich würde ihm sagen, dass wir uns eigentlich hier aus dem Zehnerbereich eine Zehn geborgt haben. Die wir hier brauchen, um handlungsfähig zu bleiben. D.h. wir klauen uns hier eigentlich von dieser 2 eine Zehn und sind dann eigentlich aber schon eins weiter. Hier oben im Zehnerbereich. Wir sind dann nämlich nicht im Einerbereich von 5, sondern wir sind schon bei 15. Das heißt, wir haben eigentlich eine Stufe übersprungen, die wir hätten noch gar nicht überspringen dürfen. Und dann wird diese Zwei zur Drei, weil ich ja im Grunde schon im Zehnerbereich drin bin.
Also ich hab' mit borgen, ne? Also, dass wir uns aus dem Zehnerbereich eine Sache schon borgen, die noch gar nicht da ist, das heißt, wir müssen sie dann im Nachhinein auch wieder dazutragen. Weil, sonst haben wir ja etwas übersprungen.

Also, sie gehen oben eine Stufe höher und müssen dadurch unten auch eine Stufe höher?

Ja, weil ich die ja schon genutzt hab.
Also, dieses geborgt wirkt ja ein bisschen so, als wenn ich von der 2 etwas weggenommen hab. Und das bin ich ja eigentlich nicht. Ich bin statt (...) Ich bin eigentlich schon in den Zehnerbereich reingegangen, obwohl ich hier ja noch gar nicht im Zehnerbereich drin bin. Und ich bin ja denn schon im Zehnerbereich. Und deswegen muss ich hier noch eine Eins nachtragen. Die muss ja eins höher gehen, die Zwei.

Und woher nehmen Sie die kleine 1? Von der 15? Die nehmen Sie von der 2 unten...?

Nein, die nehm ich nicht von der 2, die muss ich aber nachher zuzählen, natürlich nicht von der 2, dann würde hier ja nur noch 1 stehen.
Also, ich bin ja schon in den großen Zehnerbereich eingedrungen. Da hab ich mir schon einen Zehner genommen. Der mir gar nicht zustand. Und den habe ich jetzt im Grunde dazugetragen. Ich meinte nicht aus der 2 geborgt, sondern aus dem Zehnerbereich geborgt.
Aber wie gesagt, es lief auf eine relativ schematische Art und Weise. Also, es war gar nicht so sehr problematisch.
Und die Kinder haben sich sehr festgebissen über diesen Spruch. Mit diesem chorischen Sprechen dazu lief das ziemlich locker durch. War nachher kein großes Problem.

Frage 2
Ich würde die 645 splitten in Hunderter, Zehner und Einer und würde das extra ausrechnen lassen, würde gucken, was passiert. Dann würden sie darauf kommen, dass sie diese Einzelergebnisse einzeln hätten und dann würde ich versuchen, daraus den Aufbau zu forcieren, den darzustellen.
Und dann würden sie darauf kommen, o.k., dass man hier die Hunderterstellen ergänzen muss, hier die Zehner und dass man da schon im Einerbereich ist. (...)

Also, wenn ich ganz doofe Schüler habe, dann würde ich dazu noch etwas malen. Dann würde ich mit Hundertertafeln und solchen Geschichten etwas machen, ne? Also ich weiß nicht, bei der Aufgabe, ob sich das anbietet (...) Also, ich neige dazu, immer oft das auch selbst nur ansatzweise da mal so deutlich zu machen, was da so passiert. Also, eventuell mit Hundertertafeln, das müsste man sich dann genau überlegen.
600 mal 123, das ist schon schwierig. Vielleicht könnte man einen Beutel anmalen, in dem 123 sind. Und dann zeigen, was passiert, wenn ich den mal 10 nehme, oder mal 1.
Das wäre dann aber nur, wenn man wirklich ganz schematisch, ganz ursprünglich anfängt. Ansonsten ist das auch eher eine schematische Sache.

Frage 3

Moment (...) (*Liest die Aufgabe noch einmal leise und konzentriert durch, überprüft den Wahrheitsgehalt der Schülerinnenaussage)*

Ich würde ihr antworten, dass sie in diesem Fall Recht hat. Weil, es ist ja wohl faktisch so. Parallel dazu würden sich Übungen anbieten.

Gespräch wird durch zwei Kollegen unterbrochen, die ins Lehrerzimmer kommen. Nach einiger Zeit beginnt der Verfasser wieder:

Wo waren wir stehen geblieben?

Im Grunde bei meiner Frage, welche Zielsetzung hier sein soll. Ich denke, man kann verschiedene Sachen machen. Man kann z.B. dieses Teil mal auseinanderschneiden und dann mal gucken, was da drin ist.
Also, in dem Fall hier, also in diesem Fall (...) ja, kann man so sagen. Ist in diesem Fall richtig (bezieht sich jetzt wieder auf die fiktive Aussage der Schülerin). So, und dann könnte man sich die Teile mal angucken, ob das immer so ist oder wie der Aufbau davon ist. Und dann könnte ich mir vorstellen a) dass man also die z.B. mal zerschneidet, dann guckt. Und das immer im Verhältnis sieht.
Also, der Haken ist ja wohl, ich glaube, das ist das, was sie meinen, worauf – ich weiß es nämlich im Moment nicht ganz genau, dass sich die Fläche ja verdoppelt und der Umfang nicht.

Äh, ach so, nein, das ist hier nur zufällig so ...

Aha, es geht also nicht darum, es ist nur zufällig so. (...) Worum geht es dann? (lacht)

Einfach nur um die Situation. Wie antworten Sie der Schülerin?

Ja. Toll! Hast du gut gemerkt!
Und dann würde ich das mal nutzen und diese Teile im Unterricht vielleicht mal auf Karo machen oder so. Und so mal untersuchen, wie sich die Flächen ändern im Vergleich zum Umfang.

Dann könnte man eine Tabelle machen, ob es da eine Verhältnismäßigkeit gibt. (...)
In der Entwicklung. Was ich im Moment auch gerade nicht weiß. Ob es eine Verhältnismäßigkeit gibt. Also, im Vergleich zu zwei verschiedenen Flächen.
Gibt es eine?
Also, dann hat sie das doch toll herausgefunden. Ich würde sie auch noch fragen, wie sie darauf gekommen ist.
Ich würde sie loben und das Thema aufgreifen. Für den Unterricht nutzen. Mit Kästchenpapier, unbedingt. Ausschneiden, was aufkleben und und und. Ist immer nett.

6.25 *Protokoll 25 H*

Alter der Lehrkraft: *45 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *15 Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen (neueste Ausgabe)*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Ich würde jetzt erst mal zum zweiten Teil der Frage gehen. Weil ich denke, dass das auch Teil der ersten Frage irgendwo ist.
Spontan würde ich jetzt erst mal inhaltlich sagen, ich würde mit der schriftlichen Addition beginnen.
Dann lasse ich die schriftliche Subtraktion ohne Übertrag folgen, dann die schriftliche Addition mit Übertrag und dann die Subtraktion mit Übertrag. Oder war es eine andere Reihenfolge? Ich weiß nicht mehr genau, das ist schon so lange her...

Sie führen also die Reihenfolge wie im Lehrbuch ein?

Ja ... ja, wahrscheinlich. ... Also, ich bin jetzt im Moment unsicher, ob ich erst die .... nein, ich glaube, das ist schon richtig, so wie ich das gesagt habe.
Also, so würde ich jetzt erst mal die Frage verstehen. Das wäre jetzt für mich allgemein zur Vorfrage, was müsste allgemein ... äh ... (*überlegt 5 Sek*.)
So, jetzt ist mir aber irgendwie nicht so ganz klar, ... was Sie jetzt näher meinen mit der Frage ... gut, also, ich lasse das noch einmal auf mich wirken.

Meinen Sie den ersten Teil der Frage oder den zweiten? Das Herangehen oder Verstehen oder Tunkönnen?

Ich hatte jetzt so das Gefühl, das, was ich bis jetzt gesagt habe, bezog sich mehr auf die zweite Frage. Was ist also sozusagen inhaltlich zuvor gelaufen. So.
Und die Frage: Wie würden Sie an solche Probleme herangehen, wenn Sie in einer dritten Klasse unterrichten?

Also: Wie würden Sie es den Kindern erklären?

Hmmm, das ist jetzt dieses Problem: von 7 bis 15 sind's... ne? Also, ich klau' mir einen Zehner. ...

Also, die ganze Situation ist etwas merkwürdig für mich. Mir ist natürlich klar, dass Sie wenig eingreifen möchten..

Ja, das mache ich absichtlich, denn ich möchte Ihnen natürlich nichts in den Mund legen....

Ja, das verstehe ich auch. Also, ich fang erst mal an. Und wenn Sie das Problem haben, Sie verstehen mich nicht, dann haken Sie einfach ein.

Das mache ich auf jeden Fall!

Also, ich würde auf jeden Fall erst einmal die Kinder da reinlaufen lassen, dass sie erst mal versuchen 5-7 zu rechnen. Das Hauptproblem daran, die Geschichte ist, dass es ja nicht geht und da irgendwas schiefläuft. Auch wenn sie das oft verbalisieren, wenn die Schüler diese Aufgaben rechnen, verstehen sie am Anfang noch nicht, dass ich eine größere Zahl nicht von einer kleineren abziehen kann. Und dass da irgendetwas passiert und ich da in den nächsten Zehner reinrutschen muss.
Und ich würde sie, na ja, schriftliche Subtraktion einfach ohne Übertrag ist gelaufen, ich würde sie damit konfrontieren und gucken, wie man das Problem sozusagen lösen könnte.
5-7 geht nicht, aber das ich natürlich 45-7 rechnen kann und dann in die 38, also den nächsten Zehner runterrutsche, das wissen sie ja.

Was meinen Sie mit runterrutschen. Wie würde Sie das in dem Fall speziell erklären? Sie sagen auch, Sie rechnen 5-7?

Nein, nein ... ich würde versuchen, von der 7 bis zur 5 zu ergänzen. Da würde ich dann feststellen: Das geht nicht.
Dann würde ich sagen: O.K., ich hol mir da irgendwo einen Zehner. So wie sie das von der schriftlichen Addition mit Übertrag kennen. Dann würden sie wahrscheinlich auch sagen, ich müsste mir da einen merken oder so etwas. Oder wahrscheinlich würden sie eher sagen: Ich muss mir da einen holen. Ich brauch ja da einen Zehner. Anders als bei der Addition, wo ich mir ja einen mitnehmen muss, mittragen muss. Wie hab' ich das denn beim letzten Mal...also ich weiß, dass da so ´ne, weil ich da so `ne Mathefortbildung ab und zu mitmache... dass es da so ne Diskussion gibt um die 1, wie wurde das noch mal verbalisiert... ich glaube ... ich hab's ...
Also, ich mache es noch so: Ich leih' mir da den Zehner.

Ach so. Und diese Ausdrucksweise wird kritisiert. Die Fortbildungen sind beim IfL, nehme ich an?

Ja, die haben das wenigstens so dargestellt, dass es in einem Didaktikbuch aufgetaucht ist, dass man das nicht mehr sagen dürfe, das sei falsch. Also diese Diskussion darum ... ich finde das auch eine sehr problematische Geschichte und ich weiß auch, dass noch jede Menge von meinen Kindern, obwohl sie es richtig machen, nicht unbedingt wissen, warum sie es richtig machen.

Aha. Sie erklären sich das aber auch noch so, dass Sie sagen, Sie leihen sich einen Zehner?

Ich überleg' mal gerade. Wie hab ich das noch mal versprachlicht ...? Also ich lass das bei der schriftlichen Addition und Subtraktion immer ganz stark versprachlichen, damit sie das einfach ... damit sie sich diesen Schritt notieren.
Also, der erste Schritt war: Von 7 bis 5 → geht nicht. Dann habe ich gesagt, ich muss mir einen Zehner borgen. Und das notiere ich mit hier unten.

In der Einer- oder Zehnerspalte?

In der Zehnerspalte.

Dann haben Sie ihn sich ja aus der Zehnerspalte geborgt und auch gleich wieder zurückgegeben – in die Zehnerspalte...

Das verstehe ich jetzt nicht.

Sie haben gesagt, sie würden den Schülern sagen, Sie borgen sich von der 4, also von den Zehnern einen, ...

Nein, da verwende ich kein borgen, wir rutschen in den nächsten Zehner. Und das müssen wir uns notieren.

Wir rutschen mit der 5 in den....

Also, von der 7 bis zur 5 → geht nicht. Also rutschen wir in den nächsten Zehner, also rechnen 7 bis 15, das kann ich dann auch versprachlichen lassen, und notieren uns das.
Und das war natürlich so ein Problem, wobei ich da ... also eigentlich hätte ich dann oben bei der 45 ja keine 4 mehr stehen, sondern eine 3. Und weil mir das zu kompliziert ist, mache ich das einfach so, indem ich sage, o.k., wir notieren uns hier und ergänzen dann nicht von der 2, sondern von der 3 zur 4, was dann aufs selbe herauskommt.

Und die andere Möglichkeit, sagen Sie, wäre dann aber, hier oben nicht die 4, sondern die 3 stehen zu haben und dann eben nicht unten die 1, sondern hier oben die 1.

Richtig, jaja.
Also, im Prinzip, logischer wäre es ja, wenn man sagen würde, o.k., ich kann von der 7 bis zur 5 nicht ergänzen. Also ergänze ich bis zur 15, ... und dann ergänze ich von der 2 zur 3. Das ist eben das komplizierte daran.
Deswegen habe ich das dann, so wie es ja auch lehrbuchmäßig ist, so gemacht: O.K., wir ergänzen von der 7 bis zur 15, das sind 8, wobei ich, glaube ich, den Schritt zuerst aufschreiben lasse.
Von der 7 bis zur 5 → geht nicht, also rutsche ich in den nächsten Zehner, notiere mir den, von der 7 zur 15 sind 8, 1 und 2 ergeben 3, von der 3 bis zur 4 sind's 1.

[...]

Nachvollziehbarer allerdings fände ich, wenn man sagt, o.k. von der 7 bis zur 5 → geht nicht, also ergänze ich von der 7 bis zur 15 und das ich das auch an der 4 irgendwo deutlich mache, dass das keine 4 Zehner mehr sind, sondern nur noch 3. Wir sind ja da in den vorherigen reingerutscht.
Vielleicht könnte man das beim nächsten Mal so probieren. Ich glaube allerdings, dass das ein ganz dicker Knackpunkt wäre, wenn man jetzt sagt: O.K. wir haben da jetzt nicht mehr 35, sondern 45.

Es gibt ja auch andere Ansätze, z.B. von oben zu rechnen, aber das mache ich nicht. Das bleibt bei mir wie in der Addition einheitlich. Also, ich lege von unten los.

[...]

Und wenn Sie jetzt die 4 durchstreichen und stattdessen eine 3 schreiben würden, wo würden Sie dann die 1 hinschreiben?

Dann würde ich gar keine 1 mehr hinschreiben.

Aber dann steht da ja 35-27 ?

Naja, dann müsste man eben, aber das wäre natürlich ganz schwierig, das so schreiben 15 (*schreibt eine kleine 1 neben die 5*) ...

Ich habe mich vor ungefähr einem Jahr mal damit auseinandergesetzt und habe dann gedacht, von allen schwierigen Arten ist die, die ich jetzt im Unterricht unterrichte, sicher die einfachste.

Frage 2

Ich würde in jedem Fall die Nullen auffüllen lassen. Das ist ja so eine Zahl, die scheinbar 738 ist und nicht 73800. Ich würde also in jedem Falle die Aufgaben so rechnen lassen.
Ich glaube – also, das ist ja so ein bisschen verschüttet, wenn man das vier Jahre lang nicht gemacht hat – ich glaube, ich mache das mit meinen Schülern auch, also das daran zu trainieren, dass sie darauf zurückgreifen, die wirkliche Zahl aufzuschreiben und nicht eben die Stelle.
Sie scheinen die Stellenwerte also noch immer nicht verinnerlicht zu haben.

Frage 3

(Überlegt 50 Sek.)

Mir ist im Moment das Problem überhaupt gar nicht klar ... (*liest für sich leise noch einmal Teile der Aufgabenstellung*)

(Überlegt 35 Sek.)

Ja, da hat sie ja was Tolles rausgefunden, oder? Dass sich mit dem Zunehmen des Umfanges auch die Fläche vergrößert. So. Würde ich jetzt erst mal sagen.

(Überlegt ca. 1 Min.)

Ich habe jetzt im Moment irgendwie ein Problem...

Also, da ist keine Falle in der Aufgabenstellung, oder so etwas. Vielleicht als Hilfe: Die Situation ist klar. Die Schülerin steht mit der Karte vor Ihnen und hält sie Ihnen hin. Schauen Sie mal, das habe ich mir gestern Abend ausgedacht. Da hatte ich ein Quadrat und dann habe ich ein Rechteck daneben gemalt. Das war größer. Und die Fläche ist ja auch größer. Und das ist ja immer so.
Was antworten Sie dann in dem Moment?

(Überlegt 15 Sek.)

Dass ich im Moment ... *lacht* ... weiß nicht. Da hab ich `nen Block irgendwie. Ich bin im Moment etwas irritiert. Ich kann mich so schlecht auf die Situation einlassen. Wenn jetzt morgen ein Kind vor mir stünde ... ich guck jetzt hier ... ich denk' die ganze Zeit: Was ist das Problem?

Was meinen Sie mit Problem?

Also, ... *(lacht)* ... ich bin jetzt etwas irritiert.

(Überlegt 25 Sek.)

Ich bin im Moment etwas platt...

O.K., ich danke Ihnen für das Gespräch.

6.26 *Protokoll 26 H*

Alter der Lehrkraft: *31 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *3 Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch, Zahlenreihe*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Ja, da könnt' ich ne Menge zu sagen.

Nur zu!

Ja, das kommt also wirklich drauf an, nach was für Ansätzen man arbeitet... und bei mir ist es so, ich finde den verständnisorientierten Ansatz gut, ich mach ja auch eine Fortbildung dazu – Mathe ist nicht mein Fach, und deswegen bild ich mich da fort – und die Frau legt sehr viel Wert auf dieses Verständnisorientierte. Und ich finde das auch gut, merke aber, dass das, ja erstens habe ich das Gefühl, dass... ja, erstens fällt es mir nicht so leicht, das wirklich so dann zu vermitteln, dass sie das auch, ne...? Ich bin erst mal zufrieden, wenn sie das Verfahren können, und lege darauf mal ´nen Schwerpunkt. Und also, um das richtig zu verstehen, wenn man jetzt nach dem verständnisorientierten Ansatz arbeitet, ja, da müssen sie auf jeden Fall hier die Stellen können, also wissen, dass man eben die nächste Stelle, in dem Fall den Zehner, anreißen, anknabbern muss, um das abziehen zu können. Dass man eben 7 nicht von 5 abziehen kann, und dieses eben nur rechnen kann, weil da eben Zehner sind. Also müssen sie Stellen verstehen. So, das find ich dafür wichtig. Und wie ich da ran gehen würde: Ja, ich hab das auch so versucht, das dann auch wirklich so dargestellt, und mit Wegwischen, also die Zehner, hier 45, vier Striche, fünf Einer, dann einen Zehner umgewandelt, ne, indem man den kleinen Haken... Ja, so würd ich das machen. Ich hab es dann aber auch nicht immer wieder probiert, weil viele, hab ich bemerkt, fühlen sich auch verwirrt, und für die ist es erstmal gut... Und ich hab überwiegend keine sozial schwachen Kinder in der Klasse, und ich hab gemerkt, dass ich es den Kindern tendenziell erst mal besser beibringen kann, wenn nur das Verfahren. Also, nur das Verfahren lernen...

Und die... Wenn Sie's verständnisorientiert erklären, wie würden Sie das machen? Also, sie sagten ja schon...

Ja, hab ich ja gesagt...

...den Zehner anknabbern...

...bildlich darstellen...

Wenn Sie’s ganz konkret an diesem Beispiel oder an einem der anderen fest machen würden, und Sie würden es den Schülern erzählen...

Ja, dann würde ich die Aufgabe so anschreiben, dann würd’ ich daneben die Zahlen bildlich darstellen, also den Symbolen, die man eingeführt hat, also Striche für Zehner, Punkte für Einer; eventuell würde ich das auch noch mal legen lassen, dass nochmal vorne weg zu lassen, das weiß ich jetzt nicht im Einzelnen, und dann würde ich die Kinder das weg nehmen lassen, also die 27 wegnehmen lassen von den 45. Und dann würden sie darauf stoßen, dass das nicht geht. Und da müssten sie einen Zehner umwandeln, das würd’ ich dann auch machen.

In dem Fall von den 4 Zehnern würden Sie einen umwandeln...

Genau. Ach so, und ich würde, glaub ich, erst mal die Zehner wegnehmen lassen, das würd’ ich auch... Nee, das ist ja blöd, weil man fängt ja von hinten an. Nee, ich würde von hinten anfangen, ich würde sagen: „So, jetzt <u>nehmt ihr</u> *da* erst mal 7 Einer.“

Tauschen Sie einen Zehner um...

Ja, genau!

Wie geht’s noch weiter?

Ja, dann hab ich einen Zehner weniger und dann würde ich das so machen, dann würde ich ihnen sagen, jetzt müsste hier eigentlich eine 3 stehen und die vielleicht sogar auch über die 4 schreiben, und, ja, da würde ich sie das vielleicht sogar, wenn ich das nochmal so eigentlich mache – ich hab ja auch erst meinen ersten Durchgang, ne? – ja, dann würde ich sie das eventuell so schreiben lassen, oder ich würde eben im nächsten Schritt einzeln sagen: „Jetzt kann man ja auch den Einen, den man sich geliehen hat, hier unten hin schreiben – weil das sind ja die, die man abzieht...

Wie? Nochmal, den letzten Schritt versteh' ich noch nicht!

Also, hier müsste dann ja ´ne Drei stehen, so, und das würd' ich dann, glaub ich auch – wenn ich das so schrittweise aufbauen würde, würd' ich das so machen. Und dann würde ich im nächsten Schritt eben sagen, also würde die das eine Weile so rechnen lassen, und dann würd' ich sagen, dass das einfach aus ästhetischen Gründen nicht so sinnig ist, da jetzt immer die 3 hin zu schreiben, sondern dass man stattdessen den Unterschied zwischen 3 und 4, nämlich die 1, da hin schreibt, zu denen, die man wegnimmt. So hab ich's auch versucht, es ihnen zu erklären. Aber wie gesagt, ich fühl' mich da selber immer wieder auch unsicher, und muss noch viel; ja, und deswegen, wie gesagt, bei mir rechnen die das jetzt, man leiht sich die Zahlen, und ich möchte erstmal, dass sie das Verfahren können, so, das ist mir das Wichtigste.

Sie meinen, Sie müssten die Kinder an die Hand nehmen... So ein bisschen hatten Sie schon zu dem Vorverständnis gesagt, dass sie vorher die Stellen...

Ja, die Stellen, die Stellen müssen die können, ein Zehner sind zehn Einer, und sowas...

Frage 2

Also, wenn das in der sechsten Klasse auftreten würde, ja, dann würd' ich gar nicht verständnisorientiert arbeiten, sondern da würd' ich sagen: „Merkt euch immer unter Zahl immer wieder eine neue Zeile machen, fertig, aus, immer wieder und immer wieder! Also rein mechanisch würd' ich das machen. Und ich weiß, dass man da auch wieder – ich hab's auch probiert, und ich bin da ehrlich gesagt auch ein bisschen abgenervt, weil, genau dass haben wir irgendwie ´ne Stunde in der Fortbildung da durchgekaut, ja, und, ja, dann will man das umsetzen, und die Kinder... Das bringt nichts. Oder zumindest, in meiner Erfahrung, ist die... Also, ein Junge, oder ein paar Kinder haben selber gesagt, dass <u>sie das nur lernen müssen</u>, und ich weiß, dass man das auch so einführen kann, und das könnte man natürlich auch probieren, dass man erstmal rechnet, hier 3 mal 600, so... Das kann man machen. Also, meine Erfahrung ist, dass, wenn man das nicht haarklein selber hat, und das finde ich... jetzt nicht, dass ich's nicht rechnen kann.

Wie meinen Sie „haarklein"?

Ja, haarklein, ganz klar auch das, was man spricht. Da muss man immer wieder das gleiche sagen, da geb ich auch meiner Fortbildungslehrerin Recht, also immer wieder die gleichen Formulierungen, und wenn man das dann damit so intensiv durchdringt, dann kann man das so machen. Aber ich setz mich nicht mathematisch-fachlich, ehrlich gesagt jetzt, mit schriftlicher Multiplikation so auseinander, dass ich das irgendwie... ja, da hab ich echt das Gefühl, dass man das müsste. Also, ich kann das natürlich rechnen.
Und natürlich sind das Hunderter, das weiß ich auch, aber ich tu mich echt schwer damit, das meinen Kindern zu vermitteln, so dass sie das verstehen. Und ja, also ein Kollege vertritt die Meinung, und ich komm' da auch eben mehr hin, eben, ja, nee...
Also, ich würde das so machen, dass ich ihnen das immer wieder eintrichtern würde, und dann würde ich vielleicht ein oder zweimal Erklärungsversuche sagen oder mal drauf hinweisen: „Das sind ja Hunderter, wenn ihr hier jetzt 600..." Das würd' ich vielleicht machen, so, dann erst mal mal 600 mal nehmen, so dass sie sehen, dass da die Nullen sind. Das würd' ich glaube ich noch machen. Ja, so würd' ich das machen.

Frage 3

Also, ich würd' mich darauf einlassen. Aber weiß ich ehrlich gesagt jetzt nicht so genau, worauf sie da hinaus wollen. Das würd' ich... Ja, da kann ich nur das gleiche von eben wiederholen: Wenn ich das richtig mathematisch durchdringen will, dann müsste ich sagen, dass ich mich da erst mal noch mal selber damit befassen würde, aber ich würde mich erst mal auf das Kind einlassen und mir das anhören und das auch nachvollziehen. Und dann würd' ich das gegebenenfalls im Unterricht noch mal aufgreifen, oder sie mit einbeziehen, dass sie's den anderen Kindern erklären kann, so würd' ich das machen.

So würden Sie ihr antworten dann, und sagen, ob sie's denn erklären kann.

Ja, ich würd' das mit dem Kind dann vorbereiten, so, wie ich das jetzt nachmittags auch mache, wenn Kinder was vorbereiten. So würd' ich das machen.

6.27 *Protokoll 27 H*

Alter der Lehrkraft: *42 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *10 Jahre*

Schulbuch: *Stellt sich Kopien aus verschiedenen Werken zusammen*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

(Denkt einen Moment nach)

Sie müssen auf jeden Fall meiner Meinung nach schon mal die schriftliche Addition gemacht haben, weil das einfacher ist und ich mache diese Sachen dann – schriftliche Addition und schriftliche Subtraktion – immer gerne nach Montessori. Weil ich gemerkt habe, dass das ganz klasse ist, dass sie eben nicht nur, hier, abstrakte Zahlen machen, sondern Montessori hat so ´ne Sache entwickelt mit Zahlenkarten, wo die Zahlen untereinander liegen, also wo man die Summanden oder dann die Zahlen, die man subtrahiert, wo sie untereinander liegen, also sehr anschaulich das ist irgendwie, nicht? Die Zehner liegen alle untereinander und die Einer liegen alle untereinander und wenn man sie addiert, dann tauscht man da 10 Einer gegen 1 Zehner und 10 Zehner gegen 1 Hunderter und kommt so dahin, dass hinterher dann, ähm, aus zwei Gruppen, die man, äh, nicht aus zwei Gruppen, Karten, die da liegen, dann zusammen eine Gruppe hat und daraus sehen kann, welche Zahl jetzt dabei rausgekommen ist. Also, das ist, das ist ein sehr anschaulicher Unterricht mit Karten, wie Montessori, mit blau und grün und rot sind und die kennen die Kinder, die wissen irgendwie, dass die Blauen Zehner und die Grünen Einer sind und kennen jetzt so dieses Tauschverfahren. Und wenn sie dann das abziehen sollen, ist es so, dass sie, dass sie, ähm, ja was wegnehmen sollen, und wenn sie was – und wirklich nicht nur im Kopf wegnehmen und dann tatsächlich hingehen müssen und sieben Einer wegnehmen. Und wenn dann irgendwie, nich, und wenn der Übertrag kommt, dann ist nicht, dann sind nicht genügend Einer da, dann müssen sie andersherum tauschen und dann kriegen sie für einen Zehner, den man dann, also diese Hilfszahlen, die ja aufgeschrieben werden, bei der Subtraktion, diese Hilfszahlen, die werden dann auch markiert. Und dann, also sie machen es handelnd und sie machen, also kriegen es dabei so im Kopf hin – wenn nicht genug da ist, dann muss ich tauschen. Und sie fangen auch immer hinten an, also bei den grünen Zahlen die hinten sind und das bereitet für mich dazu ganz gut vor, dass sie das danach dann auch auf dem Papier machen können.

Dann ist es so, dass ich ihnen gebe, natürlich zuerst Aufgaben ohne Übertrag, dass sie die, also weil es vom Einfachen zum Schweren ja gehen soll, ja, ohne Übertrag wo sie einfach so, ähm, subtrahieren sollen.

Und ich gebe ihnen erst die Chance, es selber rauszufinden wie sie's eigentlich machen und wie man's dann jetzt so hier aufschreiben könnte. Und dann kriegen sie immer verschiedene Sachen raus, zählen manchmal nur die Einer und merken dann: ups, es geht nicht. Und ja, dann muss ich vielleicht tauschen oder fangen mit den Zehnern an und merken dann, hier dürfen sie gar nicht anfangen, weil sie dann hinterher nicht zu dem richtigen Ergebnis kommen ... dann ... äh ... ja dann haben sie so `ne Probephase, wo sie versuchen und wo sie dann auch scheitern und manche aber denn aber auch eben richtig dahinkommen.

Und dann machen wir es so am Schluss, dass ich Ihnen sage: Wenn ich es rechne, mache ich mir aus dem Minus ein „bis". Das schreibe ich dann an die Tafel, dass sie rechnen ‚sieben bis fünf' geht nicht ... warum nicht?... und zwar immer mit dieser Abfolge, sieben bis fünf geht nicht, weil fünf kleiner ist hole ich mir einen Zehner von vorne, dass ist dann dieses Tauschen, was sie vorher auf dem Fußboden gemacht haben, hol ich mir `nen Zehner von vorne, schreib` ihn hier hin und rechne dann 7 bis 15, notier die Zahl unten, und so geht das dann halt irgendwie mit so `nem standardisierten Satz immer weiter.

Unterbricht. Schaut, ob sie alle Fragen beantwortet hat, dann bezieht sie sich noch einmal auf die Frage bezüglich des Vorwissens:

Also sie müssen natürlich Kopfrechnen können, irgendwie, Kopfrechnen im Kopf von, äh, bis 20 plus und minus, jaja, und ich würde auf jeden Fall vorher immer schriftliche Addition machen.

Und, äh, auch Subtraktion natürlich im Kopf, überlegen, wie man das machen kann, das man eben, auch wenn man die Zehner abgezogen hat, und dann die Einer hinten abzieht, dass man das trennen kann, dass man die Zahlen auch aufsplitten kann in 45, also 45 in 40 und 5 und 27 in 20 und 7 und so solche Sachen.

Frage 2

Ja ... das ist jetzt für mich `ne schwierige Frage, weil ich Klasse 4 Mathe noch gar nicht unterrichtet habe. Ich bin praktisch direkt davor, jetzt schriftliche Multiplikation einzuführen.

Jetzt bin ich grad sehr dankbar, wenn ich weiß, dass das `n Problem ist, was vielleicht auftaucht. Aber, ich hätte es unterrichtlich, hab‘ ich es einfach noch nicht gemacht.

(Unterbricht kurz.)

Tja, also, natürlich ist es so, dass sie irgendwann dahinkommen müssen, dass sie wissen, dass sie diese nicht untereinander schreiben müssen, weil es nicht `ne ... ähm ... weil der Stellenwert dann falsch ist.
Vielleicht hilft ein Montessori ... warte mal ... (murmelt) das ist jetzt so aus dem grünen gedacht, so ins blaue... Montessori, also, das hab‘ ich noch nicht ausprobiert, ob man das Malnehmen mit den Karten auch machen kann. Weil an diesen Karten ist sehr schön, Einer, Zehner und Hunderter verschiedene Farben haben, und damit könnte man eventuell was anschaulich machen, aber ich ... kann’s jetzt nicht wirklich sagen.

Was meinen Sie, woran liegt es, dass die Schüler da so... (auf die fehlerhafte Aufgabe deutend)

Also es liegt natürlich daran, weil sie diese großen Zahlen ... äh ... wenn sie die mal nehmen, im Kopfe reduzieren auf kleine Zahlen zum kleinen Einmaleins. Es ist ja so, dass man dann drei mal sechs nimmt und nicht drei mal sechshundert im Kopf, ja, also, wer jetzt bei diesem, drei mal 6 ist halt 18 und es ist ihnen egal, wo sie die 18 hinschreiben, das ist nicht ... äh ... wird dann für den Schüler nicht 1800, ja, das wird eben 18. Und dadurch, dass sie das so reduzieren, vergessen sie hinterher den Stellenwert, dann lernen sie hundert Millionen Mal sie sollen stellengerecht untereinander schreiben, also hinten rechtsbündig untereinandergeschrieben und dann wenden sie das jetzt hier an, ja, und schon ist es die Falle.
Also man müsste es ihnen irgendwie klarmachen, dass es, dass, wenn man jetzt hierbei bleibt in diesem sechs mal drei, eben nicht sechs mal drei ist, sondern sechshundert mal drei.
Ja, aber mehr kann ich dazu gar nicht sagen. *(Scherzt:)* Vielleicht könnten Sie nochmal wiederkommen, wenn ich’s unterrichtet hab‘.

Die Frage ist ja auch, was ich in der sechsten Klasse machen würde. Da würde ich dann noch mal die schriftliche Multiplikation noch mal wiederholen. Aber ... ja ... vielleicht wenn sie später noch einmal wiederkommen...

Frage 3

Unterbricht die Frage an der Stelle, an der es heißt, die Schülerin hätte eine Theorie ausgeknobelt: Oh, gut!

(Denkt nach)

Ja, dass kommt ein bisschen darauf an, was die Schülerin mir dazu sagt ... wart mal ... also 4 mal 4. Die Schülerin kommt und sagt: ich hab‘ so ein Quadrat und wenn ich den Umfang vergrößer‘, wird auch die Fläche größer.

(Denkt nach)

Also, ich würd‘ der Schülerin sagen: ist ja grandios, dass sie sowas `rausgefunden hat, mit was für Sachen sie sich beschäftigt, würd‘ sie schwer loben, natürlich, dann würd ich gucken, ob sie alles auch richtig gemacht hat .... kontrolliert die Rechnung, murmelt ... ja, kann man sie nur für loben, oder nicht?

(Denkt länger nach)

Ja ... Also, ich würde sie loben! Das hatten wir ja jetzt schon. Und was soll ich noch sagen zu ihr? Wollen Sie jetzt wissen, wie ich es, ob ich es jetzt unterrichtlich...

Also, das wäre dann die Reaktion. Also, wenn Sie sagen, sie würden Sie loben...

Ja ... würd‘ ich grad mal jetzt tun. Sieht doch gut aus. Ne? Gute Schülerin. Kriegt `ne Gymnasialempfehlung.

6.28 *Protokoll 28 H*

Alter der Lehrkraft: *54 Jahre*
Bisher geleistete Dienstjahre: *33 Jahre*
Schulbuch: *Zahlenbuch, Nussknacker*
Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also meiner Meinung nach müssten die Kinder das Stellenwert-System recht gut können und müssen wissen, dass eben zehn Einer ein Zehner sind, also die Bündelung verstanden haben. Die hab ich bei der Addition mit Sicherheit ganz ausführlich gemacht, mit Bündeln, jetzt geht das auch mit Perlen, mit kleinen Kügelchen, mit Erbsen und Bohnen... Das war ja schon die erste Schwierigkeit, bei der Subtraktion ist es deutlich schwieriger, also das ist einfach... Wollen Sie jetzt wissen, wenn ein Kind das nicht... Nee, Sie wollen nur wissen, wie ich überhaupt ran gehe, um das neu zu erklären. Ach so. Also wir haben hier in der Schule eine Vereinbarung getroffen, wir haben gesagt: Wir addieren zu der unteren Zahl bis wir zu der oberen gelangen und schreiben dann den Übertrag dazu. Also 9 plus 2 sind 11, und dann kommt die eine Zahl dahin. Aber für mich als Lehrerin finde ich es einfacher zu entbündeln, aber da wir eine Vereinbarung getroffen haben, bin ich jedes Jahr in diesem Dilemma, jedes Jahr muss ich das wieder machen. Und ich weiß ganz genau, zuhause hören die Kinder dann: „9, wieso sind es bis 11?“, oder: „Du musst einen Zehner dir runter holen und dann kannst du die neun erst abziehen von den 11 und hast also einen dir da geborgt.“

Das hören die zuhause, dass sie...

Ich kann diese Frage wirklich ganz schwer nur beantworten, die mach’ ich ganz häufig aus dem Bauch. Wenn ich sehe, wie gut die Klasse ist, wie sie es versteht, ich mach es unterschiedlich auch bei einzelnen Kindern. Ich habe schon entbündelt, ich habe auch schon einfach mechanisch gesagt: „9 plus 2 ist 11!“, ein Übertrag.

Und wenn Sie entbündeln würden, wie würden Sie das erklären?

Ich habe hier oben nur einen Einer, ich brauche aber 11 um 9 abzuziehen, ich muss einen ganzen Zehner rüber nehmen. D.h. also, ich müsste mir da oben eigentlich einen borgen.
Das verstehen manche Kinder besser! Ich kann es dann auch mit Kügelchen manchmal hinlegen.

Wie würden Sie das dann machen, mit Kügelchen, wenn Sie... Nehmen Sie gern den Zettel...

Gut, nehmen wir hier mal 45, 45, von denen, hier sind 4 Zehner, und das sind jetzt die Einer. Da hab ich 1,2,3,4,5,6,7 und da hab ich 2, sie müssen ja üben, so, 2! Das geht nicht, ich kann die jetzt nicht wegnehmen davon, so viele Zahlen. Ich mach' hier einen Strich absichtlich, damit das nicht so dolle... Jetzt nehm wir uns den Einen weg und tun hier zehn dazu. Und jetzt kann ich die ja weg nehmen, immer entsprechend streichen. So, wie viele sind jetzt nach? So, nach dem Motto.

Und würden Sie dann auch das, was Sie hier gemacht haben, dann auch in den Ziffern ausdrücken?

Das mach' ich nicht mit der Klasse, niemals! Das würd' ich nur mit Kindern machen, die überhaupt nicht klar kommen, die nicht weiter kommen, um die letzte Möglichkeit das nochmal zu verstehen.
Meistens mach' ich das einfach: Sie addieren von dieser Zahl bis zur Fünfzehn, und dann schreiben wir den einen, den wir hier ja oben holen, den schreiben wir da unten mit hin.

Frage 2

Da würd ich verzweifeln, wenn sie's bis dahin nicht könnten.
Da würd ich ihnen das ganz klar mit dem Stellenwertsystem nochmal erklären, dass wir sagen: „Wir haben einmal 100 mal 645, einmal 200... oder auch umgekehrt, 600 mal 123, 40 mal 123 und 5 mal 123. Das ist eigentlich dann die einzige Vorgehensweise, dass ich wirklich sage –
ich fang deswegen auch eigentlich lieber mit dem Einer an.
Aber ich lass den Kindern den Freiraum, weil in vielen Büchern mit Hundertern oder Tausendern oder Zehnern angefangen wird. Ich hab immer wieder die Erfahrung

gemacht: Die Eltern zeigen’s ihnen wieder anders zuhause, insofern ist es dann wirklich egal, wie man es macht.

Ich weiß, dass man vorne anfangen soll, laut Vorschrift. Also: 600 mal diese Zahl, 6-Hundert, da sind zwei Nullen dran, die schreiben wir hin, so mach’ ich das. Und bei Vier-zig, ist eine Null. Und dann kann man ihnen auch mechanisch sagen, wenn man hinten anfängt, fünf mal die Zahl und jetzt 4 mal genau da drunter 6 mal, da drunter.

Das ist eigentlich nicht so ein großes Problem, das können viele dann auch verstehen. Das ist viel schwerer. Find ich so.

Frage 3

Dass sie das fein herausgefunden hat. Dass sie Recht hat. Aber ob ich das nicht gesagt hätte, das weiß ich natürlich nicht. Ich hätt’s sicher gesagt. Ich weiß eigentlich jetzt die Frage nicht genau zu beantworten, ich find’ das nur logisch, das hat sie gut herausgefunden, das ist ein Zeichen, das sie es wirklich jetzt verstanden hat, finde ich.

6.29 *Protokoll 29 H*

Alter der Lehrkraft: *60 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *38 Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Vorher ist ja schon geschehen, dass wir schriftliche Subtraktion ohne Übertrag gemacht haben. Zur Einführung von mir ist also gegeben worden, dass wir irgendwann mit unseren Kopfrechenkenntnissen an unsere Grenzen stoßen und dass es also Möglichkeiten gibt, das schriftlich zu machen. Nicht bei solchen Aufgaben, aber bei Aufgaben mit Hunderterzahlen. Im Bereich der dritten Klasse geht es ja bis 1000, sodass, wenn ich zu den Kindern sage: „Wenn ihr das jetzt hier ausrechnen sollt, also z.B. 911-286, da wird es dann schon wirklich manchmal schwierig. Wir können das schrittweise machen, aber wir tun das eben nicht.

Wenn Sie das schrittweise machen, wie würden Sie da vorgehen?

Das würde ich den Kindern überlassen, aber wenn ich den Kindern einen Weg geben sollte, würde ich erst mit den Hundertern arbeiten, da würde ich also minus 200 rechnen und dann würde ich die 86 abziehen. Und dann auch wieder in zwei Wegen: Zuerst die 11 wegnehmen, elf habe ich schon, also 75 muss ich noch und dann vom Hunderter also die 75 wegnehmen.
Aber es spielen sich ja in den Köpfen der Kinder dabei mehrere Gedankengänge ab. Dass sie also die Zahlen, die sie schon hatten, eventuell schon wieder vergessen haben: Welchen Hunderter muss ich denn jetzt...ach so...und wie viel muss ich denn jetzt, wenn ich schon elf abgezogen habe... Man stößt also kopfrechenmäßig wirklich an die Grenzen.
Und dann sage ich den Kindern, es gibt einen Weg, also eine Möglichkeit, wie ich auch schwierigere Aufgaben schriftlich subtrahieren kann. Und dann lernen wir also schriftlich subtrahieren.
Das fängt ja, auch in den Büchern, zunächst immer so an, dass ohne Übertrag gerechnet wird. Und dann kommen ganz schnell auch Kinder, die sagen: „Ja, aber guck mal, da steht ja nicht immer oben eine 9. Ich kann das doch bei anderen Aufgaben auch machen.“
Und dann kommen wir eben zu dem Übertrag.

Meistens mache ich das so, dass ich mit den Kindern noch mal wieder... wir haben das Ergänzen bei den Aufgaben ohne Übertrag ja geübt. Wir haben auch das Problem betrachtet, dass ich nicht irgendwo anfangen kann, sondern beim Einer anfangen muss. Weil ich ja, wenn ich mir etwas borgen muss, wegnehmen muss, vom Kleinen zum Großen gehen muss. Ich kann ja nicht H ergänzen, kann also damit anfangen und kann mir dann vom Z was borgen. Ist ja zu klein, hab' ich ja gar nicht. Das haben wir also vorher schon besprochen.
Und dann mache ich auch immer so eine Sequenz dabei, eigentlich, sage ich den Kindern, ist es ja mathematisch nicht richtig, das unten dazuzuschreiben. Eigentlich müsste ich mir von der Zahl, die oben da ist, einen wegnehmen.
Und dann kommen wir dazu, dass ich die Kinder, meistens die Kinder dahinbringe, Unterschiede auszurechnen. Ob ich unten einen dazu tue, oder oben einen wegnehme, der Unterschied ist immer der gleiche.
Ich sage den Kindern ja auch, ich muss von 7 bis 5 ergänzen. Das geht nicht. Wo muss ich dann hin? Zur 15! Für die 15 müsste ich mir aber eigentlich einen von den 4 Zehnern hier in Einer umwandeln und wegnehmen. Ich hätte eigentlich nur noch drei hier oben.
Wir machen aber, nachdem wir herausgefunden haben, dass der Unterschied der gleiche bleibt, ob ich von 3 bis 4 oder von 2 bis 3 ergänze, diese Regelung, die eben allgemein getroffen ist, unten das dazunehme und den gleichen Unterschied behalte.

Sie sagen, Sie würde einen Zehner wegnehmen, sodass in der Zehnerspalte dann nur noch drei wären. Haben Sie eine besondere Methode, das zu erklären?

Wir haben ja die Einer als kleine Pünktchen gezeichnet, die Zehner als Striche, die wir also aufgebaut haben schon in der ersten Klasse: aus 10 Einerwürfeln machen wir eine Zehnerstange und aus 10 Stangen machen wir eine Hunderterplatte.
Und wenn ich mir jetzt einen Zehner wegnehme, dann geht es ja immer noch um die Einer, dass ich den Zehner ja eigentlich wieder zerlegen kann. In 10 einzelne. Und davon kann ich dann eben welche gebrauchen.
Da bleiben dann aber eben nur noch 3 Zehner über.
Ich sage Ihnen vor allem am Anfang also immer wieder: Eigentlich ist es richtig und logisch, ich müsste oben einen wegnehmen, weil das ja die Zahl ist, von der ich wegnehme. Aber wir haben ja an viele Aufgaben ausprobiert, dass der Unterschied ja der gleiche bleibt. Und die Schreibweise ist jetzt eben so, dass wir unten einen dazutun.

Man könnte dann ja auch oben – wenn Sie sagen, sie nehmen oben einen weg – könnte man ja auch oben einen durchstreichen und dort eine 3 hinschreiben.

Ja, dann kommen aber auch Kinder und sagen: Da sehe ich ja gar nicht mehr, was eigentlich los ist. Das ist ja unsauber. Und das sagen wir dann auch.
Und ich versuche auch, darauf zu achten, möglichst am Anfang, dass sofort, wenn ich merke, dass ich über den Zehner gegangen bin, später auch über 20 ergänze, dass ich mir sofort das, was ich mir geliehen habe, unten hinschreibe.
Also, so ist eigentlich die Sache bei der schriftlichen Subtraktion.
Wir haben jetzt gerade, aber das gehört hier nun eigentlich nicht her, zwei Zeilen gemeinsam abgezogen, also z.B. 1000-385-624.
Aber so ist eigentlich mein Vorgehen bei der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag.
Dass ich das ausprobiere mit Ihnen auch und mich am Anfang dann einfach ein bisschen dumm stelle und z.B. sage: „Och, da könnt ihr doch auch vorne anfangen, oder....“ Dann kommen aber oft gute Hinweise von den Kindern, die ich dann aufgreifen kann und sagen kann: Mensch, das geht ja nicht, ich kann mir vom Kleineren ja nichts leihen, wenn ich es wirklich nötig habe. Das geht nur anders herum.
Und dann eben dieses Ding: Der Unterschied, der gleich bleibt, wenn unten erhöht wird, oder, wie es eigentlich richtig ist, oben weggenommen wird.
Dann kommt eben das Praktische hinzu. Nicht nur, weil es so eingeführt wird, sondern wenn ich hier jetzt anfange zu streichen, dass ich dann hinterher gar nicht mehr weiß, was ich da denn nun gemacht habe.

Frage 2

Wir haben jetzt die schriftliche Multiplikation in der vierten Klasse noch nicht eingeführt. Wir sind im Moment bei der Erweiterung des Zahlenraumes bis 100.000 und 1.000.000. Und es hat auch noch ein bisschen Zeit bis die schriftliche Multiplikation kommt.
Ich habe mich mit dem Gedanken jetzt noch nicht so direkt vertraut gemacht, habe aber auch schon teilweise die schriftliche Multiplikation eingeführt. Das ist allerdings schon länger her. In meiner letzten vierten Klasse musste ich nämlich Mathe abgeben, da war eine Kollegin, die so und so viel Stunden haben musste und das passte eben gerade so mit Mathe.
Dann wollen wir mal gucken... *(liest sich die Aufgabe noch einmal durch)*

Uns ist ja diese Schreibweise geläufig, obwohl ich von meinem Mann – der kommt aus Griechenland – auch noch ganz andere Schreibweisen kenne. Die schreiben das ganz anders auf. Ich weiß gar nicht, wie. Aber wenn Sie das möchten, dann würde ich ihn da noch einmal fragen.

Also, im Moment kommt es eigentlich hauptsächlich auf die eigene Darstellung und die eigenen Kenntnisse an. Obwohl ich weiß, dass in anderen Ländern durchaus auch andere Verfahren unterrichtet werden. Hier in Hamburg wird von den Schulbüchern meistens ein bestimmtes Verfahren vorgeschrieben, aber es ist ja wirklich einmal ganz interessant zu wissen, dass es auch anders geht.

Also, ich würde jetzt erst mal anfangen mit den Kindern...wenn ich diese Aufgabe sehe und sehe dieses Ergebnis, es wird ja meistens doch mal überlegt, in welcher Größenordnung könnte da etwas rauskommen.
Und 100 x 600, wenn ich das jetzt runde, das gibt ja schon 6000. *[L. bemerkt den eigenen Rechenfehler nicht]* Also, wenn ich hier 1845 rausbekomme, dann kann ja irgendetwas nicht stimmen. Also muss ich jetzt noch einmal überlegen, wie mache ich das jetzt. Da stimmt ja irgendetwas nicht.
Ich muss ja überlegen beim schriftlichen Multiplizieren, dass ich mit verschiedenen Stellenwerten malnehme. Dass ich anfange, weil es eben so gesagt worden ist, ich meine übrigens, die in Griechenland fangen immer hinten an, ich weiß es jetzt nicht genau, müsste man mal ausprobieren.
Die Wertigkeit der Zahl, mit der ich malnehme, ist ja eine ganz unterschiedliche. Wenn ich etwas mit 600 malnehme, mit 40 oder mit 5 Einern.
Daraus ergibt sich ja, dass die nicht so untereinander stehen können. Das also dieses Einer sind von denen, die mit Hundertern malgenommen worden sind, wohingegen das Einer sind, die mit Zehnern malgenommen worden sind. Dass das ja nicht geht. Und dass das eben deswegen rücken muss, weil diese Sachen eben hier vorne wieder ihren richtigen Stellenwert einnehmen.
Sag' ich jetzt einfach mal so.
Also, ich würde damit anfangen zu sagen: „Da kann irgendetwas nicht stimmen.“ Du hast hier Einer unter Einer geschrieben von, sagen wir mal, ganz verschiedenen Faktoren, die ja nicht gleichwertig sind. Sondern ich habe diese Zahl ja mit 600 malgenommen. Und die gleiche Zahl mit 40 und die gleiche Zahl mit 5. Und aus diesem Grunde kann ich nicht diese Einer, die hier erscheinen, oder dieses Ergebnis, was hier erscheint, mit dem gleich setzen. Sondern dadurch, dass das hier nach vorne rückt und eben auch noch das Schöne hat, was für Kinder ja auch ganz wichtig ist,

dass ich das, was ich zuerst malgenommen habe, eben auch als erste Zahl hier hinschreibe, um eben zu zeigen: dieses ist das mit der 600. Und dieses ist die erste Stelle mit 40 und das die mit 5.

Frage 3

(Liest sich die Aufgabe noch einmal durch - murmelt)

Jetzt muss ich in meinen Gedanken überhaupt erst einmal sortieren, ob das, was sie da gesagt hat, überhaupt stimmt.
(murmelt:) Also, Fläche ist das mal das. Umfang ist zweimal das plus zweimal dem. Eigentlich ist es ja logisch, das, wenn der Umfang größer wird, sich das daraus ergibt, dass die Strecken, die den geschlossenen Körper, sagen wir mal: umfassen, einfach größer sein müssen. Und wenn die Strecken größer werden, dann wird ja auch die Fläche größer.

Und wie würden Sie der Schülerin in dem Moment antworten?

Dann würde ich sagen: Das finde ich richtig super, dass du dir darüber Gedanken gemacht hast. Und wir könnten das jetzt mal an dem ausprobieren, was du gesagt hast. Und wir könnten es auch mal an anderen Figuren ausprobieren.
Und dann könnten wir welche aufzeichnen. Wenn wir darüber gesprochen haben, wie man Umfang und Fläche ausrechnet. Hier ist die Fläche ja sogar doppelt so groß, obwohl der Umfang nicht in dem Maße wächst.
Aber ich würde es mit den Kindern dann an anderen verschiedenen Flächen ausprobieren.
Aber würde zuerst mal zu ihr und zu den anderen Kindern sagen: Mensch, hier ist jemandem etwas aufgefallen und das finde ich gut, und die hat hier auch noch etwas dazu aufgezeichnet. Nicht nur einfach sagt sie, dass das so ist, sondern wir probieren das jetzt mal aus.
Und wenn das stimmt, dann finden wir das nun besonders toll.

6.30 *Protokoll 30 H*

Alter der Lehrkraft: *41 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *11 Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Tja, das ist nun gerade auch'n Thema, wo ich jedesmal, auch in jedem Durchgang, wieder selber überlege, wie ich den Kindern das am besten deutlich mache, wie sie da rangehen müssen, und ich finde gerade das sehr schwierig, es irgendwie zu vergegenständlichen, das schriftliche Subtrahieren. Ich fand es also früher – ich hab' selber also noch so gerechnet mit borgen – fand ich's einfacher zu erklären. Und da konnte man eben dann einwechseln, und an solchen Dingen das besser erklären. Ich finde also die Methode, die wir unterrichten, eigentlich schwieriger, den Kindern irgendwie deutlich zu machen.

Also, wichtig ist natürlich erst mal, dass sie nebeneinander rechnen können, dass sie es im Kopf rechnen können, erst die Zehner, dann die Einer – also was man vorher geübt hat – dass sie sich darüber klar sind: „Kann ich die Aufgabe überhaupt rechnen, ist die erste Zahl größer als die zweite?" Und dann ist eben auch wichtig, dass sie wissen: Die Umkehraufgabe hat zu tun mit der Minusaufgabe – also, es gibt immer eine Umkehraufgabe dazu, die ich auch rechnen kann zum Überprüfen und die ich dann eben hier benutze, um die Lösung zu finden. Das, denk ich, ist das Wichtige – also das Rechnen mit Lücken, Umkehraufgaben, das müsste also vorher verstanden werden, aber ich muss sagen – jetzt auch auf das Thema allgemein bezogen – im Laufe meines Unterrichts oder meiner Unterrichtszeit, also meiner Lehrertätigkeit, gehe ich mehr zu dem prozessorientierten Lernen über, gerade im Hinblick auf schwache Rechner. Die, finde ich immer, wenn sie selber überlegen müssen, oder wenn man versucht: „Denkst mal auf `ne andere Weise, versuch mal irgendwie, selber eine Lösung zu finden", die oft mehr irritiert werden, find ich, durch solche Versuche, als dass es ihnen für's Verständnis hilft. Denen gebe ich eigentlich dann vor: „So machst du's!", in der Hoffnung, dass sie's, wenn sie's dreißig mal gemacht haben, irgendwann kapieren, warum es so ist. Also das hab ich... das ist ´ne Erfahrung eigentlich, die ich gemacht habe, dass man manchen Kindern eben einfach sagt: „So gehst du vor und wir üben einfach so dieses Rezept ein!"

Wie funktioniert der Prozess, den Sie vermitteln?

Ergänzen. Also von 9 bis 11, ich schreib die Eins unten hin, zähl sie dazu, letztlich ohne dass ich dann nochmal klar mache, warum jetzt die Eins nach oben kommt und woher ich eigentlich den Zehner von der Elf bekomme – bei den Schwächeren.

Sie sagten vorhin, früher hätten Sie's mit dem Borgen-Verfahren unterrichtet?

Nein, ich selber gar nicht, ich selber hab's so gelernt als Kind und rechne für mich selber auch immer noch mit dem Borgen.

Wie machen Sie das, wenn Sie dann so rechnen, mit dem Borgen-Verfahren?

Es kommt ein Punkt dran. Ich borge einen Zehner – so hab ich das als Schüler selber gerechnet, nicht? Also, ich rechne wirklich minus – ich rechne nicht die Umkehraufgabe auf plus, sondern ich rechne wirklich minus. Ich sage jetzt, eins minus neun geht nicht, also borge ich mir einen Zehner, da mach ich einen Punkt hin, und dann hab ich elf, und dann rechne ich elf minus neun, schreibe unten zwei hin, und dieser Punkt bedeutet, ich muss von der Neun diesen einen Zehner jetzt weg nehmen. Ich hab also oben nur noch acht und rechne acht minus sieben. Und das konnte man, finde ich, den Kindern viel besser vermitteln, weil man einfach auch – man konnte mit Geld rechnen zum Beispiel. Man konnte wirklich sagen: So, hier hab ich jetzt neun, ich muss jetzt einen Zehner umwechseln in Markstücke. Da konnte man den Kindern das wirklich anschaulicher machen. Bei der anderen Methode find ich das sehr schwer jetzt irgendwie... Ich nehme oft Geld zur Hilfe! Dass man dann irgendwie sagt: „Wechsel es um“ oder „Leg' dir das hin“, das, find ich, ist bei dieser Methode sehr viel schwieriger. So konnte ich wirklich: „Ich hab hier 91 DM, so in Rechengeld, und ich nehme davon 79 weg. Und man konnte das wirklich mit den Schwächeren dann durchziehen, dass man sagt: „So, den einen Zehner, den tausche ich jetzt um, zehn Markstücke“ und dann ist es irgendwo einsichtiger gewesen, denn das ist hier, finde ich, bei dieser Methode nicht so gut.

Und wenn Sie nun doch in die Verlegenheit kämen, bei dieser Methode zu erklären, wie Sie vorgehen? Wenn nun ein superschlauer Schüler...

Das überleg' ich mir jedesmal wieder, wie ich das mache. Ich hab auch jedesmal irgendwie eine Methode, die ich dann irgendwie logisch fand; ich weiß das im Moment ehrlich gesagt nicht, wie wir es gemacht haben. Aber über die Umkehraufgabe. Ich weiß es ehrlich gesagt jetzt im Moment nicht, was ich da beim letzten Mal gemacht habe. Ich gucke mir dann auch die Rechenbücher an und gucke, wie es da vermittelt wird, was da erklärt wird, und suche mir dann eigentlich das raus, was ich meine, was dann für diese Klasse am Sinnvollsten ist.

Welches Rechenbuch benutzen Sie?

Westermann, *Denken und Rechnen*.

Ah ja. Und, mal abgesehen von dem Weg, da passiert ja eine Menge in der Aufgabe mit dem Übertrag. Auf einmal erscheint irgendwo eine Eins. Und wo erscheint die bei Ihnen, wenn Sie nach dem Ergänzungsverfahren rechnen, wo notieren Sie die dann?

Unten auf dem Strich. Die Eins kommt dann hier unten und wird dann zu der Sieben gezählt.

Und jetzt speziell, diese eine Eins, die da unten hin kommt: Wenn da ein Schüler nach fragen würde, und sagen würde: „Die Eins da unten, warum nicht bei der Neun oder bei der Neun oben?

Es ist schwierig im Moment! Ich überlege nämlich gerade, wie ich das vermittelt habe. Ich habe also vorher mir überlegt, wie ich das erkläre – ich komm' jetzt im Moment nicht drauf! Wie hab' ich das eigentlich gemacht, dass das dann logisch erscheint, dass die da unten hinkommt? Ich hab' da also irgendwie eine Methode gefunden, aber ich kann jetzt im Moment... Ich weiß, dass ich mich jedesmal bei dieser Sache damit beschäftige: „Wie kann ich das veranschaulichen, wie kann ich erklären, dass das logisch ist?“ Aber ehrlich gesagt, weiß ich jetzt nicht mal, wie ich das gemacht habe. Sicherlich irgendwie über die andere Methode nebeneinander und über das Ergänzen. Ich glaube, dass wir es immer so gemacht haben: Die Umkehraufgabe eben 79, wie viel fehlen bis 91, und ich rechne dann: Wie viele fehlen, ah, Moment mal, bis 80 und dann bis 81, und dann bin ich eben bei 80, d.h. hier kommt einer dazu. Also, ich denke, so rum. Denn wir rechnen in der ersten Klasse und in der zweiten Klasse immer erst mal bis zum Zehner diesen Schritt und dann: Was kommt dazu? Also wenn ich rechne: von 8 bis 12, wieviel fehlen von 8 bis 10 und dann bis 12. Und das versuch ich also hier dann auch zu vermitteln: 1 bis 80, 1 bis 81 und dann bin ich hier schon bei den Achtzigern – ich denke, dass ich's so gemacht habe. Aber ich glaube, ich hab einmal auch was Schlüssigeres gehabt. Aber das erinnere ich, ehrlich gesagt, jetzt nicht.

Wir können ja erst mal die anderen beiden Situation durchsprechen und vielleicht fällt Ihnen das zum Schluss wieder ein.

Ich weiß, dass es immer für mich ein Problem war, das deutlich zu machen, und das logisch zu erklären. Und dass ich jedesmal vorher überlege: „Wie mach ich's?“, und dass ich's nicht immer gleich mache. Das weiß ich also. Und ich weiß, dass ich das mit dieser Borge-Methode einfach sinnvoller finde zu vermitteln. Nur wir sind eben so gehalten, es anders zu rechnen, und dann kann ich das andersrum nicht erklären.

Frage 2

Ja, da muss man dann nochmal erklären, das mit Hunderten, Zehnern, Einern gerechnet wird; also mit den Stufenzahlen das nochmal verdeutlichen. Also, Hunderterzahlen, Zehnerzahlen, Einerzahlen, dass man also weiß, dass sind hier die Hunderter und also... Ich lass auch immer noch die beiden Nullen dahinter schreiben. Und hier die Zehnernull auch dahinter; dass man da einfach nochmal deutlich macht: „Ich rechne ja nicht mit sechs, sondern ich rechne mit 600.“ Das ist eigentlich nur das Problem dabei.

Frage 3

Das weiß ich jetzt, ehrlich gesagt, nicht. *[Schweigen]*. Da müsst ich selber erst mal überlegen, denn die Theorie stimmt meiner Ansicht nach nicht... Oder? *[Schweigen]* Die stimmt nicht, die Theorie. Also, da müsst ich mich selber erst mal informieren. Keine Ahnung... Ja, man müsste ihr zeigen, einen Gegenbeweis, dass die Theorie nicht stimmt, denk ich... Ja, denk ich mal. Das man also ein Beispiel jetzt bringt, sagen wir jetzt mal, 1 cm und 15 cm, da ist der Umfang jetzt natürlich größer und die Fläche ist kleiner. Das man da einfach deutlich macht, dass das so einfach nicht ist. Aber ehrlich gesagt, musste ich da auch mal selber nachdenken, ob das stimmt, die Theorie, oder nicht.

6.31 *Protokoll 31 H*

Alter der Lehrkraft: *47 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *22 Jahre*

Schulbuch: *Das Zahlenbuch*

“Bin ich aber nicht immer so ganz hundertprozentig mit einverstanden. Ich würde lieber zwischendurch mal ein anderes Buch nehmen. Und ich arbeite ganz wenig mit Buch. Ich brauche sehr viele Arbeitsblätter oder hole mir aus verschiedenen Büchern Kopien heraus.

Also, Sie stellen die Arbeitsmaterialien selbst her?

Ja, so ungefähr. Also ich gehe nicht Buchseite für Buchseite vor. Wir haben das Zahlenbuch allgemein angeschafft, jetzt sind aber schon einige aus unserer Schule auf dem Wege, dass sie etwas anderes möchten.

Was gefällt Ihnen nicht am Zahlenbuch?

Ja, besonders jetzt in den vierten Klassen, diese schriftlichen Rechenverfahren, da ist mir einfach zu wenig Übung drin. Weil wir eben, weil die Bücher so teuer sind und von der Schule angeschafft werden, dürfen wir nicht `reinschreiben. Wir dürfen in diese Übungshefte `reinschreiben. Und in diesen Übungsheften ist schlichtweg zu wenig drin.

Und wenn ich solche Sachen hier, wie schriftliche Subtraktion, dann brauche ich nicht nur 5 oder 6 Aufgaben, sondern ich brauche viel mehr. Und dann kann ich auch an die Tafel schreiben, da brauche ich nicht das Übungsheft.“

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Also, erstmal würde ich diese Aufgaben nicht der Reihenfolge nach bearbeiten.

Das sind nur Beispiele.

Das ist egal, ne? Denn hier ist ja gar kein Übertrag möglich.

Wie meinen Sie?

Ach so, Minus, ach ja... Entschuldigung, ich war bei Plus eben...

Also, wie ich das jetzt gemacht habe in meiner damaligen vierten, äh dritten Klasse.

Z.B., ja.

Ich bin über das Halbschriftliche gegangen.
Also, ihnen noch einmal ins Gedächtnis zurückgerufen: Wie haben wir es da gemacht. Wir wollen es jetzt anders aufschreiben. Hab' dann gesagt: Wie haben wir das gemacht?
Also, ich bin davon ausgegangen, dass dieser Zehnerübertrag, also auch beim Halbschriftlichen kam der ja schon irgendwo vor. Ich habe da sehr viel mit farbiger Kreide und vielen verschiedenen Sachen gearbeitet. An der Tafel. Und hab' dann gesagt: Wir wissen, viele Wege führen nach Rom, wie würdest du das machen?
So bin ich mit ihnen an diese Aufgabe herangegangen und hab dann also ... und das Schwierige ist ja, ob man das Borge-Verfahren oder dieses Ergänzungs-Verfahren macht. Und da ich von der ersten Klasse an immer ergänzt habe, bin ich auch über das Ergänzungs-Verfahren an diese Aufgaben herangegangen. Und hab dann gesagt, hier, 7, die haben wir immer ergänzt, 27 bis 45. Und haben dann gesagt, wenn wir jetzt die 7 haben, bis 5, das geht ja gar nicht. Was machen wir denn da?
Ich kann das gar nicht mehr so richtig nachvollziehen, das war letzten Sommer, das ist natürlich schon lange her.
Und dann sind die Kinder irgendwie darauf gekommen: Wir müssen uns irgendwie ... äh ... das ist ja ... bis zum nächsten ... wir können bis zum nächsten Zehner ... über den nächsten Zehner herüber ergänzen. Wir gehen erstmal von 7 bis 10, dann noch weiter bis 15. Ja aber 15 ... wo kriegst du die 1 her? Und so sind wir dann dahin gekommen, dass wir uns die hinschreiben müssen.
Und damit das auch wieder gleich bleibt, dass man nicht einfach etwas wegnehmen kann, und dann ist es eben da, haben wir gesagt, da müssen wir das unten wieder zupacken, sonst stimmt das ja nicht mehr, die Differenz.

Moment, das müssen Sie mir noch mal erklären, das habe ich noch nicht ganz verstanden: Warum müssen Sie das unten hinpacken? Weil Sie's oben – wie haben Sie das gesagt?

Wir haben oben etwas weggenommen, und wir müssen es unten hinpacken, denn wir streichen ja die 4 nicht durch. Und schreiben dafür `ne drei hin.
Von daher müssen wir wegen der – na, wie heißt das noch gleich – wegen der ... mir fällt das Wort nicht ein ... Also, es muss die gleiche Differenz bleiben. Es darf sich da nichts verändern. Es war nicht gleichsinniges Ergänzen.

Das haben die eigentlich ganz schnell geblickt. Und ich war noch ganz erstaunt, wie schnell die die schriftliche Subtraktion mit Übertrag verstanden hatten. Das war so Problemlos.

Damit ich das richtig verstehe: Wenn Sie ergänzen, also oben einen Zehner mit dazulegen und unten noch einen Zehner mit dazulegen, dann bräuchten Sie doch keinen Zehner mehr einzutauschen?

Wir haben also, wie gesagt, ich hab auch dann das auseinandergedrieselt. Ich hab dann da die 27 und hier die 45. Und hab dann gesagt:

Die Lehrkraft demonstriert am Hunderterfeld ihre Vorgehensweise. Dabei wird jedoch deutlich, dass sie den Schülerinnen und Schülern kein tieferes Verständnis vermittelt, sondern nur den Algorithmus außerordentlich kompliziert erklärt.
In ihren Ausführungen, die sie mit einer handschriftlichen Skizze illustriert, schildert sie, wie sie bei der schriftlichen Subtraktion im Hunderterfeld rückwärts zählt und dabei den Zehner überschreitet. Dieser müsse dann unten wieder dazugefügt werden...
Anm.: Den Schilderungen der Lehrkraft war nicht logisch zu folgen. Zumal sie bei der „Zehnerüberschreitung“ in ihren Erklärungen zwischen 7 und 5 und 27 und 45 hin und her springt und auf die verschiedenen Wertigkeiten der Stellen überhaupt nicht eingeht.

Also, so habe ich versucht, denen das beizubringen, denn das ist eine ganz schwierige Sache: Wie bringe ich denen bei, dass ich das ergänze oder dass ich mir da vorne einfach einen wegnehmen kann oder da unten, der kleine Übertrag, dass das irgendwie für die in den Kopf kam. Das habe ich irgendwie versucht mit viel reden und die Kinder sollten selbst ausprobieren, selber einen Lösungsweg zu finden. Und ich bin dann auf das, was wir schon gelernt hatten, wie dieses hier, mit dem Ergänzen, mit dem halbschriftlichen, habe ich das versucht mit denen zu erarbeiten.

Frage 2

Ich würde mit ihnen das Zehner-Einmaleins noch einmal durchgehen. Und würde mit ihnen die Stellenwerte durchgehen – dass das nicht die 6 ist, sondern dass das die 600 ist. So habe ich das meinen Kindern nämlich auch erklärt. Ich habe immer gesagt: Du fängst unter der Zahl an zu schreiben, mit der du rechnest. Und dann

hast du hier normal mal 6 genommen, aber eigentlich ist es ja mal 600. Wenn die Kinder dann nach vorne an die Tafel kommen und es vorrechnen, erklären sie es genau und formulieren es ganz klar: das ist die 600.
Ich habe dann auch gesagt: Schreibe die Nullen hin. Wenn du ein geübter Rechner bist, nachher, dann brauchst du das nicht mehr. Dann rückst du von allein ein. Aber damit du nicht in Gefahr kommst, das so zu schreiben, schreiben wir die Nullen hin. Also, der erste Schritt, wie gesagt, wäre das Zehner-Einmaleins und dann die Stellenwerte. Und mit ihnen besprochen: Das ist eben die Hunderterstelle und nicht die Einerstelle.

Frage 3

(Überlegt ca. 10 Sekunden.)

Sie hat das herausgefunden? Wie hat sie das herausgefunden? Einfach durch zeichnen oder durch rechnen?

Vielleicht hat sie Mathematik als Hobby, oder so.

Ist natürlich schön, wenn man so ein Kind im Unterricht hat.
Also, erstmal würde ich sie loben. Dass sie sich zu Hause hinsetzt und dass sie dieses Interesse hat, das finde ich schon mal klasse.
Dann würde ich sagen: Weißt du was, das trägst du jetzt mal anderen Schülern vor. Oder: Lass sie mal herausfinden, was du herausgefunden hast. Hilf ihnen mal bei dieser Sache. Und das also weitergeben. Nicht im Verborgenen bleiben, sondern sie soll sich dann schon selber darstellen.

6.32 *Protokoll 32 H*

Alter der Lehrkraft: *55 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *32 Jahre*

Schulbuch: *Das Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Sie müssen erst einmal merken den Unterschied zwischen zwei verschieden großen Zahlen, die Wertigkeit von Einern und Zehnern und ich würde völlig ohne diese Form erst mal anfangen Minusaufgaben zu rechnen. Nicht untereinander, sondern so wie früher auch nebeneinander. Und das man es leichter machen kann und dann eben überlegen... In Hamburg ist ja vorgesehen, dass man das Ergänzungsverfahren mit „+“ rechnet. Die schwachen Kinder sind damit sehr, sehr leicht überfordert weil sie dann nämlich plus und plus nicht unterscheiden. Bei den Plusaufgaben und bei den Minusaufgaben. Und deshalb hab’ ich mir erlaubt, den Kindern die Möglichkeit zu geben – was mathematisch nicht ganz korrekt ist – „bis“ zu rechnen. Sie ergänzen also und sagen 7 bis 5 ... können wir nicht rechnen. Wir müssen uns einen Zehner dazunehmen, dann haben wir 7 bis 15 und wenn wir oben einen Zehner dazugetan haben, dann müssen wir ihn unten auch dazutun. Und die schwächeren Kinder in meiner Klasse rechnen „bis“... Das ist nicht ganz korrekt, das weiß ich.

Und die stärkeren Kinder in ihrer Klasse?

Die können das mit plus rechnen, aber die haben sich das auch leichter gemacht und rechnen das jetzt auch so.

Und wie wäre dann die Sprechweise, wenn sie das mit plus rechnen?

Dann sagen sie: 7 plus wie viel sind 5 ... das geht nicht. Dann rechne ich 7 plus wie viel sind 15.

Sie sagten zuerst von einfachen Subtraktionsaufgaben, so wie man sie normal rechnen würde und dann würde Sie zeigen, wie es einfacher geht?

Ja, also, einfacher geht ist nicht ganz richtig, sondern das viele Menschen ... also dass häufig die Zahlen untereinander geschrieben werden. Sie (die Schüler) kennen das ja vom Plusverfahren. Und das man das eben auch beim Minusverfahren so machen kann. Nur das da eben Probleme auftauchen, sobald die obere Zahl kleiner ist als die untere. Also, die einfachen Stellenwerte meine ich damit.

Und sie sagten, sie kennen das vom Plusverfahren, was müsste dann außerdem noch ...

Die Kinder kennen das Untereinanderrechnen vom Plus-Verfahren und daher kennen sie auch den Umgang mit Merkzahlen. Sie kennen ja, also wenn sie jetzt rechnen würden 7 plus 5, dann würden sie sagen, das sind 12, das sind ein Z und zwei E, die zwei E schreibe ich in die Einerspalte und den einen Zehner schreibe ich in die Zehnerspalte, weil ich mir den ja, der kommt dann da dazu. Also ganz wichtig ist für alle Kinder, dass sie sicher sind im Umgang mit den Stellenwerten.

Ja, hm, und was gehört noch zur Vorraussetzung, dass sie solche Aufgaben rechnen können? Also, was müssten sie noch können außer das Verfahren der schriftlichen Addition?

Das Ergänzungsverfahren müssen sie kennen. Ich ergänze, nach oben hin. Also dass man weiß, z.B. wenn man weiß, aha, diese Größe. Und er wächst soundso viel noch – an solchen Sachen macht man das auch klar – dann weiß man, in der Zeit ist er so viel gewachsen. Man ergänzt also von dem Zeitpunkt früher zum jetzigen Zeitpunkt. Einfach, dass sie merken: Aha, ich muss etwas ergänzen. Und nicht einfach nur so `ne simple Minusaufgabe rechnen.

Und wenn Sie so an die gesamten drei Jahre, die davor liegen, denken. Sie bauen ja die Mathematik systematisch auf. Was müsste dann noch alles davor liegen, dass sie tiefer gehen können, dass Sie damit überhaupt beginnen können.

Ja, sie müssen wissen die Bedeutung von E, Z, H. Das ist ganz wichtig. Das muss ihnen wirklich in Fleisch und Blut übergegangen sein. Und das eben zehn E ein Z sind. Und zehn Z ein H.

Sie sagten vorhin, Sie würde oben einen Zehner „erhalten“, also dazuschreiben und unten in die Zehnerspalte schreiben und oben ja auch bei den Einern. Wie erklären Sie so eine Situation im Unterricht?

Tja, also da haben wir verschiedene .... Also, das ist jetzt schon ein bisschen länger her, deswegen hab' ich das nicht so präsent.

Sie können gerne Ihr Mathebuch holen, wenn Sie wollen.

Also, das ist jetzt ganz oben ... das wäre ja auch das Mathebuch für das dritte Schuljahr, das hätten Sie mir schon vorher sagen müssen .... Das ist das Mathebuch für das dritte Schuljahr, da wird das geübt, indem man immer wieder Minusaufgaben rechnet und auf ... ja ... einfach auf die Differenz hinweist, die wichtig ist für den Unterschied zwischen zwei Zahlen. Also bei Minus rechnet man eben den Unterschied zwischen zwei verschieden großen Zahlen aus. Tja, und das mit dem oben und unten, das was man oben macht muss man auch unten tun, das hat man ja ... das ist im Grunde ein ganz schwieriger Punkt, das weiß ich wohl. Hach *(seufzt)* ... ich hab den Kindern gesagt, ihr habt jetzt nicht von 7 bis 5 gerechnet, sondern von 7 bis 15. Ihr habt euch also einen Zehner dazugeholt. Und den Zehner habt ihr oben dazugetan. Und wenn ihr oben etwas dazutut, dann müsst ihr das unten auch. Und wenn wir diese Aufgaben zunächst rechnen, dann haben wir sie so gerechnet, meinetwegen: 25 – 19, 35 – 29, 45 – 39, wir haben immer praktisch die Differenz gleich gehalten dadurch, dass wir oben und unten die gleiche Zahl dazugetan haben. Das hat den Kindern klar gemacht: Aha, um die gleiche Differenz hinzukriegen müssen wir das, was wir oben machen auch unten tun.

Die Lehrkraft ist insgesamt ungehalten darüber, dass sie sich nicht auf das Gespräch vorbereiten konnte. Sie sieht das folgende Frageblatt und reagiert empfindlich, sie habe diesen Stoff vor 4 Jahren das letzte Mal behandelt. In der vierten Klasse, in der sie unterrichtet, sei das bis jetzt noch nicht dran gewesen. Außerdem stünde in dem von ihr verwendeten Mathebuch eine ganz genaue Anweisung, wie ein bestimmter Inhalt zu unterrichten sei.

Frage 2

Also, ich würde die Kinder darauf hinweisen, dass ich zuerst mit den 600tern malnehme. Dass ich sage, ich nehme jetzt mit Hundertern mal und wenn ich mit H malnehme, kann ich, äh, um das den Kindern zunächst klarzumachen, an die beiden Leerstellen Nullen schreiben. Und dann mit den 600tern malnehmen. Dann sage ich: Die nächste Zahl, mit der ich malnehme ist ein Z, das sind 4 Z, bei dem Zehner kommt immer eine Null hin. Die Kinder wissen ja: Jede Zahl, die ich mit 10 malnehme, bekommt eine Null, die ich mit 100 malnehme zwei Nullen und dann kann ich es auch versetzt hinschreiben, genauso mit den Einern. Ich würde das die Kinder mehrere Male so schreiben lassen. Ganz genau darauf achten, dass eben auch genau auf den Stellenwert geachtet wird. Und nicht einfach nur eine Zahl gewählt wird zum Malnehmen.

Und wenn jetzt so einer – Sie kennen ja das Problem – da ist jetzt so einer dabei, der schreibt das dann immer noch untereinander.

Ja, dann würde ich sagen, wir nehmen jetzt einfach mal Aufgaben, äh, verschiedene Zahlen, dreistellige Zahlen, die nehmen wir nur mit Hundert mal. Daraus wird dann immer eine fünfstellige Zahl. Dann nehmen wir die gleichen Zahlen, die werden dann nur mit 10 malgenommen. Und wir merken, dass dann eine vierstellige Zahl daraus wird. U.s.w. So würde ich versuchen, ihnen das klarzumachen. Und die Kinder wissen ja im Grunde vom ersten Schuljahr auch, dass einer unter E gehören und Z unter Z, also das ist eine ganz wichtige Geschichte. Das man immer darauf achtet, genau in die Kästchen zu schreiben. Sodass jede Zahl, jede Ziffer ein Kästchen für sich bekommt.
Einfach, dass die Kinder merken, dass sich ein veränderter Stellenwert ergibt, wenn ich mit einer zweistelligen oder dreistelligen Zahl malnehme.

An welchen Voraussetzungen könnte es vielleicht noch mangeln, wenn Schüler mit solchen Aufgaben nicht umgehen können?

Vielleicht sind die Schüler mit Stellenwerten einfach nicht genug umgegangen. Das man z.B. mit Stellenwerttabellen nicht gearbeitet hat. Es gibt ja Tabellen, da legt man ein Plättchen auf den Hunderter u.s.w. und plötzlich verschiebt man den in eine andere Spalte und man merkt: Jetzt hat er einen völlig anderen Wert. Und das man solche Sachen noch einmal mit den Kindern übt. Vielleicht haben sie einfach nicht verstanden, dass eine Ziffer – eine Zahl, deren Wert verändert wird, je nachdem, wo sie steht. Da müsste man bei einigen Kindern vielleicht noch mal ansetzen.

Und alternative Wege, so etwas zu erklären?

Man kann den Kindern Stellenwerttabellen geben, die leer sind, mit T, H, Z, E, dass man ihnen Plättchen gibt und man Zahlen legen lässt, indem man meinetwegen drei

Plättchen auf den Hunderter, zwei Plättchen auf den T, ein Plättchen auf den Zehner, ein Plättchen auf E. Dann lässt man sie einfach hantieren und sagt ihnen: So, wir verschieben jetzt ein Plättchen, was entsteht dadurch. Das sie sich einfach noch einmal mit der Wertigkeit der einzelnen Zahlen auseinandersetzen. Ist allerdings auch für einige Kinder wieder sehr schwer. Aber dadurch kommen sie zumindest noch mal zum Nachdenken.

Frage 3

Wiederholt noch einmal den Kernsatz der von der Schülerin aufgestellten Regel:

Das mit zunehmenden Umfang die Fläche größer wird... Und sie hat dieses Bild gemacht...

Ja.

Also, welche Theorie hat sie denn?

Also sie sagt, dass der Umfang einer geschlossenen Figur größer ist als ....

„Das ist doch wunderbar!", sag ich dann. „Das ist sehr schön, das müssen wir an verschiedenen Figuren noch einmal ausprobieren!" Und das könnten dann mal alle probieren. Ich würde ihnen dann kariertes Papier geben und würde sagen: „Was der und der herausgefunden hat, ist ja hochinteressant. Dem gehen wir mal nach. Und dann messen wir immer schön aus, den Umfang, und an den Karos kann man dann ja immer auch sehr gut erkennen, dass sich die Fläche vergrößert hat. Man kann es anhand von Kacheln oder ähnlichem den Kindern ja zeigen. Können sie sogar auszählen.

Vielen Dank für das Gespräch...

Ja, da waren noch einige Lücken, die fallen mir bestimmt auch bald wieder ein.

Also, wenn sie noch gern etwas hinzufügen möchten...

Nein, möchte ich jetzt nicht. Aber besonders bei den ersten (schriftliche Subtraktion) ist bestimmt noch `ne Lücke. Also, das ist für mich im Unterricht im Grunde genommen auch immer ein schwacher Punkt. Weil es ganz schwierig ist, gerade für die lernschwachen Schüler, das rüberzubringen. Und ich bin auch nicht glücklich über meine Lösung mit „bis", aber ich weiß, dass das andere Kollegen genauso machen. Man hat mir auch auf Fortbildungen immer gesagt, dass das äußerst problematisch ist, wenn man „7 bis 5 – geht nicht" sagt, denn 5 bis 7 geht ja. Also, es ist mathematisch nicht korrekt.

Aber man kann doch genauso „5 plus wie viel sind 7" rechnen...

Ja, aber wir haben die Bedingung, immer von unten zu rechnen...

Dann würde ja auch bis gehen.

Ja, natürlich, aber, trotzdem, es ist, also im Grunde der Unterschied bei „bis" ja mehr als bei „plus". Also das ist schon problematisch, diese „bis-Geschichte", aber na ja...

Ist Ihnen das schon mal passiert, das Schüler sagen: „Mensch, also das mit dem Ergänzen, das kriegen wir überhaupt nicht gebacken!"? Hätten Sie da noch Alternativen, dass Sie dann sagen könnten: „Na, wir nehmen uns noch mal eine Förderstunde Zeit..."

Ja, das habe ich gemacht, ich habe Förderstunden genommen, um ihnen das noch mal so zu verklickern, weil ich da keine andere Möglichkeit gesehen habe. Ich habe dann in den Förderstunden ja die Alternative mit meinem „bis" genommen.
Ich hab den Kindern ganz klar gesagt: „An sich müssen wir „plus" rechnen."
Aber, wenn mehrere Plus- und Minusaufgaben hintereinander gerechnet werden müssen, dann können die Kinder nicht umstellen auf das „andere" plus, dass das plus in diesem Fall ergänzen heißt. Und deshalb ist die Formulierung „bis" doch eine Hilfe.

6.33 *Protokoll 33 H*

Alter der Lehrkraft: *53 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *27 Jahre*

Schulbuch: *Mathebaum*

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Also, mit Sicherheit müssen die Kinder Ergänzungsverfahren beherrschen, sie müssen – jetzt also mal ganz bei Null angefangen, zweistellige Zahlen lesen können, verstehen können und größenmäßig auch einsortieren können.
Die Frage ist jetzt: Sie haben noch nie dieses Verfahren gekannt? Sind die Schüler das erste mal mit diesem Verfahren konfrontiert? Oder beherrschen sie den Weg dorthin?
Also, wenn ich Aufgaben so anbiete, dann gehe ich davon aus, dass ich bereits erklärt habe, warum man sie untereinander schreibt und dass jetzt auch die größeren Zahlen unten stehen können, sodass die Schüler wissen, wenn sie von sieben auf 5 ergänzen, dass sie dann auf 15 gehen müssen. Also, das wäre eine Voraussetzung, sonst würde ich diese Aufgaben nie anbieten.

Wenn Sie sagen: Von sieben bis 15 – da passiert ja etwas in der Aufgabe. Wie würden Sie das erklären?

Dass ich so etwas vorher schrittweise eingeführt habe, dass ich 45 – 27 dann in eine Rechentabelle einfüge und dann wir die 27 in 17 plus 10 umwandeln. Also, sodass, wenn man jetzt jeweils 10 Kreise für diese Zahl (...) also dass man den Zehner von 27 umwandelt in zehn Einer. Sodass ich hier 17 Einer bekomme.

Das verstehe ich nicht. Ich versuche das nachzuvollziehen. Also: Sie wandeln von den zwei Zehnern hier unten einen Zehner um in zehn Einer.

Also, ich merke, wenn ich dieses Ergänzungsverfahren mache, von 7 bis 5 ich nicht rechnen kann. Also muss ich aus dieser Zahl, aus 27, diese muss verändert werden. Hier hatte ich vorher 2Z 7E, ich kann die genauso gut in einen Zehner und 17 E um....
Jetzt bin ich aber wirklich etwas durcheinander. Es geht um 45 natürlich! *(seufzt)*
Also, von 7 bis 5 geht nicht. Also, ich muss natürlich die 45 umwandeln. Drei Zehner bleiben da und 15 Einer. So.

Ach so, ja, dann ist es klar.

O.K. Und dann kann ich nämlich von 7E auf 15E ergänzen und bekomme 8E. Bei den Zehnern habe ich dann aber nur noch 3. Also, von 3 bis 4 rechne ich letzten Endes, aber hier kann ich auch von 2 bis 3 rechnen.
Also, ich muss irgendetwas zum Verständnis der Schüler tun, vorher, damit sie überhaupt verstehen, dass mit der 5 zu rechnen ist. Mit 5E. Also muss ich die Z in einzelne E umwandeln. Und dann, wenn man dieses Verfahren dann verstanden hat, dann kann man eben auch die schriftliche Subtraktion mit dem Ergänzungsverfahren so festigen, dass man von 7 bis 15 rechnet und dann schreiben sie die kleine 1 unten hin.
Parallel dazu mache ich natürlich so Aufgaben wie 45 – 27 ist genauso viel wie 55 – 37 oder 65 – 47. Also, dass die Differenz immer dieselbe bleibt, wenn ich denn bei jeder Zahl einen Zehner oder Einer oder mehrere Zehner dazutue. Sodass das Ergebnis äquivalent bleibt. Solche Übungen schiebe ich dann zwischendurch immer wieder ein, wo es immer dasselbe Ergebnis bleibt, wenn ich bei Subtrahend und Subtra... also bei beiden immer das gleiche dazutue oder wegnehme. Also, dieses Verständnis muss da sein.

Frage 2

Also da würde ich – ganz klar – die zweite Zahl zerlegen lassen. Von den Schülern. In 600 + 40 + 5. Und erst mal die Teile ausrechnen. Also mal 600 mal 40 mal 5. Und dann über das Stellenwertsystem sprechen. Und im Prinzip könnten wir hier ja auch zwei Nullen dahinter bringen, hinter die 738, weil es die Hunderter sind an der Stelle. Hier sind es die Zehner, muss ich also noch eine Null dranhängen, und hier sind es die Einer, da brauch ich keine. Und so würde ich dieses Problem bewältigen können.

Frage 3

(Überlegt ca. 15 Sek., liest sich die Aufgabe noch einmal leise durch)

Naja im Grunde genommen, die Multiplikationsaufgabe, die dahinter steht, ist 4 mal 4 und hier ist es 4 mal 8. Das ist eigentlich logisch, das einmal die Fläche größer wird und auch gleichzeitig wenn ich 8 cm in der Länge habe, ist es eine größere Zahl als 4 oder als diese vier, insofern muss der Umfang natürlich auch größer sein.

Trotzdem finde ich es toll. Also, ich würde die Schülerin erst mal bestärken und sagen: „Wunderbar, was du herausgefunden hast.“ Sicher würde ich mit ihr zusammen einige Aufgaben daraus entwickeln, z.B. wie man es an anderen Stellen weiter beweisen könnte.

6.34 *Protokoll 34 H*

Alter der Lehrkraft: *41 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *13 Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen*

Fakultas Mathematik: *nein*

Das Interview wurde nicht mit dem Tonband geführt. Die Lehrkraft hat den Interview-Text im Anschluss an das Gespräch gelesen und bestätigte dessen Vollständigkeit.

Frage 1

Voraussetzung: Einfache Subtraktionsaufgaben (schriftlich) ohne Übertrag. Dann von der Tabelle aus (Stellenwerttabelle) wegnehmen, also Hunderter von Hundertern, Zehner von Zehnern u.s.w.

Die Schüler sollten „ganz normal" rechnen können, sollten mit Aufgaben anfangen, die sie auf normalem Weg rechnen können, dann wird untereinandergeschrieben und dann das gleiche gemacht, also Zehner von Zehnern u.s.w.

Und dann kommt der Punkt, wo es nicht mehr klappt. Und dafür ist es wichtig, dass aus vorhergehenden Übungen auch die Sprechweise bekannt ist, also das ich z.B. rechne „von 3 bis 5 ist gleich ... *(Die Lehrkraft hatte als Beispielaufgabe 45 –23 notiert)*

Wenn dann so eine Aufgabe kommt *(deutet auf 45 – 27)* rechnen die Kinder oft von oben nach unten und dann kommt ein falsches Ergebnis heraus. Wir überlegen dann, was zu tun ist und nach einigem Probieren bekommen die Schüler dann heraus, dass es von 7 bis 15 heißen muss.

Einige haben das bestimmt auch schon von älteren mitbekommen.

Wir schreiben den Z dann unten zur 2.

Bei der Hinführung zu dieser Problematik gucke ich dann, was im Mathebuch steht.

(Schlägt das Mathebuch auf ... blättert ...)

Also, das mit den Tabellen haben wir ganz viel gemacht. Einfache Rechenaufgaben im Bereich bis 20 müssen sitzen, Ergänzungsaufgaben sind sehr wichtig, vielmehr noch Voraussetzung!

Frage 2

„Ich würde mit denen die Aufgabe noch einmal durchrechnen. Sie müssen ja mit der 6x3 anfangen und dann unter der 6 anfangen zu schreiben.

Und die erste Aufgabe heißt ja eigentlich 600x123. Und wenn man dann 600x123... dann könnte man ja auch die Nullen da mit hinschreiben – was später weggelassen wird. Genauso auch unten, da heißt es auch 40 x 123.

Nachfrage des Verfassers, ob es noch andere Möglichkeiten des Herangehens gäbe, um den „Fehler" der Schüler zu verbessern.

Also eigentlich kann so ein Fehler nicht passieren, wenn von Anfang an gleich darauf geachtet wird, dass die Schüler die Zahlen stellengerecht untereinander schreiben.

Frage 3

Denkt länger nach ... Ich würde antworten: Da hast Du Recht *.... lange Pause ....* Ich würde Sie sehr loben. Was soll man sonst noch Schlaues sagen?
Es ist ja im Grunde auch nachvollziehbar, wenn man die Figur ausschneidet, kann man sie zweimal in die andere legen.

6.35 *Protokoll 35 H*

Alter der Lehrkraft: *53 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *17 Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also, sie müssen natürlich Kopfrechnen mit Übertrag – also, einfache Aufgaben – müssten sie gemacht haben, meines Erachtens, und auch dieses bis zum Zehner ergänzen bzw. bis zum Zehner zurückgehen und dann weitermachen... Also, im Kopf, das muss also vorher gelaufen sein. Dann mach' ich es eigentlich so, dass ich schriftliche Subtraktion einführe ohne Übertrag, und ihnen sage: „Das andere im Kopf können wir zwar auch, dauert aber länger, es können mehr Fehlerquellen auftreten... Also, im Kopf mein ich jetzt so etwas wie 25 minus 7, rechnen wir 25 minus 5 minus 2. Und auch ruhig mit gemischten Zehnerzahlen machen wir's vorher auch eigentlich noch. Also sagen wir jetzt mal 42 minus 25, das ist ja auch der Übertrag, das versuchen wir schon auch noch im Kopf. Allerdings mit dieser halbschriftlichen Weise, dass man also oben die Aufgabe hinschreibt, einen Strich drunter macht, dann macht 42 minus 20, das ist glaub ich 22, und dann 22 minus 5. Und das schick ich eigentlich voraus... Das heißt, glaube ich, halbschriftliche Subtraktion. Und dann mach' ich das eigentlich schon so verbal, dass ich sage: „Das ist ja gut und schön, aber das ist halt fehlerträchtig, und deswegen gibt's halt diesen tollen Trick, dass man das eben schriftlich untereinander machen kann." Dann sag ich, das mal ich auch richtig an, richtig noch mal dieses Stellenwertsystem, also Einer, Zehner, Hunderter, dass es eben enorm wichtig ist, dass es untereinander steht. Sonst haut es nicht hin.

Ich sprech' jetzt immer vom Trick, richtig, dass ist eben clever, dass man das so schneller und einfacher machen kann. Das mach ich *[unhörbar]* frontal auch, wohl wissend, dass ich damit natürlich nicht alle anspreche. Alle Schüler. Die Schwächeren sagen: „Was redet die denn da?" Und dann eben erst schriftliche Subtraktion ohne Übertrag, und jetzt sind wir bei der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag. Was müssten die Kinder verstehen und tun... Also, das hab ich jetzt alles gemacht, ich weiß nicht, was sie vorher schon können müssten. Das hab ich jetzt eigentlich eben gesagt... So! Und jetzt möchten Sie von mir auch noch wissen, wie ich das jetzt einführe, dieses mit Übertrag? Ach ja, muss ich noch was vorschieben: Es ist ja für die Kinder schwierig, weil wir die ja ergänzen – stimmt, das Wichtigste hab ich noch vergessen, das Ergänzen! Es ist ja minus, aber ich sage ihnen folgenden Sprech-gebrauch, wenn es jetzt ohne Übertrag wäre z.B. 5 bis 7. Und dann sagen sie natürlich: „Wieso, das ist doch minus, was redest du denn da eigentlich?“ Und dann versuche ich ihnen – das versuche ich wirklich nur, wiederum auch nur für die etwas helleren eigentlich – dass ich ihnen erkläre, dass es ja praktisch das gleiche ist, dass ich ihnen zwei Beispielaufgaben gebe und eben sage: „Das ist jetzt...“ Also, z.B. mit Geld, wenn man im Laden ist, gibt 10 Mark hin, muss aber nur 7 Mark bezahlen, da kann ich eben rechnen: 10 minus 7 ist 3, man kann aber auch sagen: „7 hab ich bezahlt, muss ich also noch drei dazugeben, damit das wieder stimmt.“ Das ist diese Ergänzungsgeschichte. Das versuche ich zu erklären, ja? Das stimmt. Ich bin mir da bewusst, dass es nicht bei vielen ankommt. Und dann wäre eben nur der Schritt, dass ich dann eben sage: „Ich kann ja nicht“ – durch die schriftliche Subtraktion ohne Übertrag wissen sie, dass man von unten nach oben rechnen muss, das wissen sie bereits, das ist natürlich auch die Voraussetzung - dann die Stellen direkt untereinander, ist die nächste, und das mit dem Ergänzen, ich versuche das zu erklären, gelingt mir nicht gut, merken Sie jetzt auch an meiner Erklärung, und sage dann eben: „Du musst jetzt eben ergänzen von 5 auf 2, und ich kann nicht ergänzen von 5 auf eine kleinere Zahl.“ Das kann ich nicht. Und das mache ich wirklich auch ganz stramm frontal, wirklich mit leise sein und aufpassen und so weiter, und dann gibt es eben Beispielaufgaben. Und nach meiner Erfahrung ist es eben so, dass die schwächeren Schüler es eben rein automatisieren und ob die mit der größeren Kapazität meine Erklärungen mit dem Ergänzen und dann eben mit dem Übertrag – der fehlt ja auch noch – Ich will nicht so lange – ob sie das dann in dem Moment der Erklärung vielleicht verstehen, aber ich glaube hinterher ist es auch bei denen automatisiert einfach. Ich glaube, die machen sich nicht klar, was da eigentlich passiert, dass es eben ein Ergänzen ist, und dass man eben nicht von der größeren Zahl zur kleineren ergänzen kann, man sich also deswegen - den guten Ausdruck „Borgen“ benutze ich nicht mehr, das ist glaub ich passé, ne? – dass man sich also deswegen von hier unten einen Zehner wegnehmen muss, den da unten dazutun muss... Das mach ich teilweise auch. Dass ich dann hier oben drüber schreibe – ich hab’ ja diese Aufgabe – dass ich hier oben drüber schreibe, in Klammern, also plus zehn, und wenn ich das da hinschreibe, dann muss ich es, damit der Unterschied gleich bleibt, da eben auch hinschreiben. Das ist eigentlich meine Erklärung.

Ach so, sie tun hier oben hin und auch unten, also einmal.

Ja, das ist ja die berühmte kleine 1, ne? Also zu Anfang, nur bei der Erklärung, schreibe ich hier oben tatsächlich plus 10 hin, denn ich muss ja ergänzen von fünf bis 10, und damit der Unterschied zwischen den Zahlen gleich bleibt und ich ja weiß, dass dies die Zehnerstelle ist, muss ich hier die kleine Eins hinschreiben.

Frage 2

Erstmal würd ich die Zahlen umdrehen. Nicht so große Zahlen vorne, kleine Zahlen hinten, aber das betrifft nicht das Problem. Das ist nur so vom Prinzip her... Aber okay.

Ich hab das jetzt in meiner Vierten noch nicht eingeführt, denn wir haben schriftliche Multiplikation mit einem Multiplikator, und demnächst kommt dann eben mit einem zweistelligen und einem dreistelligen.

Und da werde ich das auch folgendermaßen machen, dass ich sie hier zu Anfang zumindest Nullen schreiben lasse. Und dann hier die eine Null, und dann da keine. Und dann ergibt sich das Problem nicht.

So, jetzt ist das hier aber schief gelaufen in der 6. Klasse, und dann würde ich das einfach nochmal aufdröseln. Würde wieder hier die Stellen haben, Einer, Zehner, Hunderter, und dann würd' ich ihnen – ja, das machen sie ja falsch – dann würde ich ihnen klar machen, wir fangen mit der Zahl an, das wissen sie ja auch, haben sie ja hier auch gemacht, *[zählt]*, ja haben sie ja auch gemacht, sie haben ja dieses zunächst damit multipliziert; und dann würd' ich ihnen sagen: „Dies hier bedeutet ja 600!"

Und wenn ich eine Zahl mit... – also bei meinen, das ist jetzt auch drin bei meinen: Wenn ich eine Zahl mit Zehn malnehme, kommt eine Null dran, und wenn ich sie mit zwanzig oder dreißig malnehme entsprechend. Und wenn ich eine Zahl mit Hundert malnehme, kommen zwei Nullen dran.

Also würde ich sie hier zwei Nullen schreiben lassen und dann rutscht das ja automatisch nach vorne, dann würde ich sie hier eine Null schreiben lassen und hier unten keine. Das würd' ich dann auch... Ich hab in der 6. – nee, Englisch hab ich früher dann in der 6. gemacht, Mathe hab ich nie gemacht, hab Mathe immer nur 1 bis 4 gemacht, aber ich denke, das müsste man auch in der sechsten noch machen können, wenn das wirklich ein Fehler ist bei vielen Schülern.

Frage 3

Fläche 16... *[rechnet]*, ... geschlossene Figur... 16... 24... Umfang... Nun ist das eine Aufgabe, die wir in der Grundschule nicht machen. Also, wir rechnen vielleicht den Umfang, aber die Fläche eigentlich nicht, wenn ich das richtig sehe. Geometrie kommt ja immer zu kurz, sagen ja alle Leute, und ich spar mir das eigentlich auch immer für die letzten Wochen des Schuljahres auf, weil es eigentlich auch mehr Spaß macht als das andere Rechnen. Und ich meine nicht, dass wir Flächen berechnen. Nun kann ich mir natürlich trotzdem was überlegen... Also, Umfang schon, ja, aber Flächen? Ich weiß es nicht... Ich glaube nicht, dass ich das mit der vierten Klasse gemacht habe.
Gut, was sag ich der denn? Ich muss das erstmal selber durchdröseln... *[rechnet]* ...dann passt es ja schon nicht mehr... Ja, was würd' ich der denn antworten. Ja, das ist ja irgendwie klar. Das ist ja logisch, wenn ich das größer mache...
Und sie meint nun, sie hat was ausgeknobelt. Ja.
Ja wahrscheinlich würd' ich das sagen: „Das ist ja logisch, dass, wenn ich das größer mache, auch die Fläche größer wird." Nee, mehr wüsste ich dazu nicht zu sagen.

6.36 ***Protokoll 36 H***

Alter der Lehrkraft: *48 Jahre*
Bisher geleistete Dienstjahre: *19 Jahre*
Schulbuch: *Zahlenbuch*
Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Bevor... Zumindest hab ich das so gemacht, und in diesem Lehrbuch, in dem *Zahlenbuch* ist das auch ähnlich vom Verlauf her – bevor Schriftliche Subtraktion stattfindet, wird das Ganze vorbereitet, indem man es nicht untereinander schreibt, sondern nebeneinander und ein Rechenverfahren einübt, das erst mal die Zehner – nein, umgekehrt, nun ist es wieder zu einfach! Es gibt verschiedene Möglichkeiten: Eine Möglichkeit ist, die Zehner erst abzuziehen, also in diesem Beispiel Vierzig minus Zwanzig, und dann nochmal die Fünf wieder zu addieren und die Sieben zu subtrahieren. Eine Möglichkeit! Es gibt noch weitere Möglichkeiten, dass man sagt: Fünfundvierzig minus Zwanzig und dann die sieben, die restlichen, zu subtrahieren. Und es ist, so hab ich das gemacht, ich hab den Kindern diese verschiedenen Rechenwege aufgezeigt und gesagt: „Mit welchem könnt ihr am besten zurechtkommen?“ Einigen fällt das eine leichter, anderen das andere. Also, so haben wir das vorbereitet. Wenn man jetzt nachher diese Rechenwege hat, ist es für die Kinder einfacher. Zumindest haben sie das Gefühl, dass es einfacher ist, weil sie weniger und leichtere Zahlen im Kopf behalten müssen.
D.h. sie rechnen dann hier von sieben bis fünf – das geht nicht, also muss man dann von sieben bis 15 rechnen, d.h. einen von den Zehnern die man hier hat, da oben quasi erweitern, dazurechnen, sonst könnte man ja nicht 15 rechnen. Und dann lässt sich das ausrechnen: Von 7 bis 15 geht, sind acht, schreiben wir hierhin; da sie aber jetzt ja sich quasi einen Zehner hier geborgt haben müssen sie den da mit hinschreiben und dann zusätzlich subtrahieren. D.h. wir haben hier unten dann drei, und rechnen dann von drei bis vier sind eins.

Ich habe noch nicht ganz verstanden, wo sie den Zehner geborgt haben: Unten bei der Zwei oder oben bei der Vier.

Bei der Zwei unten!

Und als Zeichen dafür, dass sie ihn geborgt haben – ich kann die Aufgaben inzwischen auswendig, ich kann gut über Kopf gucken, Sie können gerne... Ich kann das gerne über Kopf mitlesen, dann haben Sie es einfacher...

Ja, sie müssen ja im Grunde genommen, noch mehr... Also, soll ich Ihnen das nochmal erklären?

Ja, gern. Das mit dem Borgen hab' ich noch nicht verstanden.

Ja, genau. Man muss Ihnen ja erklären, warum rechnet man hier bis 15, warum geht das? Und das geht nur im Grunde genommen, wenn man das hier erweitert, also wenn man nicht 27 abrechnet, oder zwei Zehner, sondern drei Zehner eigentlich hat. Und dann könnte man natürlich hier dann, also das erweitern, und dazu muss man natürlich dann hier, wenn man hier einen Zehner dazu nimmt, muss man hier natürlich auch einen Zehner mehr subtrahieren. Das ist diese kleine Eins, die man da immer hinschreibt.

Verstehe! Sie sprachen eben gerade von Borgen?

Ja, so wird das in der Fachliteratur – also man kann es so sagen: Man borgt sich den aus.

Und das Verfahren, wo sie unten eine Eins dazu legen und oben eine Eins, das wird auch so in dem Mathebuch erwähnt?

Ja. Also ähnlich ist das natürlich bei diesen Aufgaben dann auch. Also man rechnet nicht von 5 bis 2 geht nicht, also von 12, und diese 10, die man sich hier zusätzlich als Hilfe genommen hat, muss man da natürlich dann dazuschreiben, sonst stimmt die Rechnung natürlich nicht. Oder hier genauso: Von 9 bis 11, usw.

Schreiben Sie dann auch während der Rechnung zu beiden, also zu den fünf Einern und zu den zwei Zehnern hier jeweils eine Eins dazu?

Ja... Nein, also hier unten die kleine Eins. Und wir haben das so geübt, dass man mit Farbe das sichtbar macht hier auch. Und ganz am Anfang hab ich bei Schülern, die erst mal Schwierigkeiten damit hatten, auch plus 10 hier noch dazu geschrieben, damit sie wissen, also man muss von sieben bis 15 rechnen. Denn ansonsten fangen die Schüler an, umgekehrt zu rechnen und sagen: „7 minus 5, sind 2“! Was natürlich so nicht stimmt, aber dann kommen sie nicht auf die Idee, dann erleichtert das die ganze Geschichte.

Frage 2

Ich würde... Also, wir haben das ja gerade angefangen, auch in der vierten Klasse... Ich würde noch mal zurückgehen auf die ursprüngliche Art und Weise, diese Aufgabe zu rechnen. Und zwar könnte man ja jeweils die 645 hier aufteilen und man sagt, man rechnet das mal 600 mal 123, dann rechnet man 40 mal 123 und 5 mal 123. Wenn man die Ergebnisse hat, dann müsste man ja überlegen, wie man diese Ergebnisse darstellt, und ich denke, da wird das schon deutlicher, dass man die Ergebnisse, nicht wie es hier in diesem Beispiel ist, so untereinander schreiben kann. Denn wir haben ja hier Hunderter, Zehner, Einer, und wir haben ja nicht in jedem Fall <u>hier</u> Hunderter, Zehner, Einer – wenn man das nachher in der richtigen Reihenfolge auflistet. Wäre eine Möglichkeit. So würde ich das erst mal ausprobieren. Nächste Möglichkeit wäre vielleicht, dass man vielleicht Hunderter, Zehner, Einer hier rüber schreibt, um zu sehen, was dabei heraus kommt. Wenn man z.B. Hunderter, Zehner, Einer hier rechnet, ob das dann unbedingt hier auch Hunderter, Zehner, Einer sind – also auch mehr das grafisch irgendwie darstellt, damit die Schüler überhaupt wissen, was sind das für Zahlen hier bei den Ergebnissen – sind das immer Einer, sind das immer Zehner, usw. Also, da eine deutliche grafische Geschichte auch zu machen.

Frage 3

Also ich würde ihr erst mal sagen, dass diese Theorie, diesen Ansatz, den sie da gefunden hat, dass der stimmt. Denn das ist ja klar, wenn der Umfang sich erhöht, wird auch die Fläche größer. Dass das allerdings noch keine Aussage darüber hat, wie groß die Fläche ist, sondern nur einfach eine Feststellung, sie wird größer, aber sie kann damit noch nicht unbedingt ausrechnen, wie groß die Fläche wird. So versteh ich das jetzt ... Ansonsten hat sie Recht! Also, mathematisch stimmt es, ja!

Und wie würden Sie der Schülerin antworten?

Ja, das was ich Ihnen gesagt habe. Also, ich würde ihr antworten - sie hat sich etwas da ausgedacht, was stimmt. Was so mathematisch richtig ist, dass es aber in dem Sinne keine Formel ist, um eine Fläche zu berechnen. Was sie aber auch gar nicht machen will. Aber die Erkenntnis, die sie getroffen und gefunden hat, ist richtig.

[Erste Situation]

Ich hab noch einmal eine Frage eben gerade zur ersten Situation, bei der Subtraktion: Sie sprachen eben von Borgen. Ich hab sie jetzt so verstanden, dass Sie unten die Eins ergänzen und oben die Eins ergänzen, also jeweils zehn dazu nehmen. Wo borgen sie eine Eins?

Nein, also Borgen in dem Sinne, dass man sich etwas ausleiht, um diese Rechnung leichter ausrechnen zu können. Von daher, man nimmt ja etwas erst einmal, borgen... Wenn man sich etwas borgt, muss man das aber auch hier unten notieren.

Von wo borgen Sie? Also, von wo leihen Sie sich aus?

[Windet sich] Nein, man leiht sich nichts hier unten... Man nimmt das ja nicht weg, im Gegenteil, man muss ja etwas dahin legen, es wird ja dann ergänzt durch diese kleine Eins. Also ausborgen, indem man sich ein Gerüst, eine Zahl einfach aus dem Zahlenraum nimmt. Diese zehn dazu, also in dem Sinne borgen. Denn es wird ja ansonsten nichts weggenommen an einer anderen Stelle. Sondern im Gegenteil, wenn man das hier ergänzt, borgt, ausborgt, ergänzt um zehn, muss man das hier natürlich ja auch machen, sonst stimmt das Ergebnis ja nicht.

Verstehe.

Also ausborgen in dem Sinne, dass man sich etwas nimmt, ausborgt, um diese Aufgabe in dem Sinne lösen zu können. Weil es sonst schwierig ist, sich die ganze Geschichte vorzustellen.

Dann ist klar. Ja, dann ist klar.

[Ergänzung zweite Aufgabe]

Und in der zweiten Aufgabe nochmal: Sie sagten, es sei dann ja klar, ich weiß jetzt nicht mehr genau, wie es jetzt ist, aber wenn man hier mit der 6 multiplizieren wür-

de, dann würde man ja mal hundert nehmen oder so... Da könnte ja jetzt ein Schüler sagen: „Ja, hab ich ja gemacht! 123 mal 6 hab ich ja gerechnet! Da kommen ja auch 700 raus. Und was würden Sie dann sagen?

Ja, das ist ja auch richtig! Das ist ja wahrscheinlich dann diese Zahl, nicht?

Ja.

Nur, wenn wir jetzt. Nein, das ist nicht diese Zahl.

Also: 123 mal 6...

Mal 600! Wir müssten ja mal 600 rechnen. Das wär' eine Möglichkeit, dass man sagt, wir rechnen jetzt 600 mal das, 40 mal das, und wir rechnen 5 mal das. Und wenn wir das 6 mal 123, wäre 600 mal 23, haben wir 73800 glaube, ne? Müsste hinkommen... Und dann könnte man daran natürlich sehen, dass man, wenn man jetzt 40 mal diese Zahl hat, kann man das natürlich nicht untereinander schreiben.

Warum nicht? Würde der Schüler jetzt vielleicht sagen...

Warum nicht? Ja, ich würde es in der Tat so auf einem Zettel natürlich so aufschreiben. Denn wir hätten 73800 und wir hätten hier – ich kann es nicht im Kopf ausrechnen – 4000, 4920 – wenn wir dann Hunderter, Zehner, Einer eine Stellentafel machen, dann könnte man sehen, dass die an verschiedenen Stellen stehen. Und dann steht es nicht mehr untereinander, weil man natürlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner... und dann würde man auch sehen, dass da eine andere Zuordnung stattfinden würde.

Gut.

Und genauso natürlich dann bei 5 mal dann das Ganze. Da hätten wir dann tatsächlich diese 615.

6.37 *Protokoll 37 H*

Alter der Lehrkraft: *61 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *36 Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also, erstmal müssten sie das Ergänzen einwandfrei können. Dann natürlich über den Zehner hinweg plus und minus rechnen können. Und fähig sein, diese Hunderter, Zehner, Einer genau untereinander schreiben zu können, also die Stellenwerttabelle einwandfrei beherrschen. Und ich bin dann so drangegangen, dass ich das hab' erst kopfrechenmäßig rechnen lassen, und dann haben wir nach einer Weile festgestellt, dass das alles ziemlich lange dauert, und da ich eine sehr intelligente Klasse habe, haben einige gesagt, dass kann man auch untereinander rechnen. Dann kamen auch einige dazu mit dem Leihen und dem Punkt, weil Vater ihnen das nämlich schon genannt hatte; dann hatte ich große Schwierigkeiten, dieses Ergänzen zu üben – was sie im Kopfrechnen wunderbar konnten, aber hier kamen nun einige: „Wir leihen uns". Das ist aber nun ein Relikt aus früherer Zeit, also dann ist dieses ganz normale... Ich hab', um es zu erleichtern gesagt: „7 plus wie viel ist 15?" Und in dem Moment, wo ich 15 sage, haben sie hier sofort eine 1 notiert. Aber vorweg, wie gesagt, mündlich, also kopfrechenmäßig, das Ergänzen üben: „7 plus wie viel ist 12", „12 minus wie viel ist 8", usw.

Da passiert ja eine ganze Menge, wenn sie hier unten, wenn sie sagen: „7 plus wie viel sind 15 und da kommt sofort eine 1 dazu." Wenn ein Schüler nachfragen würde: „Wie kommt die 1 da zustande?" Was würden Sie sagen?

Ja, das haben wir natürlich auch vorher geübt! Dass wir... 10 Einer sind ein Zehner. Diesen Prozess, der zehn Einer-ein Zehner, zehn Zehner-ein Hunderter, diesen Prozess haben wir natürlich auch vorher geübt. Auch kopfrechenmäßig und auch schriftlich.

Und woher kommt der Zehner dann in dem Fall? Sie schreiben...

Ja, den schreib ich dazu, da hab ich den Kindern erklärt: „Dadurch, dass wir uns diesen sozusagen dieses hier verwandeln, den Zehner, nehmen wir den weg. Indem wir ihn wegnehmen, müssen wir ihn aber praktisch dazu addieren wieder! Also d.h., ja, wie hab' ich das damals gemacht? Ich hab' so eine Tabelle gemacht, und habe gesagt: „Wir wandeln erstmal einen von den Zehnern um in zehn Einer und notieren uns das!" Und nachher hat sich das, also nachher... nach relativ kurzer Zeit! Wir haben das immer wieder neu gesagt: „Warum schreibst du hier eine Eins hin?" „Ja, weil ich hier einen Zehner umwandle in zehn Einer, und das notieren wir uns hier, mit der Eins!"

Ja, verstehe...

Also, das ist mathematisch vielleicht nicht ganz hundertprozentig richtig, aber für die Kinder am einsichtigsten gewesen.

Frage 2

Ich würde als erstes noch mal klar machen – ich meine, das ist ja voraus gegangen, dass sie in der vierten Klasse diese Multiplikation gehabt haben schon – aber ich würde noch mal klar machen, so wie ich das im Vierten tue, da rechnen wir mal 64 zum Beispiel, dass wenn ich mit der Sechs anfange – das ist ja der Zehner – fange ich unter der Stelle der Sechs an, und da es ein Zehner ist, notiere ich das, indem ich eine Null dran hänge, weil es ein Zehner ist! Genauso bei dem – also dies hier ist ein Zehner, das ist ein Hunderter – also wenn ich jetzt mit der Sechs anfange, ist das ein Hunderter. Da ich mit einem Hunderter rechne, fange ich also, ich fange hier mit der Stelle an, weiß aber, dass es ein Hunderter ist. Ich kann auch von vornherein zwei Nullen hinschreiben, ich rechne mal 600 das ganze! Denn angefangen haben wir damit, dieses in Schritten zu unterrichten, also in Schritten die Multiplikationsaufgabe zu machen: 600 x 123, 40 x 123, 5 x 123! Und wenn ich 600 mal, dann muss ich auch die Nullen da notieren, und das behalt ich mir bei. Und so multipliziere ich das dann eben hier in diesem, dass ich weiß: 600 mal das, also ist ein Hunderter, häng ich hier Nullen dran. Also, das ist mit Zehner und Einern natürlich ganz genauso, ne?

Frage 3

Also, das muss ich erst nochmal... Also, sie sagt, dass mit dem Zunehmen des Umfanges, 4+4, Umfang 16, also 4x4, Umfang 16, gleichzeitig die Fläche größer wird. Ich weiß gar nicht, was die Schülerin mir, was sie damit jetzt sagen will... Also, sie hat gesagt: „Dies ist der Umfang!" Der Umfang ist doch aber nicht... 4x4...

4+4+4... ist 16, und hier wäre der Umfang: 4+8+4+8! Also die Aufgabe kann ich gar nicht so nachvollziehen! Also, diese ist praktisch hier dann zweimal... Ach so... Ja, man könnte ihr erklären, dass, wenn ich dieses Quadrat aneinander setze, hier dran, das ist praktisch ein doppeltes Quadrat, dass es ein Rechteck ergibt. Also, ich würde sie das malen lassen und dann kann man das ja beweisen. Denn dies ist 4,4 und noch mal 4, also, dass man dieses praktisch... Sie hat gesagt, wenn sie dieses doppelt nimmt, dann wäre auch der Umfang doppelt. Dass mit dem Zunehmen des Umfanges einer geschlos... auch die Fläche größer wird...

Wenn der Umfang größer wird, wird auch die Fläche größer...

...auch die Fläche größer, klar! Ich würde ihr da – also, das ist jetzt vielleicht mathematisch falsch, aber ich würd ihr da Recht geben. Sicherlich, wenn sie das aneinandersetzt, also der Umfang größer, wird auch die Fläche größer, ja! Und was soll ich... Sie wollen wissen, wie ich ihr das jetzt erklären würde?

Wie Sie ihr antworten würden.

Ja, ich würde sagen, wir zeichnen das jetzt nochmal, dieses eine Quadrat, und setzen das zweite Quadrat... „Du hast ja gesagt: wenn du diese Figur verdoppelst, dass dann die Fläche größer wird.“ Und das würde ich sie zeichnerisch lösen lassen. Denn damit ist sie ja praktisch her gekommen. „Setz diese Figur nochmal daran, verdoppel es, und du hast richtig gedacht“, würd ich so sagen! Aber es ist so, dass man das vielleicht auch nur mit einem Quadrat machen kann... mit anderen geometrischen Figuren vielleicht. Also, ich mein, ich bin da nicht so furchtbar firm. Aber in diesem Fall hätte sie Recht. Also, ich würde sie das beweisen lassen, und dann hinterher nochmal ausrechnen lassen.

Sie würden sie nochmal diese beiden Rechtecke zeichnen lassen, oder...

Ich würde sie dieses Rechteck zeichnen lassen...

Weil sie dieses ja schon gemalt hat...

Ja, dann soll sie dieses nochmal dran setzen. Sie hat ja gesagt, mit dem Zunehmen des Umfanges, also der Umfang...äh, sie muss mir natürlich nun auch erklären, welchen Umfang sie meint, wie groß sie den Umfang insgesamt haben will. Und sie hat es ja dann ganz einfach gemacht, sie hat dieses einfach verdoppelt! Und wenn der Umfang zunimmt...

Dann nimmt auch die Fläche zu, sagt sie...

Das kann man natürlich... Sicherlich, da müsste man jetzt dezidiert vorgehen. Es kann ja auch so sein: 4 cm, es muss nicht unbedingt immer die Fläche zunehmen, es kann ja auch sehr viel schmaler sein. Na ja, nee, doch, in diesem Fall bleibt das so.
Im [unverständlich: Linearen?] bleibt das so!

In diesem Fall bleibt es so. Also, wenn sie sich auf dieses eine Beispiel... Wenn sie so *[unverständlich],* würd' ich das so erklären.

Sie bleibt ja nicht bei dem einen Beispiel! Also, sie sagt ja, dass mit dem Zunehmen des Umfanges einer geschlossenen Figur...

Einer! Dann würd ich ihr sagen: In diesem Falle hast du Recht! Aber wie es in anderen Fällen ist, sagen wir mal mit Dreiecken, oder was gibt's, Kreisen, usw., das müsste man dann nochmal neu beweisen. Ich würde mich also jetzt nicht festlegen, dass sie allgemein recht hat! Sondern ich sage: Dass, was du mir hier gebracht hast, was du mir hier gezeigt hast, das ist in Ordnung. Also, ich würde es nicht global für alles... Und ich meine, alles andere, Dreiecke, Zylinder, Kreise, usw., das würde sie jetzt sowieso nicht bringen, viertes Schuljahr wäre da sowieso noch nicht so... Könnte natürlich sein! Aber da müsste ich mich selber, muss ich ehrlich sagen, als Lehrkraft dann nochmal rein vertiefen.

6.38 *Protokoll 38 H*

Alter der Lehrkraft: *32 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *4 Jahre*

Schulbuch: *Denken und Rechnen (neueste Ausgabe)*

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Sammeln, betrachten lassen.

Also, erst mal an die Tafel schreiben, betrachten lassen und dann die ganzen Vorerfahrungen, die die Kinder haben, erst mal sammeln. Hinterher wird das dann geordnet und beguckt.

Welche Vorerfahrungen würden die Kinder dann benötigen?

Einige überhaupt nix. Die kennen das gar nicht. Die polnischen Kinder, die kennen das schon. Die machen das allerdings ein bisschen anders, das Verfahren. Die kriegen das auch von ihren Eltern beigebracht. Die sagen dann also: ooooh, das kenn' ich schon. Genauso wie die portugiesischen Kinder.

Die machen die schriftliche Addition oder Subtraktion genau wie wir und die polnischen Kinder ein bisschen anders.

Wenn da nun doch Nachfragen sein sollten, z.B. den Übertrag habe ich noch nicht verstanden. Wie würden Sie's erklären?

Also, ich mach' das immer so, dass ich sage: Wir klauen uns einen Zehner. Und weil wir uns den geklaut haben, müssen wir den dann auch noch mal wieder dazugeben. In der nächsten Spalte.

Und dann schreibe ich am Anfang den Zehner auch erst noch hin, damit sie das dann auch richtig bildlich sehen, dass sie dann, wie hier, 10 plus 5, dass sie dann 15 haben (*schreibt den Zehner oben zur 5 dazu*).

Sie schreiben den Zehner also oben hin?

Am Anfang, ja. Oben drüber, über die Aufgabe. Dann verstehen die meisten das.

Und sie schreiben ihn nur oben hin oder dann auch noch unten?

Dann schreibe ich die kleine 1 unten hin.
Ich schreibe erst hier oben hin, also über die 5 eine zehn. Dann rechnen die von 7 bis 15. Das kriegen sie hin. Und dann erkläre ich ihnen: Wir haben uns hier einen geklaut, also müssen wir den Zehner, den müssen wir ja irgendwo wiedergeben. Wir können den ja nicht einfach klauen, wir müssend den ja wiedergeben. Und dann schreiben wir nicht die Zehn hin, lassen wir einfach die Null weg, und schreiben nur die kleine 1 hin. Das wird dann ja addiert (*mit der 2*). Bis jetzt haben es immer alle verstanden.

Noch einmal zu den Voraussetzungen. Sie sagen, Sie sammeln erst mal, um zu sehen, was so alles da ist. Was müsste da alles mit dabei sein?

Subtraktion im Allgemeinen muss man verstehen können. Addition müssen die Kinder mitbringen. Ergänzen.
Und dann vielleicht auch schon mal gesehen haben, so eine Untereinanderschreibweise, vielleicht kennen das ja einige schon.

Frage 2
Ja, also ich würde noch einmal ganz von vorne anfangen.
Im Prinzip geht es ja um die Schreibweise. Die Schüler erkennen in diesem Fall nicht, wo sie die Zahlen hinschreiben müssen. Sie vertun sich ja in der Spalte.
Ich würde noch mal gemeinsam ganz von vorne gucken, auch ruhig auf diesem Karopapier.
Da das mit reingeben, was ich an der Tafel hab. Auch mit Tageslichtprojektor und mit Tageslichtschreiber. Und dann wirklich Zahl für Zahl und Multiplikation für Multiplikation durchgehen und genau sagen und gucken: Da musst du's jetzt hinschreiben.
Und vielleicht für einige – also ich persönlich fand das immer sehr unvorteilhaft – dass sie hier Nullen hinschreiben. Dass die Kinder genau wissen, die Null fällt weg, aber es ist dann zumindest untereinander geschrieben.

Sie fanden das unvorteilhaft?

Ich fand das unvorteilhaft. Für mich persönlich. Ich finde, das ist zu viel Gewusel. Ich kann das besser, wenn das Ergebnis der Zahl wirklich unter der ersten Zahl steht. Ohne noch irgendwelche Nullen. Ich finde das immer sehr verwirrend. Aber

ich denke, einige Kinder ... also für einige Kinder ist es sicher auch verwirrend, andere kommen bestimmt super damit zurecht. Also anbieten sollte man es auf jeden Fall. Die es so können, können das so aufschreiben, die anderen ...
Dann wirklich drauf achten und wirklich gemeinsam vorgehen und gucken: Ergebnis wirklich unter die erste Zahl, also unter den Hunderter der zweiten Zahl.
Ich weiß nicht, ob sie's dadurch verstehen... Ich würde es ausprobieren.

Das heißt, es gäbe noch andere Möglichkeiten, die Sie in petto hätten?

Spontan jetzt nicht, aber mir würde dann schon was einfallen. Oder von den Kindern kommt ja vielleicht auch noch etwas. Dass sie auch erklären, warum sie das so machen. Andere vielleicht andere Möglichkeiten sehen. Manchmal kommen da ganz tolle Sachen von den Kindern, wo man selber gar nicht drauf kommt.
Wobei man selber schon so eingefahren ist und man sagt, dieses Thema ist für einen persönlich vielleicht das Günstigste. Und dann ist man ja so drin.
Reicht Ihnen das?

Also, Sie bestimmen die Menge. Wenn Sie sagen: So würde ich das machen... Aber wenn Sie sagen: Ich hätte da noch die und die Möglichkeiten! Gerne, also...

Also ich wüsste jetzt grad nichts.

Frage 3
(überlegt ca. 37 Sek.)

Ich könnte noch einmal analysieren, was sie gemacht hat.

Ja... und so Ihre erste spontane Reaktion?

Dann würde ich sagen: Hast du gut gemacht, Kind, wie bist du darauf gekommen?
Also, erst mal angucken und dann: Was hast du gemacht, kannst du mir das erklären, wie bist du darauf gekommen?
Dann würden wir das vielleicht noch einmal gemeinsam durchgehen. Ob das alles so seine Richtigkeit hat.

6.39 *Protokoll 39 H*

Alter der Lehrkraft: *45 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *18 Jahre*

Schulbuch: *Mathebaum, teilweise ergänzt durch Materialien aus Denken und Rechnen*

Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also, da muss ich mich erst mal wieder in die Situation der dritten Klasse hineinversetzen. Zunächst gehe ich davon aus, das wir das schon vorher geübt haben, bevor ich so eine Aufgabe in schriftlicher Form überhaupt stelle, haben wir natürlich auch mit Material hantiert, beispielsweise mit einer Stecktafel oder so etwas. Haben einzelne Übungen nachgelegt oder, mit welchem Material auch immer, bevor ich Schüler überhaupt mit der schriftlichen Form konfrontieren kann.

Wenn ich jetzt davon ausgehe, wir sind jetzt so auf dem Stand der Dinge, dass wir das alles mit Anschauung vorgeübt haben und auch mündlich...und Zehner...und dann erst die ganzen Zehner wegnehmen...und Einer von Einern, dann sehe ich hier jetzt auf dem ersten Blick natürlich sofort, dass es sich hier um diese sehr unbeliebten Aufgaben bei Schülern handelt. Nämlich wenn der Einer, der abgezogen werden soll, größer ist als der, der oben steht.

Ich habe auch heute noch manchmal Kinder in der vierten Klasse, die sehen einfach nur: Ach ja, der Unterschied zwischen 5 und 7 ... da kommt `ne 2 hin.

Also muss man diese Aufgabe sowieso erst mal lesen, um zu vermeiden, das Zahlendreher drin sind.

Dann müsste man sich noch mal klarmachen, vor allem schwächeren Kindern, die große Zahl steht oben, davon kannst du nur die wenigen wegnehmen. Und dann müsste man überlegen...

Ich lasse in meiner Klasse beides zu: Manche Kinder rechnen minus, sagen 15 minus 7, die meisten ergänzen aber lieber, also von 7 bis 15. Weil sie irgendwie das Gefühl haben: Plus ist mir sympathischer.

Ja, so würde ich da rangehen.

Und dann müsste man sehen, wer damit nicht klarkommt, also z.B. ein Ergebnis hat, was größer ist als die oberste Zahl, dann würde ich sagen, muss die Anschauung noch einmal her.

Sie sagten eben „von 7 bis 15 oder 15 minus 7“, da ist ja dann dieser berühmte Übertrag.

Ach so, wie wir das machen mit dem Übertrag?

Ja... wie erklären Sie den Kindern, dass da nun eine 1 steht, oder auch nicht.

Wenn ich diese Aufgaben anbiete, dann lasse ich sowieso noch zwischen der letzten Zahl und dem Strich Platz, weil wir da unsere Merk-Eins hinschreiben.
Bevor wir zu diesem Begriff Merk-Eins gekommen sind – der kommt übrigens von den Kindern, nicht von mir – haben wir uns natürlich immer wieder klargemacht: Wenn ich nur 5 habe, kann ich nicht 7 abziehen. Dann müsste ich hier 15 nehmen. Aber dann habe ich hier ja sozusagen schon einen Zehner geklaut.
Also, das haben wir natürlich auch immer alles erst im Hantieren getan: So, also hier muss ich den nächsten Zehner angreifen.

Wie machen Sie das: den nächsten Zehner „angreifen“?

Also, wir haben vor einiger Zeit von irgendeiner Bank mal so Hundertertafeln geschenkt bekommen. Dazu gehören Plättchen, die auf der einen Seite rot und auf der anderen blau sind.
Die Hundertertafel haben wir dann mit Plättchen vollgelegt. Z.B. mit – was haben wir hier ? – diese 45. Und dann soll ich 27 abziehen. Dabei muss ich dann ja sieben Einer wegnehmen und wenn ich das mache, dann stelle ich fest: Aha, hier kann ich ja nur 5 Einer wegnehmen, also muss ich die nächste Zehnerreihe angreifen.

Was heißt „angreifen“? Was machen Sie dann genau?

Dann sehen wir eben, das wir hier schon in den nächsten Zehner gegangen sind. Und den habe ich mir hier also sozusagen schon geholt. Und das muss ich mir hier dann ja vermerken, dass ich einen Zehner davon schon gebraucht habe.
Und dann geht’s los: Dann hab’ ich hier eben dann 1 + 2, das sind 3, 3 bis 4, ja das geht.
Also, „Merk–Eins“ nennen wir das, oder Merk-Zwei oder -Drei, je nachdem, was da vorkommt.

Mit Hilfe der Hundertertafel lernen wir auch das Einmaleins, oder wie Zehnerzahlen zusammengesetzt sind. Indem wir eben erst die Zehnerreihen voll machen und dann noch die übrigen Einer dazulegen.

Frage 2

Da würde ich – auch wenn die Schüler dann darüber meckern werden – noch mal auf die ganz ausführliche, schriftliche (*meint halbschriftliche*) Multiplikation zurückgreifen. Wenn ich also sehe, dass dieser Fehler gehäuft auftritt. Dann muss man allgemein, glaube ich, noch mal klarmachen, dass dieses hier eben nicht heißt: 4 x 3 x 2 x 1, sondern dass das ja schon 40 ist und das hier 600 ist.
Also würde ich so eine Aufgabe so auch unter dem Strich ... *(zieht einen imaginären Strich unter die Aufgabe)* – und jetzt würde ich der Reihe nach vorgehen und würde jetzt sagen: so, wir rechnen jetzt erst mal alle Hunderter. Also Hundert mal – muss man auch hinschreiben dann – Hundert mal 645, sehe also die Zahl 645, die beiden Nullen hinten dran, das machen Schüler ja oft auch schon automatisch, würde das entsprechend mit den 20ern tun. Da sehen wird dann, dass die Zahl schon deutlich kleiner ist. Dann würde ich mit den Einern multiplizieren.
Dann würde man es untereinander addieren und dann sehen: Aha, hier ist das mit den Nullen so.
Und wenn man das dann so noch einmal richtig aufschreibt, dann kann man das mit den Kindern noch einmal vergleichen. Hier steht jetzt die 738, aber eigentlich musst du dir denken, dass da noch zwei Nullen sind. Hier haben wir ja mal 100 genommen. Wir sparen uns jetzt nur das Hinschreiben.
Ich glaub', da kann man nur so noch mal drauf zurückgreifen.

Ich habe erlebt, dass sehr häufig Kinder – also, hier habe ich ja noch nicht so die Erfahrung mit der Multiplikation (ist zu diesem Zeitpunkt von der Lehrkraft in der vierten Klasse noch nicht unterrichtet worden) – dass Kinder kommen und sagen: Ja, hier, aber meine Mama hat mir das so gezeigt, das geht doch viel einfacher, wenn ich das so schriftlich mache, als wenn ich die im Kopf so rechnen lasse oder so etwas, oder halbschriftliches Rechnen, das geht doch viel schneller.
Aber ich sage dann: Wir müssen doch erst mal begriffen haben, was wir hier eigentlich tun. Denn sonst kommt es genau zu diesen Dingern hier.

Um auf das Minus noch mal zurückzugehen: Aha, der Unterschied ist 2.
So bringen die Eltern das aber teilweise bei. Die sagen das dann einfach so. Ich stelle mich dann aber auf die Seite der Schüler und sage dann zu ihnen: Ja, du hast recht, ich finde das auch ätzend, das ist `ne irre Schreibarbeit, aber wir müssen das einfach machen.

Ich würde hier vielleicht möglicherweise noch farbig einsetzen. Hier drüber noch mal die Stellentafel schreiben. Blaues H, rotes Z, gelbes E und hier entsprechend zwei blaue Nullen, u.s.w.
Je nachdem wie ich merke, ob da Verständnisschwierigkeiten sind, muss ich, denke ich mal, auch in einer sechsten Klasse das gesamte Grundschulregister ziehen.

Frage 3

Da würde ich sagen: Das finde ich ganz toll. Das ist ja superklasse, was du dir da für Gedanken gemacht hast. Kannst du deine Idee jetzt mal der Klasse vorstellen?
Ich lasse auch immer sehr gern die Kinder auch Rechenverfahren vorstellen.
Auch hier würde ich dann sagen: Erzähl mal, wie du überhaupt darauf gekommen bist. Was hast du da gemacht? Hast du dir das so aufgemalt? Hast du das mit Kästchen gemacht?
Und dann würde ich – glaube ich – dadurch dafür sorgen, dass die anderen Kinder heiß drauf werden.
Ich würde nicht sagen: Das ist richtig oder falsch. Sondern (*geheimnisvolles Flüstern*): Mensch, da hab ich mir noch nie drüber Gedanken gemacht. Ich glaub', das probieren wir mal alle aus.
Und dann sind sowieso alle mit dabei!
Und dann kann man natürlich gucken, was man macht: Man kann mit Kästchen arbeiten, an der Tafel sich etwas ausmalen, wir könnten uns in den Flur begeben oder in einen Raum, der nicht so stark möbliert ist und gucken anhand der Fußbodenfliesen, könnten uns also selbst solche Flächen aufmalen, solche Umfänge vorgeben.
Man könnte auch auf dem Schulhof solche Dinge mit Kreide aufmalen lassen.
Aber um Flächeninhalt zu berechnen, ist es natürlich immer ganz schlau, wenn man Kästchen hat.
Ich würde das ganze zum Problem der Klasse machen und würde dadurch auf jeden Fall erreichen, dass nächste Woche wieder einer kommt, der sich irgendetwas ganz Tolles ausgedacht hat.
Der z.B. sagt: Ich kenne einen Trick mit dem 1x9 oder so.
Man weiß ja nicht, auf was Kinder so kommen. Irgend ein Zahlentrick oder so, das lasse ich zu. So etwas mache ich zum Thema.

6.40 *Protokoll 40 H*

Alter der Lehrkraft: *39 Jahre*

Bisher geleistete Dienstjahre: *11 Jahre*

Schulbuch: *Zahlenbuch*

Fakultas Mathematik: *ja*

Frage 1

Zunächst einmal müssten sie das 1+1 und das 1-1 können und das Ergänzen. Dann müssten sie wissen, was Zehner, Einer und Hunderter sind. Sie müssten eine Vorstellung haben von den Mengen, also so Mengen überhaupt und ich würde versuchen, in Form von Wechseln da ranzugehen. Das ist nicht ganz mathematisch korrekt, aber es hat sich, äh, also ist bisher gut angekommen, wenn man mit Geld rechnet, die Aufgaben - also als Ergänzungsaufgaben mit Geld einführt. Die Erfahrung habe ich gemacht.

Zum Beispiel? Wie würden Sie das bei einer dieser Aufgaben mit dem Geld machen?

Also, ich würde, z.B. bei 45 –27, richtig mit Magnetgeld an die Tafel pappen, und dann, sie müssten dann genau sehen, was sie machen müssten. Wenn sie also 27 davon abziehen würden, sie müssten den Zehner noch in einzelne Markstücke umwechseln, um dann die Aufgabe richtig zu rechnen.

Wie würden Sie die Schreibweise erklären?

Ich würde sie so machen, wie die Schulbehörde in Hamburg das vorgeschrieben hat, `ne Weile und ich glaube, das ist auch immer noch der Fall. Das man von unten nach oben ergänzt. Also: 7 bis 15, kleine 1 hier unten im Zehner *(bei der 2),* und drei bis vier.

Das Verfahren, dass Sie vorher beschrieben hatten, in dem Sie einen Zehner gegen zehn Markstücke eintauschen, das würden Sie dann in der Aufgabe selbst nicht mehr deutlich machen?

Nein. Was auch ein anderes gutes Verfahren ist, was ich in meinem letzten Jahrgang hier gemacht habe, ist mit Kilometerzählern zu arbeiten. An der Tafel. Allerdings habe ich da keine herstellen lassen. Es gab ein par schöne Abbildungen im

Buch, die haben wir genommen. Man fängt bei Kilometerstand 27 an, mit seinem Fahrrad zu fahren. Bei 45 kommt er an. Wie viel Kilometer ist er gefahren? Und da ist es ganz nett, also da kam das mit diesem Übergang, für viele Schüler war das sofort ziemlich klar, dass der Zehner da überrollt wird.

Haben Sie eine besondere Sprechweise?

Ja. Eben Ergänzen. Von 7 bis 5: geht nicht. Von 7 bis 15... und dann 3 bis 4. Und ich mache immer noch einen dicken Pfeil nach oben, dass sie wissen, wie die Rechenrichtung ist.

Und Sie sagen, die Schüler müssen das 1+1 und das 1-1 beherrschen.

Und das Ergänzen!

Richtig! Und das Ergänzen. Denken Sie dabei an ein bestimmtes Spektrum oder einfach an die allgemeine Routine der Aufgaben?

Wie meinen Sie das?

Also, vorstellbar wäre, Sie haben ja mit verschiedenen Schulbüchern zu tun. Einige beginnen mit einem Zahlenraum bis 6, erweitern dann bis 10, dann bis 20, andere Schulbücher stellen das ganz anders dar.

Also, mit dem Anfang im ersten Schuljahr, da würde ich schon die Zahlen 1 bis 20 gleich einführen als Möglichkeit. Aber dann würde ich schon mit ihnen ganz genaue Zahlenmengen absprechen. Also, sozusagen als vorhandenes Zahlenmaterial die Zahlen von 1 bis 20, aber genau prüfen, was sie davon wirklich schon wissen. Und das Buch, nachdem ich seit einem Jahr unterrichte, ist das Zahlenbuch.

Frage 2

Also, ich würde immer deutlich machen, dass das hier Hunderter sind, also die ersten, das sind 738 Hunderter. Und in der zweiten Zeile sind es eben Zehner. Und das letzte sind dann eben 615 Einer. Ich würde die Nullen am Anfang mitschreiben. Dann würde ich, also davor müsste eigentlich ein Großteil halbschriftliches Rechnen liegen. Und dann müssten die das eigentlich hinkriegen. Ja.

Frage 3

Antwortet spontan, noch bevor ich die Frage „Wie würden Sie der Schülerin antworten?“ gestellt habe:

Ja, dass ist so nicht richtig. Die Fläche kann gleich bleiben und der Umfang kann sich sehr wohl verkleinern oder vergrößern. Je nachdem, was man macht. Also wenn man, will mal gucken hier, ... ,ich würde etwas einfachere Zahlen nehmen, die man auch gut zeichnen kann, im Rechenheft. Also, ich würde sie z.B. lauter Rechtecke zeichnen lassen mit dem Flächeninhalt 16. Und sie dann den Umfang in Form von Kästcheninhalten zeichnen lassen. Und dann würden sie sehen, dass sich der Umfang sehr wohl vergrößern kann, obwohl die Fläche gleich geblieben ist.

Wie würden Sie der Schülerin antworten?

Ich würde sagen: Für dein Beispiel hast du recht. Aber es gibt ein Gegenbeispiel.

6.41 *Protokoll 41 H*

Alter der Lehrkraft: *56 Jahre*
Bisher geleistete Dienstjahre: *30 Jahre*
Schulbuch: *Welt der Zahl*
Fakultas Mathematik: *nein*

Frage 1

Also ... wir haben das natürlich erst mal anders im Kopf geübt. Wir haben die Aufgaben aufgeteilt, jetzt beispielsweise 45 – 27 haben wir erst mal gerechnet 40 – 20 und dann die 5 wieder dazugenommen und dann minus 7. So war das in Rechenschritten vorher. Dann hab' ich den Kindern gesagt, also man kann das sehr viel einfacher rechnen, da haben sich kluge Menschen einen Trick ausgedacht, also das so ein bisschen kindlich verpackt und dann hab ich dies untereinandergeschrieben und hab dann gesagt: Wir ergänzen bei Minusaufgaben immer. Und dann so eben gefragt: Geht es von der 7 bis zur 5 – nein – aha – dann geht es aber vielleicht von der 7 bis zur 15 – glaubt ihr das – ja – dann habe ich die kleine 1 in den Zehnerbereich geschrieben, dass sie auch so verstanden haben, dass das jetzt eine 15 bedeutet und dann hab ich erklärt das man diese 10, also die 1, zur 2 dazuzählen muss, und dann wieder ergänzen. Und dann habe ich das einige Male an der Tafel durchgeführt und dann hab ich Kinder gefragt, ob sie sich das auch schon trauen an der Tafel zu rechnen. Und danach, da frage ich dann immer, ist bei einigen schon der Groschen gefallen, wenn ich dann so 5 bis 10 melden, dann sage ich: Gut, dann gebe ich euch jetzt einen Zettel und ihr könnt am Tisch, Gruppenarbeit, das zusammen lösen.
Das die Kinder, die es verstanden haben, also anderen auch weiter erklären und nicht alle von mir abhängig sind, bis der Letzte es verstanden hat. Das läuft eigentlich immer so erfahrungsgemäß ganz gut.

Die Lehrkraft sagt, dass dies alles ist. Ich mache sie darauf aufmerksam, dass wir viel Zeit haben und dass sie sich diese auch nehmen soll, um in Ruhe über jede vorgestellte Situation nachzudenken.

Frage 2

Da würde ich wieder dieselbe Methode versuchen in einer sechsten Klasse wie ich eben beschrieben habe bei dem schriftlichen Minusrechnen. Ich würde darauf deuten, dass da ein Fehler entstanden ist, dass das aber überhaupt nichts macht, dass man Fehler korrigieren kann und dann würde ich das einmal oder zweimal an der Tafel auch erklären und dann aber auch wieder einen Arbeitszettel an die Kinder geben, damit sie testen können, ob sie's selbst auch verstanden haben. Und ich würde auch in einer sechsten Klasse, wenn ich dort jemals unterrichten sollte, Gruppenarbeit und Partnerarbeit sehr begrüßen.

Frage 3

Dass ich das ganz toll finde, dass sie das herausgefunden hat, du dass es mir leid tut, dass ich es bislang versäumt habe. Und dass es ganz wichtig ist, dass die Schüler mit aufpassen, eben auch selbst zu eigenen Überlegungen kommen. Dann würde ich das versuchen aufzunehmen und am nächsten Tag mit einzubinden in den Unterricht.

7 Anlage: Interviewprotokolle Zürich / Schweiz

7.1 *Protokoll 01 S*

Alter der Lehrkraft: *54 Jahre*

Frage 1

Okay. Also: Zuallererst überprüfe ich, ob die Begriffe Ziffer, Einer, Zehner, Hunderter usw. sitzen. Ob die Kinder das begriffen haben, was ist der Unterschied zwischen einem Einer und einem Zehner, wie viele Einer braucht es, damit ein Zehner aufgefüllt wird, ...jetzt Begriffe, ja okay.

Aber die Einführung geht folgendermaßen, ich nehme entsprechend viele Gegenstände, also so vielleicht nicht gerade 45, aber so 24, oder so irgendwas, Gegenstände mit – was soll das sein? Äpfel, Nüsse, irgendsowas kleines und lasse die Kinder das 1 zu 1 mal tun. Und dann kommt irgendwann einmal der Moment, wo die Kinder merken: Wenn ich jetzt 27 wegnehmen muss, dann geht das irgendwie mit dieser 5 nicht, d.h. ich muss noch etwas voraus schicken, ich lasse dann die Nüsse natürlich entsprechend ordnen: Einer – Zehner. Und dann merken sie relativ schnell, ich kann von 5 Einern nicht 7 wegnehmen. Und was mach' ich dann? Und dann nehmen wir einen der Zehner, wandeln den um in Einer, und dann geht's, dann geht plötzlich 15 minus 7. Und dass ich nicht vergesse, dass ich den schon einen weggenommen habe von den Zehnern, füge ich hier unten an, bei der zweiten zu subtrahierenden Zahl einfach so als Erinnerung für mich diesen einen Zehner noch hinzu.

Ja... Nachher heißt es dann ja schließlich für mich, ich nehme von 4 mal 2 weg, und einen hab ich schon weggenommen, von vorher, bleibt also noch einer. Oder die andere, die umgekehrte Variante: von dieser 4 hier, bleiben mir ja nur noch 3, weil ich ja schon einen gebraucht habe, von diesen 3 kann ich jetzt noch 2 weg nehmen. Und das braucht aber sehr viel Übung. Und irgendwann kommt dann der Moment, wo wir abstrahieren können, wegkommen von den Nüssen, und das an der Wandtafel x-mal üben und immer und immer wieder erklären, ja, das ist eigentlich langer Rede kurzer Sinn.

Frage 2

Also, ich weiß nicht, ob meine Kollegin Ihnen das schon gesagt hat, aber wir stellen also auch die zweite Variante so dar, dass also die MPK heißt: 123 mal 645. Hier ist es ja eigentlich umgekehrt gedacht, oder? Hier rechnet man die Retour. Und dann rechnen wir die 3 mal die 645, schreiben sie richtig hin, und jetzt kommen wieder die

Zehner, weil wir Einer, Zehner, Hunderter und Tausender.... Dann überlegen wir uns ja, was bedeutet diese 2, die bedeutet nicht einfach 2 mal 645, sondern 20 mal 645. Und dann kommt automatisch hier mal eine 0 hin. Und bei den Tausendern kommen dann 2 Nullen hin, und nach meinen Erfahrungen geht das relativ rasch, dann bei 6.-Klässlern, dass sie das begriffen haben, und irgendwann kommt die Automation, wenn ich dann in der 2. Zeile bin, muss ich zuerst mal die 0 hinschreiben für die Zehner, und in der 3. Zeile die 2 Nullen für die Hunderter und in der 4. Zeile die drei Nullen für die Tausender. Und das Problem stellt sich bei mir mindestens nicht so stark, in der 6. Klasse, wo Repetition schriftliche Multiplikation, weil das in der 4. und der 5. Klasse schon so eingeschliffen wurde mit den Nullen hinten, stellt sich dieses Problem bei mir jedenfalls nicht mehr so krass. Eben sehr selten...

Frage 3

Bravo! Super! Ja! Also, wenn ein Kind von sich aus auf so etwas kommt, dann hat es nur Lob verdient. Denn die Lösung, die sie ja hier präsentiert, die ist ja richtig, oder? Doch, doch, doch – doch die Fläche stimmt ja auch, ist ja alles okay. 2 mal 8... ja stimmt.

7.2 *Protokoll 02 S*

Alter der Lehrkraft: *28 Jahre*

Frage 1

Also erstens mal, ich weiß nicht, ob das relevant ist, aber diese Rechenweise führen wir erst in der vierten Klasse ein.

Richtig. Das hab ich inzwischen auch gelernt. Laut Lehrplan in Hamburg wird es in der dritten eingeführt, hier in der vierten. In dem einen Unterrichtswerk, dass das relativ verbindlich vorgibt, da steht's in der vierten Klasse. In den Lehrplänen heißt das.

Genau. Aber ich denke, ich meine, die Basis dazu beginnt natürlich schon in der Unterstufe mit sich wohlfühlen mit dem Zehnerübergang. Also ich würde sicher, bevor ich damit einsteigen würde, nochmal den Zehnerübergang repetieren, was dann den Kindern als Zweitklassen- oder vielleicht sogar als Erstklassenstoff vorkommt. Und ich denke, das ist die Basis dazu und dann würd ich ganz sicher mit den Behalte-Zeichen viele Übungen machen, um diese zuerst zu visualisieren, dass das nicht einfach 5 heißt, sondern das heißt 15. Und sicher viel mit Farben schaffen, mit Farben da vielleicht diese Eins dazuzeichnen und wie die dann da hinunterrutscht, damit man sie dann bei den Zehnern wieder dazu zählen kann. Wissen Sie, wie ich meine? Also, die weisen da ja vor allem auf die Vorarbeit hin und nicht auf die Einführung des Problems am *[unverständlich].*

Ja schon sowohl als auch.

Aha. Ja. Also ich denke, ein großer Teil da bei der Einführung der schriftlichen Subtraktion ist schon, dass die Darstellung, dass ich ganz klar mit den Kindern die Darstellung auf Häuschen-Blättern üben würde und mal nicht unbedingt nur aufs Ausrechnen bezogen, sondern nur eben, dass das wirklich alle begriffen haben, dass die Einer untereinander kommen und die Zehner und dann der Strich mit einem Lineal empfiehl... das üb ich jetzt schon, also das hab ich in der zweiten Klasse begonnen, sie immer wieder darauf hinzuweisen, dass die Einer untereinander kommen und die Zehner, weil ja, die Kinder haben das Orientierungsvermögen noch nicht, dass so in den Raum zu setzen , aber ich denke, in der vierten Klasse sollten das dann alle begriffen haben. Also ich muss sagen, ich muss da, wie ich da ran gehen würde, wirklich aus dem Ärmel schütteln, weil in unserer Ausbildung, von da hab ich praktisch nichts an Mathematik so Mathematikdidaktik mitgebracht. Also, es ist zwar schon nur ein paar Jahre her, aber ich denke, wirklich Grundlagen, wie wir das vermitteln, wird uns dort nicht weitergegeben. Und alles, was ich an Herangehensweise jetzt weiß, das hab ich mir selber durch die Lehrerkommentare, durch Lesen angeeignet. Aber dazu muss ich auch noch sagen, dass es, wenn man einsteigt, sehr viel Zeit erfordert, und deshalb hab ich auch nicht immer die Zeit, da wirklich darüber nachzulesen, und hab das dann einfach mit gutem Menschenverstand den Kindern begonnen beizubringen und dann geschaut, wie reagieren sie darauf. Und immer situationsbezogen mir gewisse Sachen einfallen lassen, weil ich merke, ah, bei diesem Kind klappt das nicht, und bei diesem Kind gibt's dort einen Knopf. Deshalb kann ich jetzt auch nicht so spezifisch sagen, das mach ich so und so und so.

Wie verstehen Sie den Zehnerübergang? Wie kommt der zustande?

Wie verstehen die Kinder den Zehnerübergang?

Oder wie verstehen Sie ihn, wie erklären Sie ihn sich selbst, den Zehnerübergang? Die Behalte 1, sagt man glaub ich auch.

Also, wenn ich die Behalte 1, die ja dann da unten hinkommt, das, denk ich, ist für viele Kinder am Anfang nicht verständlich, wie da dann die 1 der 15 da unten hinkommt. Die würd ich auf jeden Fall da oben hinein zaubern, damit die das sehen, bei 7 kann man auffüllen bis auf 15. Und weil die 15 da keinen Platz hat da oben, da würd ich sie da dann wieder zurück zaubern, da nach unten.

Aha. Und wie, also sie sagen zaubern... Die 1 entsteht sozusagen einfach. Sie malen dann die Eins einfach da oben in die Zahl hinein?

Ja. Ich würd natürlich so anfangen: 7 plus wieviel = 5. Das geht ja nicht. Jetzt muss ich da irgendetwas hinein zaubern, dass diese Rechnung geht. Weil ich weiß, dass ich, wenn ich da hinauf rechne, dann muss ich plus rechnen. Weil, wenn ich da hinunter rechne, dann muss ich minus rechnen. Also, das verstehen sie auch von den Zeilen her, dass, wenn ich in die eine Richtung plus rechne, dann ist es in die andere Richtung das Gegenteil. So wie auch beim mal und beim durch. Und ich denke, dass würde dann so Sinn machen, dass ich ihnen zeige, so und so, nach so ist es minus, von der oberen zur unteren Zahl, also wenn ich von der unteren zur oberen Zahl rechne, dann muss ich einfach plus rechnen. Und damit das geht, muss ich da hier der 5 eine 1 dazu zaubern, damit ich diese Plus-Rechnung auch machen könnte.

Frage 2

Ich habe noch nie in einer 6. Klasse Mathematikunterricht erteilt, und ich mag mich nur noch erinnern, wie ich selber in der Primarschule das vermittelt bekommen habe. Und ich mag mich nicht erinnern, dass das jemals ein Problem gewesen sein soll.
Ja, ich denke, so für mich macht es auch Sinn, dass wenn ich da bei der 123 zuerst mit 3 vervielfache, dann gibt es noch keine Probleme. Die Probleme kommen dann erst nachher, wenn ich da mit der 2, mit der 20... Aber wenn ich das den Kindern einfach so als... wenn die Kinder das lernen, dass zur Routine zu machen, dass wenn ich da zur Zehnerstelle komme, dass es ja eigentlich heißt: mal 20, dass ich dann einfach zuerst eine 0 schreibe. Das wäre jetzt da umgekehrt... Dann kann das gar nicht zurückrutschen an die Einerstelle. Und ich kann mich erinnern, dass wir das so als Regel hatten, dort eine 0 zu schreiben und dann erst zu rechnen zu beginnen. Und dann unten 2 Nullen zu schreiben.

Frage 3

Also, ich würde sie natürlich zuerst loben, dass sie das herausgefunden hat, wenn das noch nicht im Unterricht besprochen wurde, denn sie hat die wesentliche Erkenntnis gemacht, dass die Fläche von den Längen der Seiten abhängig ist, und wurde die Flächenberechnung noch nicht besprochen im Unterricht?

Also, es wäre möglich, dass ja, wär auch möglich, dass nicht.
Also in der vierten Klasse wäre es in Hamburg so, dass, ich glaube, der Lehrplan schon in der dritten Klasse einfache Formen der Flächenberechnung, und in der 4. Klasse auch schon diese Formel, dass sie der Flächeninhalt aus den beiden Seitenlängen errechnet. Das kann aber trotzdem bedeuten, dass ein Lehrer sagt, es sind andere Dinge wichtiger und wir haben es noch gar nicht gemacht, also dass diese Theorie überhaupt noch nicht vorgestellt wurde. Ich könnte mir auch vorstellen, dass dann ein Schüler wohl eher nicht drauf kommen würde. Also gehen wir mal davon aus, Flächenberechnung wurde schon mal besprochen.

Also, ich denke, wenn sie so ganz aufgeregt kommt, egal, ob es schon besprochen wurde oder nicht, ist es für mich ein Zeichen, dass sie eine eigene Erkenntnis gemacht hat. Und, ja, dass sie da größere Zusammenhänge verstanden hat. Und dass ist nur für mich schon mal ein gutes Zeichen, dass sie da einen Schritt vorwärts gemacht hat.
Und dann würde ich sie ermuntern, dass vielleicht noch mit mehreren Beispielen zu prüfen, ob diese Theorie auch wirklich stimmt, oder ob das jetzt nur auf diese zwei Beispiele zutrifft, und dann würde ich sie so noch ein bisschen prüfen lassen, und das Erfolgserlebnis geben, dass es auch wirklich zutrifft.

7.3 *Protokoll 03 S*

Alter der Lehrkraft: *49 Jahre*

Frage 1

Also, ich würde das vielleicht an die Wandtafel, oder wie ich das machen würde, weiß ich jetzt grad nicht, aber ich würde ihnen das Problem mal so präsentieren, wie es jetzt hier steht und sie dann mal fragen, ob sie das schon kennen, was das wohl sein könnte, und weshalb hier man die Zahlen untereinander schreibt, und ob das jemand schon kann. Und dieses Kind kann's dann erklären und dann geht's los, dann können sie's versuchen. Aber relativ kurz und bündig. Dann, was sie verstehen müssten, sagen Sie: sie müssten ja eigentlich Plus- und Minusrechnungen eigentlich bis 200, aber bis zu 30 müssen sie gut können. Je besser man das kann, desto einfacher ist diese Aufgabe zu lösen. Würd' ich den Kindern dann auch sagen, falls es Schwierigkeiten gibt und es jemand sagt, machen wir noch ein Training zwischen hinein mit sogenannten Kettenrechnungen. Wie sie ihnen schon bekannt sind: 3 + 5 + 2 - 1 + 9, damit sie das wieder ein bisschen merken, *so geht's, das muss ich sorgfältig machen [extremerHintergrundlärm]*.

Da passiert noch ´ne Menge mit dem Übertrag: Wenn Sie merken, es gibt vielleicht Verständnisprobleme, wie würden Sie das erklären?

Also, ich würde wahrscheinlich wieder mein Material hervor nehmen. Das sind die Hunderter, Zehnerstäbe und die Einerwürfel, würd' nochmals darauf zurückkommen, sagen, es wird da getauscht, man kann da wieder einen ganzen Zehner tauschen und deshalb muss man – bei 15 z.B., wenn man da zum Resultat kommt, braucht man einen Zehner, den man behalten muss. Bei der Minusaufgabe ist es ein bisschen komplizierter, da würd' ich mich aber eigentlich nur um die Kinder bemühen, die das nicht verstanden haben.

Ja... Ganz konkret an dem Beispiel. Wie würden Sie das da machen? Vielleicht nochmal das erste Beispiel, Sie haben Ihr Material, würden mit dem Material den Kindern, die das nicht so recht verstanden haben, das erklären.

Ja...Ich würd' sagen: Du musst von 7 auf 5 ergänzen, das geht ja irgendwie nicht, weil 5 ist ja kleiner. Was könnte die 5 für eine Bedeutung haben? a) Sie könnte 15 sein, vielleicht kommt jetzt die Antwort, vielleicht nicht. Wie viel wäre es dann? Also wäre es plus 8. Und dann würd' ich das mal notieren und sagen: Ja, jetzt, du hast gesagt 15, also wir müssen diesen Zehner irgendwie legen, und würd' ihn dann da hinlegen. Aber ich würd' vielleicht... Aber so auf die Schnelle kann ich das jetzt nicht sagen, weil es kommt auch ein bisschen drauf an, was die für ein Problem hätte. Ich würde es generell mit Material machen, oder... ich würde zuerst das Kind fragen, wie hat sie's gemacht, und was hast du dir selber überlegt. Dass ich ihnen ein bisschen sag, ob ich die obere Zahl legen soll, 45, wenn ich jetzt wieder, könnte ja auch eine Möglichkeit zeigen, *also* mit Material ___ eben vier Zehner, Einerchen, ich würde sagen, wir müssen 27 wegnehmen, das würde man eben machen, wenn man's legt. Die zwei Zehner weg und dann die 7 weg, und jetzt kommt halt, weil man nur 5 hat von den Einerchen, das mit dem Zehnerübergang. Und dann hierzu sagen: Das ist eigentlich ein Trick, dass es schneller geht, etwas. Aber eben, ich hab ja Probleme, wie soll ich sagen, gehört nicht ganz zu meinem Alltag. Wie gesagt, muss ich jetzt da ein bisschen überlegen, wie ich das dann mache. Aber ich würde mich an das Problem des Kindes eigentlich anlehnen.

Und Sie würden dann – wenn ich nochmal auf das Material zurückkommen darf – Sie haben oben die Zehnerstangen und die Einerchen und tauschen dann, oder Sie ziehen zuerst zwei Zehner ab, und dann wollen Sie die 5 Einer und sagen, das geht nicht. Und wie sagen Sie den Schülern dann, sollen sie weiter verfahren?

Dann kennen sie es eigentlich so, also sie wissen dann eigentlich, den Zehner tauschen eigentlich, sie können sich's auch denken, 10 sind, sonst müssen sie's halt legen, also bei mir auf der Bank sozusagen dann tauschen, sie bekommen dann zehn Einerchen, und dann können sie die 7 natürlich locker wegnehmen.

Gut. Ich verstehe.

Das Material kennen Sie ja wahrscheinlich. Cuisionairematerial heißt das...

Cuisionaire. Das sind die bunten. Wo auch jeweilige Farben bestimmte Längen bzw. Längen symbolisieren, ich kenn' das als Diogenes-Material, und dann gibt es eine Hunderter-Platte und einen Tausenderwürfel, dann theoretisch eine Zehntausenderstange und so weiter.

Genau... Ja, wir benützen eigentlich nur noch die Einer und die Zehner. Und die Hunderter, also die roten, blauen und gelben.

Frage 2

Ich würde auch zurückgreifen auf das Stellenwertsystem, also mit diesen Listen. Ich würde wahrscheinlich nochmals ein Zahlendiktat mit ihnen machen, also wie schreibe ich schön untereinander in einer Tabelle, da stehen eben Einer, Zehner, Hunderter und Tausender. Ich würde so diktieren, 12, 420, 634, 1002, und würde mal überprüfen, haben Sie das eigentlich ein bisschen begriffen. Und würde dann mit ihnen überlegen, wo stehen eigentlich diese Zahlen, das kann doch nicht sein, dass es nur so wenig gibt, wenn man einmal 600 multipliziert, 100 mal 100, das kann doch nicht das gleiche sein. Ich würde an eine Überlegung appellieren und mit diesen Listen ihnen versuchen, nochmals das herauszuholen, was ihnen eigentlich bekannt ist. Und dann würd' ich's auf der Wandtafel oder auf einem großen Stück Papier so Schritt für Schritt erfragen. Also, wo muss jetzt diese Zahl hin, warum dort und nicht dort und nicht dort.

Frage 3

Also, ich würde sie fragen, wie hast du das herausgefunden, wie kamst du auf diese Idee? Und würde sie dann bitten, das den anderen zu zeigen, je nachdem wie sie das erklärt, ob sie das erklärt, oder vielleicht könnte man das auch mit Hilfe einer Schnur machen... Dass man dann ein Stück abschneidet und dann merkt, man kann nicht mit der gleichen Fläche. Ich würde sie dann auch fragen, wann sie das herausgefunden hat und wie sie überhaupt auf die Idee kam, darüber nachzudenken, ob sie vielleicht zuhause umbauen und so etwas... würde ihr dann sagen, dass sie das unbedingt den anderen mitteilen soll.

7.4 *Protokoll 04 S*

Alter der Lehrkraft: *40 Jahre*

Frage 1

Also ganz wichtig ist hier sicher, den Zehnerübergang [zu] begreifen, und da gibt's – ich hab ja vierte, fünfte Klasse, das wird eigentlich in den unteren Stufen behandelt – gibt es dieses Übungsmaterial, die Klett-Schul-Stäbchen, das werden sie kennen. Also die Farbstäbe und dann gibt es eben auch neutrales Material, wo die Zehner, ich weiß nicht, ob Sie das kennen?

Diogenes-Blöcke nennt sich das bei uns. Das sind so Holzwürfelchen kleine, und dann Zehnerstangen und dann Hunderterplatten und ein Tausenderwürfel, und dann gibt es theoretisch eine Zehntausenderstange.

Genau. Also, natürlich ist das eine ganz mechanische ... mechanischer Ablauf. Wir haben das mit den Schülern zuerst mit Material, das war, glaub ich, in der... das war nach dem Aufbau war das so, dass das im mündlichen Rechnen zuerst begriffen werden musste, zuerst die Zehner zu subtrahieren und dann eben umgekehrt, dass sie jetzt einen Zehnerübergang möglichst mit Übungsmaterial darstellen. Und die schriftliche Subtraktion... ist eigentlich bei uns eine mechanische Sache, da hat man dann wirklich also...

Wie haben Sie das eingeführt, erinnern Sie sich noch, die schriftliche Subtraktion, die Mechanik?

Das hab ich nicht gemacht. Das hat meine Kollegin gemacht. Sie betreut die Viertklässler. Ich denke, das wird sie einfach an der Tafel vorgezeigt haben, wahrscheinlich die Fragestellung, ob jemand schon... Manchmal ist ja schon ein gewisses Vorwissen da und ich nehme an, dass sie das... Ich muss zuerst sagen, wie ich's machen würde, eben dass ist genau so eine Situation, dass ist jetzt total... *[langes Schweigen]* Ja, ich glaub, ich würd' einfach zuerst mal einen Lösungsvorgang entwickeln lassen, schauen, ob von den Schülern Lösungsvorschläge kämen, und dann einfach dann den Ablauf mechanisch dann zeigen, mit dem Ergänzen, wie viel Restbeträge unten.

Können Sie das noch... Gibt es einen Merksatz, oder so, den Sie dazu nennen?

Ja, einen Schweizerdeutschen, also jetzt von... in der *[unhörbar, „Stützaktion"-ähnlich klingend]*,oder?

Ja, manchmal spricht man ja dazu.

Ja, wenn ich das ergänz, also: „Sieben und wie viel sind 15?" Und wenn sie über den... Wenn die eine Zahl kleiner ist, dann „geht man über den Zehner", so Strecken, weil ich auch, das ist auch so *[unhörbar, evtl. „die ich auch hab"]* bei den Multiplikationen und Divisionen, so Merksätze, die die Schüler dann...: „Behalte 1, nehme 9 herunter, usw." Das machen *[unhörbar, „di..."]*, das sind wirklich gute Sätze, die sich die Kinder dann für den Mechanismus so aneignen können. Und wie reih' ich sie nun... Und wie die Richtigen jetzt mit 15, ja... *[völlig unhörbar]* Schreibe, behalte.

Schreibe 1, behalte oder wie? Schreibe, behalte?

Nein! Also schreibe auf: Wenn ich jetzt... Schreibe auf: „Behalte 1, drei, wie viel sind vier?"

Ach, schreibe, behalte... Ach, ja, dann ist klar!

Also macht ihr das nicht auch so?

Ach, es gibt so viele... Ich hab inzwischen so viele verschiedene Möglichkeiten kennen gelernt, dass ich jetzt gar nicht mehr sagen könnte, wer was wie wo macht. Dass muss ich erst noch auswerten in aller Ruhe. Aber danke, ist klar!

Also, das wird hier dann einfach auch eingetragen... Das hab ich jetzt auch... Das ist zum Beispiel jetzt etwas, was ich aus unseren Lehrmitteln – zum Teil wird das weggelassen, „Behalte" – und das find ich zum Beispiel sehr schwierig für gewisse Kinder.

Frage 2

Also, wir machen das umgekehrt... Wie gerechnet wird.... Also dieses Beispiel ist mit den...

Wir beginnen mit den Hundertern und rechnen von hinten nach vorne. Beginnen aber bei der hinteren Zahl mit den Hundertern. Das ist aber nicht vorgegeben, also das ist nur ein Beispiel.

Das hat mit den Stellen zu tun. Mit den Einern, Zehnern und Hundertern. *[Schweigen]* Also ich würde mal den Multiplikator *[unhörbar]* deutlich machen, dass zuerst mit den Einern multipliziert wird, also *[unhörbar]* mal, und dann mit den Zehnern und dann mit den Hundertern, und dadurch, dass ich die Stellen dann mit den Zehnern multipliziere, dass sich dann das verschiebt. Also, so verschiebt sich das dann dort, weil ich das will, lediglich. Das ist jetzt auch *[unhörbar]* Bild, muss ich jetzt sagen.

Frage 3

Warten Sie mal! Zu ihrer Theorie?

Ja, die Schülerin steht vor Ihnen und zeigt Ihnen diesen Zettel.

Also, ich würde, also die Klasse, die hat Flächenberechnung, das kennt sie, dass die Seiten – Länge über Breite, dass das nun also jetzt multipli..., das weiß sie, das wär' naheliegend, weil je größer die Multiplikatoren sind, umso größer wird auch die Fläche und die bestehen ja aus dem Bestande des Umfangs.
Das ist eine gute Erkenntnis. Was soll ich...? Ja.

Vielen Dank für das Gespräch

Ja, ich hoffe, ich hab... Ich merke, dass gerade in solchen also Fragen, ich... es schon voraussetzt, dass man sich wirklich... Aber auch mathematisch merk ich, dass ich oft selbst wieder mich richtig mit den Vorgängen auseinandersetzen muss. Und dass unser zum Beispiel Kommentar wirklich mathematischen Vorgängen eigentlich nicht mehr genügt. Unser Kommentar, dass ich mich oft auf diesen, dass ich mich da wirklich durcharbeiten muss, um den mathematischen Mechanismus zu begreifen. Also, manchmal sogar Dinge jetzt begreife, die ich gar noch nicht so verstanden habe. Und da ich jetzt, also ich weiß nicht genau, für was für Zwecke, dass ich da nicht so richtig unterm Tisch bin, weil ich eben erst ein halbes Jahr Schule gegeben habe, und ich vorher eigentlich nie Schule gegeben habe. Ich weiß nicht...Es würde mich nur wundern, weil für was... Oder hat es damit zu tun, ich...

[unhörbar] [unhörbar] Studie *[unhörbar]* Statistik über das niedrige Bildungsniveau der Lehrer in der Schweiz oder in Europa, weil ich finde, da bin ich nicht, der werden sie *[unhörbar]* wahrscheinlich nicht gerecht, weil ich denke, das hat mit der Auseinandersetzung der *[unhörbar]* zu tun. Und ich finde, die *[unhörbar] [unhörbar]* in der Schweiz, also, das kennen Sie ja wahrscheinlich...

Ja. Ich hab's mir grad gestern besorgt. Ich hab gestern gelernt, dass sie ein Buch haben, dass für alle Schulen in Zürich verbindlich ist, also am Unterrichtstag, mit dem didaktischen Kommentar dazu, hab ich mir angeschaut, das ist wirklich gut gemacht. Also, das ist anders als bei uns, wir haben alle vier oder fünf Jahre, wenn das Schulbuch verbraucht ist – wir leihen das den Schülern, die kaufen sich das nicht selbst – dann entscheiden wir bei einer Konferenz immer wieder neu über ein Buch, das wir einführen wollen. Dann gibt es 10 oder 15 Verlage, die bieten sich an, und sagen uns: „Das ist das Beste!", ja... Also hier gibt es dann eines, darauf kann man sich glaub ich auch ganz gut verlassen, das ist das...

Das ist sehr gut! Weil es eben auch wirklich einfach ist. Also, ich begreif manchmal, dass Mathematik sehr einfach ist. Und das ist sehr gut dargestellt.

7.5 *Protokoll 05 S*

Alter der Lehrkraft: *32 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *7 Jahre*

Frage 1

Was müssen die Kinder verstehen? Also, das Stellensystem, was ist ein Einer, was ist ein Zehner? – das müssen sie sicher verstehen, oder ein Hunderter, wenn es die größeren Zahlen sind... Sie müssen den Zehnerübergang – sagen Sie das auch so? *[Bestätigung]* – Von Neun nach Zehn... Den Übergang, den müssen sie sicher können, und sie müssen wissen, was ein Unterschied ist, also eigentlich – eine Unterschiedsrechnung ist eine Minusrechnung. Das sind eigentlich so die Bedingungen... Ja, ich denke, das sind so grob... Muss das noch genauer sein?

Wie würden Sie an solche Probleme herangehen dann? Wie würden Sie das unterrichten, so eine Aufgabe?

Ich würd's vielleicht zuerst einmal im Kopf versuchen, also mal zu überlegen, wie kann man eine Minusrechnung rechnen, und zwar mit einfachen Zahlen. Also 7 minus 5, das kann auch heißen, 5 und wie viel bis 7? Das mein ich mit dem Unterschied. Das mal erarbeiten... Und danach [zu] den größeren Zahlen übergehen. Also: „40 minus 20, oder 20 und wie viel ergeben dann 40..." So. Das versuchen, so beizubringen, eigentlich, ja, und dann zu erklären, dass ich also dann erkläre, dass man jetzt dann schriftlich, und das Schritt für Schritt oder Stelle für Stelle nach, also zuerst die Einer ausrechnen, den Unterschied ausrechnen, und dann die Zehner und dann würd' ich sicher das mal versuchen, mit dem – ich weiß nicht, ob sie das im Deutschen auch haben... *[hält Diogenes-Material hoch]*

Diogenes Blöcke!

Ja genau! Mit denen mal versuchen zu zeigen, warum es einen Übertrag gibt. Und zwar in Anlehnung daran, dass ich zuerst die Plusrechnung mache, die schriftliche! Weil ich dort *[unverständlich]* einfach - das sieht man ja – 5 Klötzchen und 7 Klötzchen, das gibt 12 Klötzchen! Bleiben also 2 Klötzchen und eine Stange. Und die Stange wär dann die nächste Stelle.

Ganz konkret an diesem Beispiel, wie würden Sie die Rechnung dann erklären?

Dann würd ich, also – schriftlich? Nur schriftliche?

Ja!

Würde ich ihnen zuerst erklären... darlegen, dass ich das erklärt habe, dass hier mit dem „und wie viel?" gerechnet wird, also mit der Ergänzung „7 und wieviel gibt 5?" – Das geht ja gar nicht: Also muss man über den Zehner hinaus! Und dann kann man - also ich mag's da jetzt nur vom Gefühl sagen – weil, wenn ich's mir jetzt überlege: „Wenn das jetzt nicht mit der 5 geht, kann ich ja mit 15 rechnen!" Also bis auf eben wie viel ich 15 hab? Wenn ich 15 nehme, hab ich ja wieder eine 1, die nicht zu den Einern gehört, sondern zu den Zehnern. Also zu der nächsten Stelle. Oder? Also, da kann ich auch 15 hinschreiben, wenn ich möchte. Da gehört aber diese 1 von 15 nicht zu den Einern, sondern zu den Zehnern.

Und woher nehmen Sie die 1? Woher nehmen Sie den einen Zehner?

Das nehm ich aus dem Verstand, dass ich sage: „Das kann gar nicht sein, dass ich sage: „Sieben und wie viel sind 5?" Also, dass denk ich ist jetzt nur für anspruchsvolle Kinder, d.h. die schnell verstehen. Das ist also, ja... Ich werde nicht... Bei Minus beschäftige ich mich nicht mit mathematischen Details! Ich denke, das macht's nur komplizierter, und dann nur mit Anlehnung an Plus. Also, ich würde es <u>nie</u> mit einer Klasse machen, wenn ich nicht weiß, die haben schon Plus schriftlich gemacht!

Und wenn Sie... Sie hatten also gesagt, normalerweise nicht in die Tiefe des mathematischen Verstandes... Wie haben Sie gesagt?

Nein, das war jetzt ein bisschen übertrieben, aber ich denke, es gibt gewisse... das ist ein Mechanismus, die Rechnung, *auch, [unverständlich, aber nicht tragend]*.

Und wenn Sie aber Schüler hätten, die in der Lage wären, das zu verstehen, wie würden Sie denen das erklären?

Also, das müsst ich mir zuerst genau überlegen, wie ich das erklären könnte, muss ich Ihnen ganz ehrlich sagen! Da bin ich vielleicht auch zu wenig ehrgeizig, womöglich!

Frage 2

Das muss ich mal an der Rechnung studieren. Ist das bei Ihnen so dargestellt*? [wird bestätigt]* Ja, okay. Wir machen das schon ganz anders. Da bin ich ein bisschen verwirrt. Also, schon die Darstellung ist bei Ihnen anders gerechnet... Also, wir bringen mit der... Ja, ganz interessant... Also... Im Moment *[unverständlich, murmelt vor sich hin, zu sich selbst]* Also, ich gehe da vom Grundsätzlichen aus, ich erkläre den Kindern, dass wenn ich Hundert...

Also, wir beginnen von Hundert. Wir beginnen bei 600.

Ja, ich hab das gerade eben gemerkt, also sechs mal... Wir beginnen mit sechs. Nee, wir beginnen nicht mit der 600, wir beginnen... Öh?

Doch, wir rechnen 600 mal 123, wir beginnen hinten zu rechnen.

Ok... Kann ich's schnell umdrehen, also, wir beginnen folgenderm[aßen] *[verschluckt]*, wir beginnen 123 mal *[die entsprechende Zahl, vernuschelt, Blick in die Notizen (Aufgabe) dürfte Klarheit schaffen]*, d.h. wir beginnen mit den Einern, 3-mal diese Zahl, dann 2-mal diese Zahl, dann einmal diese Zahl.
Also, hinten ... *[unverständlich]* an, *[unverständlich] [unverständlich]*. Sie kennen ja das Kopfrechnen, oder? Sie können Kopfrechnen. Sie können drei mal diese Zahl im Kopf, sie können 2-mal diese Zahl im Kopf, also das *[unverständlich] [unverständlich] [unverständlich].* Können sie im Kopf rechnen. Und wenn Sie z.B. 15 mal eine Zahl im Kopf rechnen, dann rechnen die meisten Kinder –sag ich jetzt mal – 10 mal diese Zahl plus 5-mal diese Zahl! Einverstanden? Mit das fang ich an! Da heißt es: Diese Rechnung rechnet man eigentlich so - wenn man's im Kopf rechnen würde: 100 mal diese Zahl, 20 mal diese Zahl, und drei mal diese Zahl. Schriftlich ist es genau dasselbe, nur beginnen wir nicht mit 100, sondern mit 3. Also rechnen wir drei mal diese Zahl, schreiben das da hin. Also, schrifliches Multiplizieren ist dann *[unverständlich]*: 3 mal 5 gibt 15, 3 mal 4 gibt 12 *plus drei [plus einen?]*, drei mal das gibt 9... Ja, so! *[malt]* Und jetzt haben wir hier drei mal gerechnet – jetzt muss man die 20 mal rechnen. Wenn ich eine Zahl 20 mal rechne, – heißt es bei uns so schön – kann man zuerst eine Null anhängen und dann 2 mal rechnen! Und das ist das, was sie machen. Also, sie hängen mal eine 0 an, und dann rechnen sie 2 mal diese Zahl. Also 2 mal 5 gibt 10. Äh, zwei mal vier gibt acht, gibt neun. Zwei mal 6 gibt 12.

Und jetzt müssen wir ja... Jetzt haben wir drei mal gerechnet, wir haben 20 mal gerechnet, jetzt müssen wir noch 100 mal rechnen. Wenn ich eine Zahl – *das ist jetzt ein bisschen* mit dem Stellensystem - hundert mal rechne, kann ich zwei Nullen dran hängen und dann 1 mal rechnen. Also kann ich die zwei Nullen anhängen, diese Zahl einmal rechnen. Und jetzt ist es *[unverständlich]* –sicher, dass man *[unverständlich, sagt]* zusammenzählen, oder? Wenn ich 15 mal die rechne... Und jetzt zähl ich diese Dreiketten zusammen, und dann *[rechnet]*.

Ja, das stimmt schon.

Und dann habe ich das so ausgerechnet. Also ich denk, und wenn... Also, es geschieht ja dann... Da fehlt jetzt eigentlich der *Auftrag*, dass sie diese Nullen vergessen. Und da eigentlich der Schritt, mach ich zurück zur vier, ja, musst du die Zahl, ja, wie viel mal, da müssen sie drei mal rechnen, da müssen sie aber eigentlich 20 mal rechnen und da müssen sie hundert mal rechnen. Und deshalb gehören diese Nullen dahin.

Frage 3

Pöh! *[unverständlich, geächzt] [lange Bedenkzeit]* Ich würde wahrscheinlich das Beispiel lesen, und dass mit dem... *[ächzt]* Moment! Ja*! [völlig unverständlich, redet Schweizerdeutsch mit irgendwem]* Ich würde antworten, sie soll mir einen Tag Zeit geben, um sie zu überzeugen!

Um sie zu überzeugen?

Nein, nicht zu überzeugen. Also, um das mal durchzudenken, und ich würde fragen, wie sie das herausgefunden hat sicher. *[Schweigen]* Und das ist Geometrie*, wenn ich das fragen darf*, eine *[unverständlich]* zu nehmen...

Es geht um Flächenberechung, es geht um Geraden, es geht um rechte Winkel, Umfangsberechnung... Das wär bei uns Geometrie.

Ich weiß es nicht so genau, muss ich Ihnen ganz ehrlich sagen! Ich weiß nicht so genau, wie ich antworten würde.

In dem Moment, spontan vielleicht...

Ja, spannend, interessant, zeig! Also, ich würd's schon aufnehmen... Denk ich... Wo ich beginnen würde, bei der Verschiedenheit der Körper, der Breite, oder ob ich sagen würde: „Mach's mal ganz schmal und mal ganz lang, oder such mal Umfänge, die gleiche Flächen geben... Also, würd' ich jetzt sagen, die gleiche Fläche geben... Ja, es ist noch eine Herausforderung dieser Schülerin, ja, *[unverständlich]* nicht.

Ja gut! Vielen herzlichen Dank für die Zeit!

Ja, gerne, aber ehrlich, ist ja ein bisschen unbefriedigend, aber ich... das ist das Schwierigste.

7.6 *Protokoll 06 S*

Alter der Lehrkraft: *57 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: *25 Jahre*

[Zu Beginn ausführliche Erörterung zum Modus, daraufhin holt die Lehrkraft irgendwas, sagt:]

Das ist so meine Spezialität. Dass ich das mit den anderen Systemen mache. Also, sie lernen jetzt vom Zehnersystem ins Dreier- und ins Vierer-, in alle Systeme umzurechnen, und nachher machen sie das dann selbst. Also, diese Holzsachen da drüben, sehen Sie die? Diese Holzplatten und so, die haben wir auch im Dreier- und im Vierer- und im Sechsersystem. Und dann legen die das vor sich hin, mit so einer Tabelle da, legen sie die Addition so zwei Einer und eine Stange... Kann es Ihnen nachher zeigen, wenn Sie wollen.

Ja, es ist schon klar. Das Prinzip ist schon klar.

Also, sie finden das selber heraus.

Aha. Ja gut... Trotzdem: Also ich lese die Situation einmal vor, und dann werden wir bestimmt schnell ins Gespräch kommen, sie haben ja auch schon den Anstoß gegeben.

Frage 1

Richtig. Also, sie müssten vorher in anderen Systemen denken können, weil, also in meiner Methode geht es immer darum, dass sie möglichst viel selber heraus finden. Also, ich gebe ihnen sicher nicht die Anweisung, 7 plus wie viel = 15, hier z.B., sondern, dass sie sich selbst überlegen, was ist das überhaupt: eine Differenz, was ist eine Differenz? D.h., die große Zahl minus die kleine Zahl. Oder auch der Unterschied zwischen der großen und der kleinen. Und dann können sie diese 45 z.B. im Dreiersystem legen... Im Dreiersystem gibt es ja nicht 45, weil da stimmen dann die Ziffern nicht. Also, da müsste es dann heißen z.B. 21 minus 12. Und dann müssten sie die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen da unten hinlegen, oder besser gesagt, diese beiden Zahlen zusammen müssen die da oben geben. Und das legen sie dann mit diesen Holzteilchen und merken dann selbst, dass sie einen Übertrag brauchen. Weil das ist nämlich eine geborgte Sache von den Zehnern auch im Zehnersystem. Die borgt man aus und wandelt sie um, dass man überhaupt diese „und wie viel“, diesen Sprung nach oben machen kann.

An welcher Stelle, würden Sie erklären, borgen sie aus?

Das müsst ich eigentlich gar nicht erklären, weil sie wären dann in der Situation – in der Addition geht es besser, oder?

Wollen Sie einen Zettel zum Malen haben?

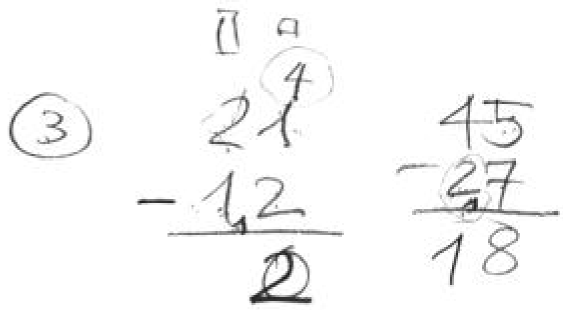


Abb. A 22: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 06 S

Also in der Addition kann ich's Ihnen besser erzählen, also z.B. 21 plus 12 im Dreiersystem. Dann sind das 3, also im Dreiersystem ist das sofort eine Stelle mehr von da, wir müssen also nur... und ein Übertrag. Und jetzt in der Division müssen sie ja den Unterschied ausrechnen: 2 plus wie viel = 1. Und das geht ja nicht. In dem Fall müssen sie, und das machen sie dann, da eine borgen. Da eine Stange nehmen und die umwandeln, dass es da nachher vier, da gibt es ja dann vier... aber weil sie da eine geborgt haben, können sie die da hinschreiben und dann zählen sie sie wieder ab. Dann zählen sie eine mehr weg, weil sie da oben eine auch weggenommen haben und da hinüber transportiert haben. Also, dass ist da das schwierige. Also, 2 + wie viel = 1, geht nicht. Also sagen sie das so, oder? Also, 2 + wie viel = 1, geht nicht. Ich wandle eine Stange, dass sind ja die Stangen da, das sind die Einer, um, also hab ich dann vier Einer. Und dann geht es: 2 + wie viel = 4... 2! Aber weil ich da eine geborgt habe, könnt ich da eine weniger schreiben oder da eine mehr subtrahieren. Und dann heißt es 2, *[unverständlich]* zwei Nullen. Dann sind das also zwei Einer. Und dann haben sie das dann nachher beim Zehnersystem ganz einfach, da machen sie jetzt gleich 45 minus 27, 7 +5 geht nicht, lieber sag ich: ich borg mir eine aus, und dann hab ich 7 plus wie viel = 15, da kann ich's ablesen, da müssen sie dann noch rechnen und das irgendwo hinschreiben, 8, und weil ich da eine weggenommen habe, kann ich jetzt, jetzt kommt das gleiche raus, da eine dazuzählen anstatt da oben eine wegzuzählen: 3+wie viel = 4, + 1.

Ja.

Und ich denke eben: Weil wir schrieben ja früher, behalte gesagt haben, behalte im Kopf, vergesse nicht, also ich als Schülerin durfte das nicht einmal hinschreiben, den Übertrag, ich musste das behalten, musste immer so die Finger ausstrecken, damit es schön aussieht, und deshalb hieß es behalte, und dieser Übertrag ist jetzt schon von sprachlich her klarer. Und wenn sie jetzt noch wissen, warum sie das machen, weil sie's behandelt haben mit den Händen – sie machen das ja zu zweit, da muss der Eine dem Andern sagen: Ha, tausch mir da eine Stange um in Einer, und der schreibt dann den Übertrag, weil er eine gegeben hat – dann ist das verankerter, als wenn es nur so kurz erklärt wird und dann so gedreht.

Dankeschön.

Frage 2

Also, das hat wieder mit dem System da oben zu tun. Also, wenn jemand das Zehnersystem verstanden hat, dann sollten sie auch, oder, dann wäre ja 123 mal 645 einmal 3 mal 645 und nachher 20 mal 645 und nachher 100 mal 645. Und das ist schon ein Thema der vierten Klasse, wenn man... ich sage, ... grüne Nullen. Die haben die Funktion, dass die 2 nicht da ist, sondern da. Also, wenn diese grüne 0 nicht da wäre, dann wären es zwei Einer. Und die schiebt quasi dort oben eben auf dieses Kästen da, das ist dann die grüne Null, dort die letzte, oder? Dort oben klebt die... Und dass die wissen, dass wenn ich 10 mal eine Zahl rechne, dann hat die hinten eine Null. Immer! Und wenn ich 20 mal eine Zahl rechne, dann hat die eine 0, und ich kann 2 mal rechnen. Dann wird also da... Weil, das ist ja 3 mal, das ist ja richtig, das sind 3 Einer. Und 2 mal, das sind ja Zehner, also muss da eine 0 sein. Und dann schiebt sich die 2 da hin und die 9 und die 4 da. Und bei 100 mal sind es 2 grüne Nullen, also müssen es da 2 grüne Nullen sein. Und ich stelle es sogar frei, ob die dann da Nullen schreiben oder nur rücken. Es gibt Kinder, die wollen dann diese Nullen schreiben, damit sie sich das

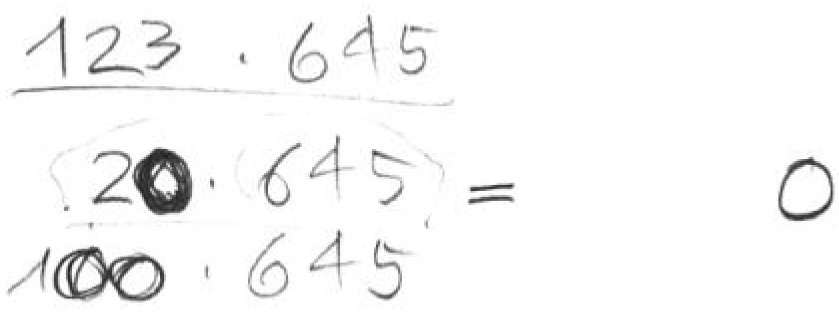


Abb. A 23: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 06 S besser vorstellen können: da hab ich dann da keine Null, und da eine, und da zwei. Also, das ist eigentlich kein großes Problem. Denn wenn das Dezimalsystem so klar ist, dass sie da sehen, oh ja, das ist ein Zehner, also 20, dann kann es niemals da sein. 20 mal 645 kann nicht 492 sein. Und da *[unverständlich]* die Disziplin, eben genau untereinander zu schreiben in die Häuschen, und das ist auch etwas schwieriger.

In die Häuschen heißt in die Kästchen?

Ja, wir sagen eben Häuschen. Ihr sagt Kästchen?

Ja... Aber das ist ja egal.

Aber das ist komisch, weil wir machen das anders!

Ihr fangt bei den Einern an, nicht wahr?

Ihr auch, oder?

Nein, wir fangen bei den Hundertern an [erklärt]

Ah, das ist schwer. Da könnt ich es schlechter zu erklären. Wo da jetzt die sieben hinkommt, und wo da... 6 mal 3 gleich 18, das kommt also unter die 6. Aha!!! Und vier mal, das kommt dann unter die 4, und 5 mal unter die...Ja, das ist auch nicht schlecht das System.

Frage 3

Dass es nicht stimmt. Also, ich würde ihr aus Gummi, ungefähr 16 cm, also ich würde Gummiband 16cm, und dann, dass es einen Knopf gibt, und dann würd ich da mit Stecknadeln das einstecken. Dann würd ich den Umfang – was hat sie da verdoppelt? Das hat sie verdoppelt. Dann würde ich... nein, ich würde mit dem arbeiten, dann würde ich... äh... ein langes Rechteck machen, oder? Also ich würde mit diesen 16 cm spielen, und immer die Fläche ausrechnen. Also, das ist 4 mal 4, 16. Dann, wenn ich da 2 cm nehme und da 2, macht das 6, stimmt das, 2 x 6, 12. Und dann würd ich das noch dünner machen, 1 cm, 1, 1, 7, und dann würde ich es noch dünner machen, dass es gar keine Fläche mehr gibt...

Ich würde ihr aber sagen, sie soll weiter forschen. Oder, man sieht es ja auch: Also, ich muss sie ja enttäuschen, aber ich würde sie a: loben, dass sie das interessiert und eine solche Behauptung aufstellt und dass sie dann weiter interessiert, warum das nicht so ist, und im Moment käme mir nur die Gummi-Variante in den Sinn.

7.7 *Protokoll 07 S*

Frage 1

Also, was mir zuerst auffällt ist, dass ich solche Aufgaben niemals schriftlich rechnen würde. Und, weil das für mich wirklich noch im Bereich ist des Auswendig-im-Kopf-Rechnens-Bereich. Und, das ist ja das wichtige noch mit diesem Zehnerübergang, eigentlich, der immer wieder auch Schwierigkeiten macht, ich denke, das ist etwas ganz Grundlegendes, was die Kinder begreifen müssen. Das ist nun mal das Grundlegende, finde ich. Find ich lustig, dass diese Beispiele für die schriftliche Subtraktion kommen. Okay. Und dann würde ich – also, ich hab ja gesagt, dieser Zehnerübergang müsste klar sein, wie beim Ergänzen-können – und würde nachher wieder darauf zurück kommen, was sie schon können, dieses Ergänzen. Und würde hier dann dasselbe machen. Und würde dann immer die Zehner oben hinschreiben, dass ich mir 10 dazu nehme, dass ich hier oben ergänzen kann. Ich würde zu Beginn diese sogar diese 10, die ich dazu nehme, oben schreiben lassen, und nehme sie nachher bei der nächsten Zahl weg. Mmh.

Das versteh ich noch nicht: Bei der Zahl unten nehmen sie dann weg?

Ja, weil ich sie oben dazu tu, muss ich sie unten wieder wegnehmen. Dass ich wieder gleich viel habe. Ich muss... das andere habe ich wie gesagt im Kopf gerechnet, darf ich das noch mal sagen. Und wenn ich die schriftliche Subtraktion anschaue – ich würde das jetzt mit höheren Zahlen jetzt auch schon anschauen, würde ich zuerst das noch einmal anschauen! Dass, wenn ich bei einer Zahl 10 dazu tue, hier bei der oberen, damit ich da überhaupt ergänzen kann, muss ich's nachher, wenn ich subtrahiere, unten wieder wegnehmen, muss ich's auch wieder wegzählen, dass ich gleich viel habe. Aber ich würde sagen...

Moment! Nur dass ich's richtig verstehe: Sie würden dann von den 7 Zehnern hier einen wegnehmen?

Ich würde ja hier oben eine Zehn hinsetzen, dass ich rechnen kann: 9 + wie viel sind 11. Das rechne ich, oder? Okay. Also hier oben 10..., die ich dazu tu, 10 Einer oder einen 10er. Und diesen einen Zehner rechne ich nachher hier unten gerade wieder weg. Also, den nehme ich hier hin, dass ich nachher eigentlich wie 87 wegzähle. Aha, ich nehme ihn... Ich zähle ihn nachher dazu. Das mach ich.

Ach so!

Okay? Dann hab ich ja wie eine 7, und den Übertrag, also die Behalte, wie wir sagen, 1. Dass ich nachher rechne 8 + wie viel = 9.

Ja, genau. Okay.

Ich bin ganz nervös...

Soll ich lieber ausmachen?

Nein, ist okay. Ich glaub, ich beruhige mich langsam.

Und, wenn Sie hier die 1 hier unten mit hinnehmen, dann bedeutet das, in dem Moment, wo sie die 1 schreiben, dass sie sich merken, dass sie von der 7 einen wegnehmen. Oder was bedeutet dann die 1?

Nein. Ich nehme sie dazu. Eigentlich nehme ich hier den Zehner dazu. Aber ich muss hier den auch noch wieder weg zählen. Ich möchte so gerne schreiben können.

Ja, gern... Sie können gern auf den Zettel hier. Das ist, denk ich, kein Problem.

Also, wenn ich hier 10 dazu nehme, dann muss ich diese 10 hier unten mit dazu zählen zu dem, was ich abzähle. Okay?

Ja.

Und das schreibe ich mit der Zeit nicht mehr. Das denk ich mir nur noch und ich schreibe nur noch dieses. Aber die Kinder, die müssen verstehen, warum ich hier eine Behalt-Zahl hinschreiben muss. Und sie müssen verstehen, dass ich eben hier, weil ich zum Ergänzen eben 10 mehr brauche, zähl ich da 10 dazu, dann darf ich die aber nicht einfach vergessen, sondern ich muss sie dann hier doch wieder dazu nehmen, zum Abzählen.

Ich kann mir aber auch ein kleines Regal bauen. Da muss ich das oben aufschreiben, und dann hab ich unten Kästchen, drei, und dann legt sie nur mit Bätzchen dann eben rein, und dann machen sie das mit dem Umtauschen...

Bätzchen?

Ja, wir sagen Bätzchen. Irgendetwas falsch gemacht? Also mit so kleinen Dingen und dann können sie's eben umtauschen. Das hab ich auch schon gemacht. Und was ich dazu auch sagen muss: Dass ein ganz kleiner Teil der Kinder das wirklich versteht, denk ich mir.

Ein kleiner Teil?

Ja. Und den anderen sag ich dann einfach irgendwann mal: Gut. Behalte-1. Und ich bin überzeugt, ganz viele wissen dann später trotzdem nicht mehr, was sie machen...

Frage 2

Ich hab das auch schon beobachtet. Es ist lustig, wir machen es gerade umgekehrt... Die schriftliche Multiplikation... Wir beginnen bei den Einern und... ich habe es immer so eingeführt, dass die Kinder irgendetwas machen müssen anstelle von diesen Häuschen auslassen. Also, dass sie dort auch noch etwas schreiben. Eine Null oder einen Punkt. Ich würde es umgekehrt rechnen, also diese Zahl würde bei mir hier oben stehen. Und dann würde ich also den Zehner-[] rechnen, dann kann ich quasi... Ich fülle einfach diese Löcher hier hinten. Ich kann auch sagen, 3 mal 4 gibt ja eigentlich... oder eine 0 setzen, oder? Und ich würde eine 0 setzen -. in meiner letzten Klasse habe ich es mit Nullen unterrichtet, wo ich diese Löcher fülle, und auch so begründet, dass es eben nicht 12 sind, sondern eben hier 120 sind. Weil ich 3 mal 40 rechne.

Frage 3

Ich würde sagen: Ich brauche einen Moment. Ich muss es ausprobieren! *[probiert aus]*. Ich würde mal antworten, dass ich auch ein bisschen Zeit brauche. Ich kann das nämlich jetzt nicht gerade sagen; es stimmt schon, würd' ich sagen. Ich würde mit ihr ganz viele verschiedene Beispiele zuerst machen, und sie das mir noch mehr beweisen lassen, oder sogar mit ihr zusammen sagen: Okay. Ich hab mir das noch nicht so gedacht, also machen wir doch zusammen noch andere Beispiele, dass würd' ich mal zuerst sagen. Und ich bin mir nicht sicher, dass das stimmt, ich muss ein paar Beispiele für mich machen. *[macht Beispiele]* mmh...

7.8 *Protokoll 08 S*

Alter der Lehrkraft: *31 Jahre*

Frage 1

Also, erstmal, was die Kinder meiner Meinung nach noch verstehen oder tun können müssten, wär ganz klar das Zehnersystem wirklich verstanden haben, dass man immer nur auf Zehn auffüllt und dann das nächste Zehnerpaket anbricht, sozusagen, ich würde es bestimmt... Ich hab's auch behandelnd eingeführt, also wirklich mit den... indem ich's am Boden als Tabelle... nicht Tabelle, wie sagt man denn – so ein Gittersystem, so am Boden ausgelegt habe, was bekannt sein muss, unbedingt, es wird aber auch dazwischen eingeführt, was Einer sind, was Zehner sind, 4. Klasse auch schon, was Hunderter und Tausender sind, dass es klar ist, dass immer, wenn ich 10 Einer hab, eben ein neuer Zehner entsteht. Das muss aber gefestigt sein, den ganzen Wortschatz, denk ich mir...

Und das dann auch wirklich handelnd auch zu machen. Und das geht natürlich nur dann, wenn ich eben mir auch aufschreibe, dass ich beim Übertrag eben eigentlich aus 10, also mir mitnehm... also nochmal neu: Dass ich mir im Prinzip eigentlich von den 10ern, jetzt beim ersten Beispiel 45 minus 27, dass ich mir eigentlich von den 10ern einen Zehner leihe, damit ich eben die 15 machen kann aus der 5. Damit ich die 7 wegnehmen kann, dass ist in unserem Lehrmittel so drin. Und wenn ich also merk: Aha, ich kann hier nicht 5 minus 7 rechnen, das geht gar nicht, da hab ich gar nicht genug, also hol ich mir bei den Zehnern ein Zehnerpaket hinüber, mache 10 Einer draus, dann sind es 15 Einer, und dann kann ich die 7 wegnehmen, und da ich aber ja ein Zehnerpaket geklaut habe, muss ich das ja wieder dazugeben.

Aha. Und das geben sie dann unten wieder dazu.

Ja, das wird dann... Also im Prinzip beim Handeln ist es ja dann so, dass ich sage: Dann heißt's ja plötzlich – da muss ich selber aufpassen, dass ich da kein Durcheinander mache – dass ich sagen, dass ich jetzt natürlich, weil ich oben wegnehme, unten auch 1 wegnehmen muss. Aber ich muss ganz ehrlich sagen, ich hab jetzt gerade vergessen, wie ich das erklärt hab. Ah gut! Da hab ich wirklich ´nen Blackout jetzt! Im Prinzip stimmt das schon so! Also, dass ich das Zehnerpaket also im Prinzip oben dazu tue, weil ich's ja rechts auch dazu getan habe. Und dann unten auch wieder wegnehmen muss, genau so war's. Also, ich ab ja bei den 15 die 10 eigentlich geschenkt, sozusagen, ich 10 mir irgendwo aus dem – also ich hab's so gemacht bei den Kindern: Wir haben das ausgelegt, 45, 27, und dann hab ich gesagt:

5 minus 7 geht nicht, hol ich mir von irgendwo 10 Einerchen, weil 15 minus 7, das geht. Jetzt hab ich aber der Rechnung 10 Einerchen bei der oberen Zahl dazu getan, da muss ich die auch wieder wegnehmen. Wo nehm ich die weg? Am besten bei den Zehnern halt einen mehr wegnehmen. Dass sich das ausgleicht. Und das Schwierige daran war, gerade am Anfang, dass die Kinder dann mit 10 Einerchen und einem Zehner – wir haben so Stäbchen hier auch als System; die sind war nicht mehr so aktuell, aber so die Unterstufe benutzt die eigentlich schon noch, so viel ich weiß - das Problem war dann, dass sie nie begriffen haben, dass ich ja nicht einfach mehr Zehner zudenken darf, bei den 5 ´ne 15 draus machen und das dann so stehen lassen. Sondern ich muss ja irgendwoher diese 10 haben – und da ich diese 10 von irgendwoher genommen habe, muss ich sie eigentlich dann auch wieder wegnehmen. Die nehm ich dann bei den Zehnern wieder weg. Und genauso den Zehner zu den Hundertern. Ich hab aber bemerkt, dass ich bei den Kindern... Es hat dann einige Kinder gehabt, die haben das von Anfang an extrem gut begriffen, das System, das Prinzip, dass man sich einen Zehner ausleiht, dass man eigentlich sagt: 7 + wie viel gibt 15 und deswegen behalte 1; und dann hat es andere, die haben einfach das System auswendig gelernt, aber nicht richtig begriffen, warum! Also ich denke, da hab ich zwar oft gehandelt, aber irgendwie war das dann nicht ganz so klar. Am Einfachsten ist natürlich noch ganz am Anfang, wenn man halt einfach wirklich sagt: Ja, 45 minus 27, das kann ich ja sogar nicht schriftlich mit den Kindern einfach mal machen, also wirklich *[unverständlich]* also weiß, was es geben müsste, und damit könnt ich beweisen, das ist logisch so. Aber ich hab schon gemerkt, also schriftlich Subtrahieren hab ich so etwas... Das ist eins von den Dingen, wo ich finde, dass es bei einigen Kindern gleich von Anfang an klick macht, und bei anderen es sogar erst in der 5. Klasse dann irgendwie so klar ist. Und dann halt ein paar, wo ich wirklich denke, wie aber auch sonst einfach allgemein mit Zehnerübergang, und was heißt denn hier von 15 minus 7 wegnehmen, aha, da geh ich ja unter Zehner und so, da denk wirklich, das ist sehr oft auch einfach Automatismus. Die machen das dann richtig, und die begreifen auch, dass sie jetzt weg rechnen, aber nicht unbedingt wirklich tatsächlich, was sie auch mathematisch da eigentlich machen.

Frage 2

Ich muss jetzt ehrlich sagen: Das ist ein ganz anderes System, als wir es haben, diese schriftliche Berechnung.

Sie beginnen vorn und rechnen dann zur hinteren Zahl, oder?

Ja, wir rechnen z.B. also bei der vorderen Zahl beginnen wir bei den Einern, z.B. rechnen wir 3 mal 5, 15, schreib ich 5, behalte 1 im Kopf, 3 mal 4 ist 12, plus 1 sind 13 usw. und schreiben es dann natürlich auch verschoben; aber so... Und irgendwie bin ich jetzt vielleicht zu doof, aber ich versteh echt nicht ganz, wie das hier gerechnet wird. Können Sie mir das erklären? Also, die untere Rechnung.

Wir fangen mit der Hinteren an, mit den Hundertern der 2. Zahl, und rechnen 600, also 6 mal die 3 Einer von den 123, sind 18, schreibe 8, behalte 1, behalte den einen Zehner im Sinn, usw.

Von hinten nach vorne.... Also genau umgekehrt. Genau umgekehrt verschoben. Also eigentlich geht's tatsächlich schon um das gleiche. Also ich find – mir gefällt unser System besser, aber kommt genau aufs gleiche raus – weil bei unserem System kann man eben von hinten mit Nullen auffüllen, deswegen gefällt mir unser System besser. Also, wenn man jetzt 123 mal 645 rechnet und zuerst 3 x diese 645 rechnet, sagt man, jetzt rechnen wir die 1 mal diese Zahl und schreiben die einfach unten hin. Wie gewohnt. Wie's von Anfang an war, wenn wir mit einem einstelligen Multiplikator gerechnet haben. Und dann ist es ja so, dass jetzt die 2 an der Stelle der Zehner steht. D.h., also mein Ergebnis ist 10 mal größer, also muss ich unten dann eine 0 anfügen bei den Einern, und bei den 10ern anfangen mit dem Einfügen, die Häuschen. Das schiebt sich so nach links dann eine Stelle. Also genau umgekehrt halt: Hier geht's... kommt aufs Gleiche raus eigentlich, ich bin's nur noch nicht gewohnt. Und dann, beim dritten Mal sagen wir: Aha, die 1 steht an der Stelle der 100er, eigentlich würde die Rechnung, wenn wir jetzt Zehner und Einer einfach vergessen würden, ja heißen 100 mal 645, also muss ich hinten 2 Nullen einfügen, weil 100 mal ist ja schon 100 mal größer, und dann noch die 1 mal 5 und mal 4 und mal 6. Und wenn ich sehe, dass sie das vergessen haben, dann würd ich halt wirklich nochmal alles einzeln ausrechnen lassen, also zuerst 3 mal 645, und dann 20 mal 645, und dann 100 mal 645, und dann zusammenfassen. Ich denke, dass eben bei der 20 mal 645 ja im Prinzip zuhinterst eine 0 ist, wenn ich das 20 mal rechne, und bei 100 sind dann eben 2 Nullen. Und das ist genau diese Verschiebung, die das ausmacht. Und hier noch, also, ich muss jetzt sagen, bei der Klasse, die ich habe, wenn man das... Das ist witzigerweise überhaupt nicht passiert. Also das ist irgendwie beim Einführen, ich finde unser Lehrmittel wirklich sehr gut dargestellt, weil man diese 0 hinschreiben muss, also man muss wirklich 20 mal 645 von Anfang an auch sagen, ganz bewusst, und mit der Zeit dann schon nicht mehr, und deswegen kommt die 0 automatisch dazu. Also in diesem Falle wäre es ja zuoberst einfach 2 Nullen. Stimmt das? Ja. Oder, wär ja eigentlich 600 mal 123 und dann 40 mal 123.

Ja genau! Und dann, was würden Sie tun?

Ja, eben, also ich würde halt also mit diesen Schülern, die immer noch so rechnen, wirklich noch mal richtig auseinander nehmen, was denn das eigentlich heißt. Dass das eben nicht nur einfach im ersten Falle 6 mal 123 ist, sondern eben 600 mal. Das einfach einzeln nochmal ausrechnen, und dann wieder zusammenfügen.

Frage 3

Ich muss ja doch einen Test legen... Ich würde der Schülerin, glaub ich, mit Hilfe des Rechtecks würde ich das glaub ich machen, weil das ist ja hier die Fläche ist 32, Umfang ist 32, und sie behauptet ja, je größer der Umfang ist, desto größer auch die Fläche größer wird. Dann würd' ich wirklich ein anderes Beispiel nehmen mit dem Umfang 24 cm – z.B. 2 mal Länge, 2 x Breite, wär' dann schlau – z.B. 10 cm Länge, 2 cm Breite, damit ist der Umfang gleich groß, die Fläche wird aber kleiner, und jetzt würd ich das wirklich das noch so probieren, dass ich den Umfang noch größer mache, z.B. – nehmen wir 10 cm Länge, 3 cm Breite. Dann ist der Umfang ja größer. Dann ist mein Umfang ja nachher 26 cm, aber Fläche wird kleiner. Stimmt das? 3 mal 10 = 30, Glück gehabt. Und damit würd' ich ihr das Gegenteil beweisen, und sie dann auch bitten, mit z.B. vom gleichen Umfang mal alle möglichen Rechtecke aufzuzeigen, und dann zu merken, dass die Fläche sich ja beim gleichen Umfang schon immer verändert, also schon deswegen die Theorie ja nicht stimmen kann. Dass, wenn der Umfang größer wird, die Fläche größer wird, weil schon nur der gleiche Umfang verschiedene Flächen haben kann, oder auch das Umgekehrte, dass ich ihr eine Fläche gebe und sie die verschiedenen Umfänge ausknobeln lasse, die dann möglich sind. Also gerade beim Umfang, das ist jetzt gerade ein Thema – das kommt ziemlich spät dran, das kommt erst i.d. 6. – haben wir wirklich genau das gemacht, also, ich glaub, die Fläche war 24, weil die sich so gut eignet.... Da haben wir das wirklich aufgeteilt in cm², aufgeteilt und ausgeschnitten, also 1 mal 24, 2 mal 12, 3 mal 8, 4 mal 6... ___ mal 36, weil wir dieses Quadrat ja auch noch... also wir dann wirklich alle Flächen haben, also 1 mal 36 usw. Und dass sie eben dann auch gesehen haben, ganz deutlich, dass ganz verschiedene Umfänge genau die gleiche Fläche ergeben können. Also, ich denke halt, ich würd's wirklich halt mit dem Gegenbeweis machen.

7.9 *Protokoll 09 S*

Alter: 25

Anmerkung: Die Lehrkraft erklärte sich bereit, während einer Mittagspause mit mir zu sprechen, schien jedoch nicht sonderlich motiviert, als sehr junger Teamkollege (die Klasse wird aufgrund des jahrgangsübergreifenden Systems zu zweit unterrichtet) ebenfalls auch nicht besonders mathematisch kompetent, meine Fragen zu beantworten.

Frage 1

...sind jetzt alles Beispiele mit Übertrag hier... Ich werd mal auf diese Fragen antworten, die sie hier gerade stellen.

Ja, gern!

Als erstes – also, das hab ich jetzt auch zum ersten Mal gemacht, in der vierten Klasse – diese schriftliche Subtraktion eingeführt, und dann hab ich natürlich begonnen mit Beispielen ohne Übertrag, wo man nicht den Rest rüber schreiben muss. Und dann ist es natürlich schon so, dann fragt man sich, wie sollt man's den Schülern jetzt erklären, wieso man hier sieben nach 15 rechnen muss, und da eine 8 hin schreiben, wieso man das mit diesen Einern und Zehnern, mit diesen Stellenwerten, erklären muss, aber ich hab das sein gelassen. Ich hab ihnen einfach gesagt, dass, wenn sie da nicht subtrahieren können, dass sie hier oben nicht eine 5 denken müssen, sondern eine 15. Und dass sie dafür diesen Zehner von der 15 hier runterschreiben müssen. Also, wir machen das so. Macht ihr das auch so, ich weiß nicht?

Ja, wir auch so. Und, also, Sie haben ihnen den Weg erklärt. Sie haben ihnen sozusagen den Weg erklärt, aber nicht erklärt, wie der Weg funktioniert.

Wieso das... Also, für was diese Eins steht, und dass man hier eben diesen Zehner, den man hier ergänzt , eigentlich, oder...dass man den hier rüber schreiben muss. Aber ich find das sehr kompli...Ich find das sogar für mich sehr schwierig nachzuvollziehen. Ich seh' nicht ein, wieso das die Kinder sehen müssen.

Ja... Und wie wär das für Sie, wenn sie das für sich erklären müssten? Oder von jemandem, der jetzt danach fragt, und sagt: „Das verstehe ich nicht. Was soll die 1 da oben, und was soll...“

Ich würde das auch zuerst nachlesen, oder mir sehr, sehr wohl überlegen. Das find ich eine sehr komplexe Überlegung.

Ja. Okay. Gut. Dann gehen wir direkt zur zweiten Aufgabe.

Frage 2

Ich habe noch nie in einer sechsten Klasse unterrichtet, aber ich weiß... Wieso haben die das... Was ist der Grund, dass sie das so schreiben als jetzt? So macht ihr's richtig in Deutschland... Mmhh. Ach, dann beginnt ihr mit den Hunderten da, einmal... Wo macht ihr das?

Wir beginnen mit den sechs Hundertern, und rechnen die Sechshundert mal drei.

Mmhh. Okay. Dann habt ihr das sechs mal drei... Ja, klar! Ach, einfach irgendwie's den Kindern klar zu machen, dass hier alles mit Hundertern multipliziert wird, dass sie nicht einfach mit dem Stellenwert nur... Ist ja ähnlich, wie wenn man im Kopf, wenn sie das aufteilen müssen im Kopf, wenn sie, zwanzig, das aufteilen zuerst mal. Das mal zehn rechnen, also die mit den Zehnern, und dann die Einer noch zwei mal 25. Dass es deshalb wichtig ist, dass man das ans richtige Ort hin schreibt. Dann könnte man hier irgendwie vielleicht anzeigen. Hier ein H für Hunderter, und da ginge es dann weiter, Tausender, Zehntausender... Zehner, Einer...

Frage 3

Also, was macht sie genau? Sie hat's ja richtig gemacht, oder?

Also, sie sagt, dass mit dem Zunehmen des Umfangs einer geschlossenen Figur auch gleichzeitig die Fläche größer wird. Verstehen Sie dieses Bild?

Diese zwei Bilder zeigt sie mir. Sie hat's ja richtig herausgefunden, oder? Ich würde ihr antworten, dass sie sehr schlau ist, dass sie das gut gemacht hat...Also, ich versteh's nicht...

Ja, also...

Ach, ich würd’s vielleicht einmal herausfinden, wie sie das gerechnet hat, wie sie auf diese 16 cm² kommt hier. Und wie sie hier auf diese Fläche kommt... Oder hab ich da jetzt was falsch verstanden?

Nein, es geht schon darum, wie Sie ihr antworten, damit...

Ja, weil, also, wenn sie in der vierten Klasse, hier, das ist gar noch nicht Thema, Flächenberechnung hier noch gar nicht. Deshalb, in der Schweiz wär das ja, hätte die was von sich aus herausgefunden, und das würd ich natürlich sehr gut finden. Hat sie ja vielleicht die Eltern gefragt, oder so...

7.10 *Protokoll 10 S*

Alter der Lehrkraft: *24 Jahre*

Frage 1

Was die Kinder sicher mitbringen müssten, das ist der Zehnerübergang. Dass der Schritt über die 10 hinaus, dass sie das beherrschen. Weil sonst kann man nicht mit Übertrag rechnen. Und dann würde ich den Kindern mal eine solche Aufgabe stellen und sie selber daran gehen lassen: „Probiert mal! Wie würdet ihr sowas ausrechnen?“ Und dann hat’s vermutlich Kinder, die das im Kopf machen, weil sie schon weiter sind, andere, die wie die Esel am Berg stehen, und dann würd’ ich sagen: Das ganze wieder zusammenführen und sagen, jetzt machen wir‘s miteinander. Und zwar schreiben wir uns zuerst nur die Einer ab. Wenn ich – ich kann ja nicht 5 rechnen, 5 minus 7 rechnen, das geht nicht. Aber es geht unter Null, aber diesen Bereich decken wir – ich weiß nicht, wie’s in Deutschland ist, aber bei uns kommt das erst viel später. Also, das können wir nicht. Ja, was könnten wir dann rechnen? Wir könnten uns ja aus der 5 eine 15 machen. Und dann rechne ich 15 minus 7 und ja, komm dann zum Resultat, das gibt 8, schreib die 8 hin, und behalte die 1, denn ich hab mir ja von der 4 schon eine 1 ausgeliehen. Also einen Zehner! Und diesen einen Zehner, den muss ich ja jetzt wieder von der 4 weg zählen, weil sonst stimmt’s zum Schluss nicht. Und dann hab ich also die 2, die ich von der 4 wegzählen soll, plus die 1, die ich mir ausgeliehen habe - also 2 + 1 gibt 3 – und dann rechne ich wieder 4 minus 3, ja wunderbar, das geht, das gibt 1.

Sie haben sich die 1 von der 4 ausgeliehen, sagen Sie... Wie meinen Sie das?

Ich hab mir von diesen 4 Zehnern habe ich mir einen Zehner ausgeliehen, damit ich die hintere Rechnung mit den Einern lösen konnte. Damit ich eben aus der 5 eine 15 machen konnte.

Frage 2

Ich würde die Kinder darauf aufmerksam machen – also, ich mache das jetzt so, wie wir rechnen. Bei uns ist ja die Zahl, die man multiplizieren muss, ist die 645, und ich muss die mal 123 rechnen. Ich würde die Kinder dann einmal mehr darauf hinweisen, dass ich eigentlich diese 645, zuerst rechne ich die nur mal 3. Dann rechne ich die ganze Zahl mal 20, d.h. sie schreiben die Null unter die Einer, und dann können sie's mal 2 rechnen, so wie's auch die Schüler fälschlicherweise gemacht haben. Und dann mach ich sie darauf aufmerksam: Zum Schluss müssen wir diese 645 noch mal 100 rechnen, also wir schreiben bei dem Einer und dem Zehner eine 0, und rechnen dann noch einmal die 645, und zählen dann das zusammen und dann kommen wir zum richtigen Resultat.

Frage 3

Also, bei uns kommt Flächenberechnung, das wissen Sie mittlerweile sicher, erst in der 6. Klasse. Die Schülerin sagt mir: 4 mal 4... *[rechnet]* Was würd ich der Schülerin antworten? Das ist jetzt ganz schwierig für mich, weil ich bin absolut nicht in diesem Thema drin, Flächenberechnung, und es käme sehr darauf an, wie ich das eingeführt habe. Also, wenn... Es ist für mich ein absolut fremdes Themengebiet...

Sie kommt einfach mit: „Schauen Sie, ich hab gerade herausgefunden..."

Okay... Okay... Ich denke, ich würde ihr nicht sofort eine Antwort geben. So, wie ich das jetzt auch nicht mache. Sondern, ich würde sagen: „Das find ich ganz spannend, was du da herausgefunden hast, und was du da ausgerechnet hast, das stimmt auch. Also, ich nehme mir das gerne mit in meine Mittagspause und schau's mir dann mal an in aller Ruhe!" Und das würd ich eigentlich auch jetzt so machen. Und dann würd ich ihr... Würd ich womöglich mit ihr diskutieren, wie sie darauf kommt, auf die Idee, dass man die Fläche so ausrechnen kann, oder was sie eigentlich macht, den Rechenvorgang, nämlich die beiden Seiten miteinander multiplizieren, und dann mit dem Umfang. Und dann würd ich mit ihr anhand von mehreren Beispielen, die dann immer extremer werden, also eine Seite extrem lang, eine ganz kurz, oder Quadrate ausrechnen, würden wir miteinander herausfinden, ob es wirklich eine Regel gibt, dass man sagen kann, ja, das ist so, du hast Recht mit wie sie das sagt, dass sie dann herausgefunden hat, dass mit zunehmendem Umfang auch die Fläche größer wird, oder ob das nicht stimmt. Aber ich würde nicht sofort eine Antwort geben.

7.11 *Protokoll 11 S*

Alter der Lehrkraft: *43 Jahre*

Frage 1

Also, ich bleib bei dieser dritten Klasse, in dem Fall. Wichtig wäre mir, dass sie sehen: Wo hat es mehr, auf der oberen Linie oder unten. Und dann stellen sie mal fest: es hat mehr oben. Und dann merken sie mal, dass die obere Zahl größer ist eigentlich. Und dann würd' ich das sicher mal mit Spielsachen machen, ob's dann Spielfiguren wären oder so, einfach dass die Zahl mal was Bildliches bekommt. Und dann erst würd' ich da mit dem Übertrag arbeiten. Und ich weiß nicht, meiner Erfahrung nach, ich mach was – das ist ja eigentlich erst in der 4. Klasse in der Schweiz, dieser Übertrag. Und meiner Erfahrung nach ist es ziemlich abstrakt, diese, dass man da oben bei den Einern da 10 dazu gibt, dass man die 7 Einer da nachher überhaupt abzählen kann.

Und äh, das mach ich dann meistens bildlich, indem dass ich da diese Zehn habe und damit man sagt: dass der Ausgleich nachher stimmt, dass die Differenz immer gleich bleibt eigentlich. Also ich find's ziemlich abstrakt. Ich würd's mit Wiederholen machen, mit diesen Karten machen, also von dem Bildlichen, nachher mit den Zehnerkarten oben hinhalten, dann sind's 15, und dann weg sieben, und dann gibt das 8, und weil ich da ja was hingehalten habe, muss ich dass, damit die Differenz bleibt, unten hinzutun, und einfach die Karte, und die hält dann ein anderer Schüler hier hin. Und so weiter. Nein, weiter geht's ja nicht, es geht ja nur bis zum Zehner. Das würd ich so machen. Übertrag ist ja „behalte", sagen wir in der Schweiz, behalte 1...

Frage 2

Ja, das ist also ganz sicher eine Beobachtung, die alle Viertklässler. Also, ich arbeite wirklich mit Farben, wirklich, also das hab ich jetzt gemerkt, dass das den Schüler ziemlich hilft. Also, es ist zum Beispiel 123 mal 645, drei mal, das kennen sie ja bereits von der Multiplikation mit Einzelzahlen. Und dann in der nächsten Klasse kommt zuerst 20 mal hinzu, da kommt das Einführen von der 0. Und das mach ich dann schon mit Farbe, also diese 0. Das ist ja 10 mal, und nachher noch mal 2. Und hier Null macht man dann dabei den Einer wirklich farbig. Und dann gewöhnen sie sich das an mit den Farben, das machen sie vielleicht ne Woche lang auch gerne farbig, und sehen aber auch, dass es nachher diese Treppen gibt, rein visuell, dass die Treppe da entsteht. Und erst nachher in der sechsten Klasse geh ich von den Nullen weg und lass dann Punkte machen. Wobei die meisten bleiben dann bei diesen Nullen, ich persönlich schreib die 0 auch. Aber ich steh wirklich auf diese Farben, damit man visualisiert, dass die Treppe entsteht. Und auch immer wieder warum das jetzt entsteht.

Frage 3

Ja, ist schön! Also, ich find's nur schon mal super, würd ich sagen: „Super, machst du solche Versuche!“ Also, das find ich super, wenn das jemand selbst mal so herausfindet, ist's jetzt richtig oder auch nicht richtig. Ja, ich find' das spannend, je größer... Ich müsste auch kurz studieren wieder. Und das find' ich das spannende an der Geometrie, dass man immer wieder drauf kommt, das ist jetzt ganz neu. Ich muss kurz überlegen... Je größer, dass der Umfang einer geschlossenen Figur ist, da wird die Fläche auch größer... Ja, vielleicht würd' ich – das geht immer wieder um Fläche und Umfang – Vergleiche machen mit dem Leben. Also wir sind zwar in der Stadt, aber jedes Kind ist mal irgendwie auf ´ner Weide und es hat viele, die reiten z.B. in der Klasse, und die kennen so Wiesen, Pferdewiesen und so... Mal schau'n, wenn du lange um was reitest, und anhand des Umfangs auf die Fläche kommen. Irgendwie so würd' ich das versuchen... Und dann müsst ich noch kontrollieren, ob die Behauptung überhaupt stimmt. Sie braucht ja nicht... sie möchte ja nicht zeigen, dass wir ne Proportionalität haben, so wie ich ihr das Beispiel gerade gemacht habe, sondern sie möchte bestätigt haben, ob ihre Behauptung stimmt oder nicht.

Ja. Sie stellt ja eine Gesetzmäßigkeit auf, sagt, das ist immer so.

Sie hat eine Theorie ausgeknobelt.

Sie erklärt, dass mit dem Zunehmen des Umfangs einer geschlossenen Figur auch gleichzeitig die Fläche größer wird.

Ja, da müsste man natürlich schon – aber das find ich noch schön in der Mathematik und in der Geometrie – also, man stellt ja eine Theorie auf und dann müssen die Schüler immer noch begründen. Das ist so weit, und wenn es drei bis viermal begründet werden kann, dann ist es meistens nur Theorie. Und dann müsste sie hier dann wahrscheinlich so ganz praktische Beispiel bringen, vielleicht macht sie da auf der Sportwiese mal einen Versuch oder so. Also, nehmen wir ein Messband und wir schauen’s mal an. Vielleicht könnte man auch das Thema Theorie noch mal machen. Wo ich ein bisschen unsicher bin ist noch: „...die sie in der Klasse niemals erzählt haben. Das find ich wahnsinnig... Das steht vom Mädchen noch wie ein Vorwurf noch da, oder? Ich find’s ´ne spannende Sache, diese These...

Ach so! Das meint sie gar nicht! Also, das sagt sie nicht, sie steht nicht vor ihnen und sagt: „Das haben Sie niemals erzählt, dass das so und so sein könnte. Das sage ich jetzt, Sie haben...

Aber ich find, das stimmt eben. Ich hab das schon vielmals erlebt. Wenn die Kinder etwas selbst entdecken, dann sagen sie: „Das hab ich selber herausgefunden, das haben Sie nie erzählt.“ Das kann ja auch sein, das hat man ja vielleicht nie erzählt. Das gefällt mir da noch an der These. Ja.

7.12 *Protokoll 12 S*

Alter der Lehrkraft: 57 Jahre

Frage 1

Also, sicher einmal müssen die Kinder den Zahlenraum kennen! Also, sie können... müssten nicht Rechnungen lösen, die nicht verstehen, also sie müssten nicht z.B. – also wenn sie's nicht gehört haben, über 100 hinaus zu rechnen, dann würd ich das gar nicht machen! Sie müssen also...sie müssten schätzen können, was es etwa gibt.

Dann müssten sie sicher einmal das Zehnersystem kennen, also mit den, die Einer, die Zehner, die Hunderter usw., deswegen auch die logische Folge, dass ich es untereinander schreib, wenn ich es wegzählen will. Dann würd' ich das sicher veranschaulichen – also sie wollen auch wissen, wie ich da vorgehen würde?

Wie sie's erklären würden, ja! Das ist das interessante.

Ich würde das vielleicht so mit Streifen legen, und dann vielleicht mit Plättchen, ich hab hier Einhunderter, oder mit dem Holz – Ich weiß nicht, ob Sie das Holz kennen?

Sie meinen Diogenes-Blöcke? So Holz...

Ja, kleine Holzblöcke...

So Würfelchen, Stangen, Platten und so?

Ja, genau! Dann würd ich auch mit Einerwürfeln, mit Zehnerstangen, mit Platten und so würde ich das einmal legen, und dann müssten wir dann untersuchen, müssten wir dann zuerst also einfach wegzählen, von oben hinunter, also wegzählen über die Einführung nicht. Und wenn es dann nicht reicht, dann müsst ich eintauschen – also wie mit Geld, wie ich Geld tausche – dass man dann wirklich von 11 3 wegzählen kann.; dass es dann wirklich 8 gibt. Und dann schreibt man darunter hin, und dann würde man das zeigen, dass, weil ich hier oben getauscht habe, dass ich hier unten, äh, dass ich dann da oben eigentlich eben also addieren müsste, und dann ist das ein bisschen schwierig auf die Dauer, also würde man dann, damit es einfacher ist, kann ich ja auch statt – aber das würd' ich natürlich in vielen Schritten machen – wenn ich also oben eben addieren müsste, könnt ich auch oben die Zahl lassen und dafür unten eins mehr wegzählen. Das wäre dann der Übergang.

Frage 2

Ich würde verzweifeln *[lacht].* Wenn ich so lange Schule gebe und der Fehler noch vorkommt, dürfte es eigentlich nicht sein. Eben. Wenn ich eigentlich ganz schön aufbaue, in der Unterstufe und nachher dann in der vierten, fünften Klasse, dann weiß ein Schüler... – also, ich führe es auch so ein. Ich beginne mit den Einern, 3 mal 5 =, was gibt 3 mal 5?, ach ja, die fangen unten an, 3 mal 5 sind 15, 5 behalte 1 usw., und das wissen sie schon, dass ich den Übertrag mache, und dann jetzt rechne ich mit den Zehnern, also gibt es keine Einer. Und meine Kinder sagen das seit der vierten Klasse: Ich rechne mit den Zehnern, also gibt es keine Einer. Und dann machen sie eine Null, oder ein Strichlein, oder einen Punkt, das können sie machen, wie sie wollen. Die meisten machen einen Querstrich rein. Einen Punkt könnte man verwechseln nachher mit dem Komma, oder weiß ich was, und die Null, da kommt man nicht drauf: Hat man jetzt schon gerechnet, gibt es zufälligerweise eine Null, oder ist das ganz bewusst, bin ich wirklich eingerückt. Also, nach links oder nach rechts gerückt. Also, ich beginne mit den Einern. Aber ich rechne mit den Zehnern, also gibt es keine Einer. Ich rechne mit den Hundertern, also gibt es keine Einer und keine Zehner in diesem Strichlein, und dann sieht man schon, wenn ich eine dreistellige Zahl habe, dass ich dann eben zwei Strichlein habe, aber keine Einer und keine Zehner. Das wäre das Problem, und so müsste man das auch einführen; müsste man halt wieder von unten anfangen und das ganze Zehnersystem nochmal zeigen, und sagen, jetzt haltet ihr euch daran, und ich möchte, also wirklich, ich mach das mechanisch. Ich rechne langsam, in der vierten und fünften Klasse führ ich solche Dinge ganz sorgfältig und stur und mechanistisch, und, also, ich rechne da mit also mit Automatismen. Das wird automatisch gesagt und gemacht, das überlegt sich keiner. Wenn Sie also zu mir zum Schulbesuch kommen, wird noch ein Schüler, der in einem halben Jahr aufs Gymnasium geht, wird immer noch sagen: Ich rechne mit dem Zehner, also gibt es keine Einer und macht automatisch den Strich.

Frage 3

Also, ich würde ihr sagen, dass in einer der nächsten Stunden wir uns um dieses Problem kümmern werden. Und dann würd' ich mit den Kindern, d.h. ich hab das – eine Holzplatte mit ganz vielen Nägeln und mit einem Gummiband. Und dann kann man dieses Gummiband spannen, und dann kann man schauen, kann man auch ausrechnen, es hat so Planquadrate drauf, da kann man auch die Nägel zählen, wieviele Stück es gibt, und dann kann man einfach empirisch erarbeiten, indem man eine Tabelle macht, und versucht dann, sich gegenseitig zu beweisen, ob das Kind Recht hat oder nicht. Dann müssen dann die Schüler, z.B. zu zweit, in Partnerarbeit, mit einer solchen Platte und diesem Schnürchen und diesem Dingsda versuchen, zu schauen, ob das Kind Recht hat anhand einer Tabelle. Wir würden das herausarbeiten, dass man das am besten mit einer Tabelle stellt, und wo könnte es, bleibt es, stimmt es, stimmt es nicht. Und da versuchen wir die Resultate vielleicht im Endeffekt zu vergleichen. Oder an der Wandtafel, am Beispiel.

7.13 *Protokoll 13 S*

Alter der Lehrkraft: *42 Jahre*

Frage 1

Also einerseits müssen die Kinder... ich sag dann jeweils die Geschichte, die verschiedenen Zahlen einzeln erzählen und die zwei Zahlen zusammen erzählen, müssten sie schon mit Erfahrung haben. D.h. ich mache auf dieser Stufe häufig – das sind auch so stereotype Übungen, eine 5 minus eine 7 das gibt immer eine acht, eine drei minus eine 6, das ergibt immer eine 7, mit anderen Worten: die Kinder lernen automatisch, dass es in der Mathematik dann bestimmt Regeln gibt, an die man sich ohne groß zu studieren, an denen man sich orientieren kann. Und bei der Subtraktion mit dem Übertrag versuche ich, den Übergang vielleicht als Problem als solches mal wegzulassen. Heißt: Ich mache das mit Ergänzen und überlege mir, auf wie viel ich ergänzen muss. Also eine Stunde - von dem, was ich am Anfang erzählt habe, bei der Minusrechnung 13 minus 7 ohne Übertrag, 3 minus die 7 ergibt immer eine 6 beispielsweise - mache das umgekehrt, bei der ersten Rechnung z.B. frage ich: 7 und wie viel gibt die nächste 5. Und da landet man automatisch bei der 15, wenn man fortlaufend weiter zählt und kann sich dann, weil man plötzlich eine 15 hat, kann man sich merken: Ach so was, da taucht eine 1 auf, das ist der Übertrag. Und lass den Übertrag einfach mal so stehen. Für die Technik. Und hoffe dann eher, dass sich das mit dem Training, dass sich das automatisiert, dass man dann eine Vorstellung kriegt, was man mit dem Übertrag eigentlich macht, was da passiert.

Sie meinten vorhin, 3 minus eine 6 ergibt immer eine 7, z.B. So diese Regel. Die wird aber nicht weiter erklärt, das wird als...?

Das wird... Ja... Ich versuche, es einfließen zu lassen, mit Üben. Dass man z.B. wenn man sagt 73 minus 16, dann kann das Kind eigentlich schon sagen, gibt sieben und... Also ich versuche, dieses Problem des Übertrags durch Kopfrechnen zu entschärfen, indem man sich zuerst nur um einen Teil kümmert. Vor allem die Aufteilung dieses Rechenvorgangs. Und das mache ich auch mit dem Bewusstsein, dass das schriftliche Rechnen, das ist ja vom Prinzip ist das ja ganz anders als das Kopfrechnen. Man benötigt den Geist nicht zum schriftlichen Rechnen, man braucht sich dann weniger vorzustellen, man kann sich da immer an die einfachsten Basis-plus-minus-Operationen halten.

Ja. Die 1, von der wir gesprochen haben: Sie sagten, es entsteht dann eine 1, oder so ungefähr... Wie erklären Sie das Entstehen dieser 1?

Ich erkläre die gar nicht. Also, das Kind kennt 10er, kennt 20er, ich hoff' da vielleicht eher, dass es einfach automatisch mitkommt.

Okay.

Ist auch für mich abstrakt, mir vorzustellen, warum kommt die 1.

Frage 2

Trainieren, ne? Und das System verinnerlichen. D.h., die Aufgabenstellung, die ist jetzt... Das hab ich jetzt noch nie in dem Maße erlebt bei einer 6. Klasse. Das sind jetzt eher Fehler, die passieren in Klassen weiter unten. Vielleicht, nachdem man das eingeführt hat, vergisst man das... Aber ich glaube auch hier, ich versuche nicht, dem Kind – natürlich kann man dem Kind sagen: Du rechnest zuerst 100 mal das, dann 20 mal das und 3 mal das. Und im besten Fall hat man auch schon gelernt den Trick bei der MPK, mit mehrstelligen Zahlen hinter das Komma verschieben, heißt es vielleicht bei euch auch so. Ich würd das eher als festes System lernen lassen: „Man muss!" Gibt's gar nichts anderes. Denn das ist eine schrittweise Operation. Man macht drei Schritte beim multiplizieren mit dreistelligen Zahlen, und man muss bei jedem Schritt sich an die Bedingungen, die Voraussetzungen des Systems halten.

Zum Beispiel, in diesem Fall, wie wäre das da, wenn Sie das System dort schildern würden?

Welches System?

Also wenn Sie das erklären würden. Wenn Sie jetzt dem Schüler sagen würden: „Komm, wir trainieren das nochmal."

Ja, ich würde dann natürlich mit Phasen arbeiten. Ich würde sagen: „Wir haben 123 mal 645, zuerst bearbeiten wir die 3, bei uns wird halt angefangen mit den Einern, und dann wird die erste, die oberste Zahl, die wird mit derselben Farbe geschrieben wie der erste Multiplikator. Und dann, bei der zweiten Phase, der 2, da würde ich einfach sagen: Jetzt kommt ein neuer Schritt, und der Schritt, der ist ein Schritt weiter links. Vielleicht von der Sprache her den Schülern klar machen, dass da immer auf einen Schritt auch ein Schritt nach links führt. Also ich denke mehr intuitiv als, klar ist das natürlich verschieden von Schüler zu Schüler, aber ja, ich denke, das schriftliche Rechnen, das ist so ein System, das man verinnerlichen muss, und vielleicht nicht allzu abstrakt erklären sollte, warum man den Schritt macht. Und wenn das Kind dann verstanden hat oder auch während des Prozesses, kann man sagen: „Ja, hier machst du ja zuerst wie gesagt die Einer, dann die Zehner, Nullwert, also auch eine Stelle wert, und zum Schluss die Hunderter und dann wird gerutscht.

Frage 3

„Das hast du sehr gut studiert und, ja, ich denke, dass merkst du auch, dass, wenn du rund um ein Feld gehst und eine gewisse Zeit brauchst, und um ein anderes Feld gehst“ – man könnte hier den Pausenplatz nehmen, den roten Pausenplatz, den blauen und die Spielwiese – sag ich: „du brauchst ja eigentlich, um rund um das Feld zu gehen und da ein Spielfeld abzugrenzen, brauchst du länger, dementsprechend ist auch die Spielfläche größer.“

7.14 *Protokoll 14 S*

Alter der Lehrkraft: *51 Jahre*

Frage 1

Der zweite Teil da, das betrifft mich. Sie müssen den Stellenwert, also unser Zehnersystem begriffen haben. Also dass, wenn ich neun Einer habe, wenn der Zehnte dazu kommt, dass es eine Stelle weiter rutscht. Das machen wir mit Handeln, indem ich eine Tabelle habe mit Rechenstäbchen und die Kinder füllen dann die Einer auf, bis es voll ist, dann müssen sie es umtauschen in ein Stäbchen – vielleicht kennen Sie das, also die Einer, das sind Würfelchen, dann die Zehner, das sind Stäbchen, da haben zehn Würfelchen drauf Platz, die Hunderter sind dann eine Platte, da haben zehn, ja zehn Hunderterstäbchen drauf Platz.

Zehnerstäbchen!

Ja, Zehnerstäbchen, und dann der nächste Schritt ist dann wieder ein großer Würfel, da haben zehn Hunderterplatten drin Platz. Und das ist etwas, was mir noch wichtig ist, dass wir das auch jetzt schon in der ersten Klasse, dass wird das Handeln... und erleben, was passiert da mit den Stellenwerten. Man hat früher im alten Lehrmittel gab's noch verschiedene Zahlensysteme, da hat man dann im Dreier das untersucht, oder im Vierersystem, aber das hat man rausgeworfen, weil die meisten Kinder waren da völlig überfordert: einmal im Zehnersystem zu rechnen und einmal im Dreier, das war eigentlich nur etwas für die ganz guten Rechner ist das ein gutes Spiel. Aber als Basis müssen sie das Zehnersystem begriffen haben, was passiert da eigentlich. Und da kann ich sagen: Ich hab es einfach automatisch gemacht. Kapiert, was eigentlich... Ich hab's mir auch nie überlegt, hab ich dann in der Lehrerausbildung geübt, gesehen: was passiert da eigentlich in diesem Zehnersystem. Vorher das war einfach automatisch, und ich denke, das ist nicht gut. Man muss wirklich begriffen haben, was da geschieht und... ja!

Wie würden Sie das dann erklären, bei dem Zehnerübergang... Also wenn hier gerechnet wird und der Rechenvorgang geschildert – wenn Sie in einer vierten Klasse wären.

Ja, also das muss ich... Ich muss passen, weil das ist so etwas wichtiges, ich denke, ich müsste mich da richtig dahintersetzen, ganz genau überlegen, in welchen

Schritten würde ich das machen. Wir haben's in der Schule – also ich selber hab es, das ist jetzt dreißig Jahre her – wir haben es gelernt, einfach, die erste Sieben, plus wie viel fehlt mir bis 5, das geht nicht, also brauche ich 15, dann muss ich diese 1, die ich da genommen habe von irgendwoher, die muss ich mir hinschreiben, also 7 plus wie viel sind 15, das sind 8, und dann hab ich da ja auch einen neuen Zehner, also... ja, aber das war ein mechanischer Ablauf, und so, wie es mir meine Kollegin, die Sie noch sehen werden, erzählt hat, macht man's jetzt anders, also da hat wieder einer ein neues System herausgefunden. Weil die Mathematiklehrmittel, die haben's vor kurzer Zeit geändert. Ich kann's jetzt nicht sagen, weil das beginnt immer in der ersten Klasse, und so hab ich schon mehrmals mit dem Neuen gearbeitet. Ich glaube, jetzt für die Kollegin die Sie sehen werden, ist das erst das zweite mal, dass sie dieses neue Lehrmittel braucht. Und irgendwie macht man das jetzt neu!

Na gut, da bin ich dann gespannt nachher, was sie sagt!

Das sagen auch die Eltern von mir, und erklären dann den Kinder so, wie sie's kennen gelernt haben früher, und dann gibt's da ziemliches Durcheinander.

Frage 2

Tja, das ist natürlich schwierig, weil es , *[unverständlich]* den wir *[unverständlich]* in drei Minuten eine Strategie zu entwickeln, aber es ist wieder das selbe, was ich ihnen vorhin gesagt habe, es hat mit den Stellen zu tun und das muss einfach sitzen. Ich würde wieder ganz von vorne beginnen, mit Handeln, also mit diesen Würfelchen und Stäbchen und Platten und...wo es hingeht: multiplizieren wir jetzt die Einer, oder multiplizieren wir die Zehner, also sind wir – ich sag jetzt den Erstklässlern Haus, also das ist das Haus der Einer und das Haus der Zehner und die Einer dürfen nicht im Zehnerhaus wohnen. Also, ich denke ich würde dann wieder ganz von unten beginnen, mit dieser Tabelle, wo die Würfelchen und Stäbchen immer weiter rutschen.

Frage 3

Ach, da muss ich das aufschreiben... Mit dem Zunehmen des Umfanges...Im ersten Moment hat sie ja Recht, aber ich verstehe trotzdem die Frage nicht. Ich unterrichte keine Geometrie, jetzt wenn ich das...

Also in Klassenstufe 1 bis 3 steht's auch noch nicht im Lehrplan.

Nein, nein... Wir benennen einfach diese Formen, das lernen sie... Aber es ist ja eigentlich klar, wenn die Seiten länger werden, muss auch der Inhalt größer werden...

Wie würden Sie der Schülerin antworten?

Ich weiß nicht, ob's daneben noch einen Haken dabei hat... Ich würde sagen: Du hast Recht! Ist gut, dass du was heraus gefunden hast! Also, ich würde mich freuen mit ihr!

7.15 *Protokoll 15 S*

Alter der Lehrkraft: *33 Jahre*

Frage 1

[lacht] Also, außer dass ich solche Aufgaben sicher nicht schriftlich rechnen würde, weil ich denke, also das ist genau das, was sie vom Zahlenverständnis her, noch so lösen können müssten, ohne schriftlich zu subtrahieren. Weil ich auch bei den großen Subtraktionen von der Vorstellung her gehe, eine hohe Zahl, die ich mir nicht mehr im Kopf ausrechnen kann. Aber also ich wüsste das Verständnis dafür, ähm, ja, dass, wenn's jetzt um den Übertrag geht, zu wenig Einer da sind, um diese 9 weg zu zählen. Weil ich ja im Kopfrechnen, so, zuerst die Zehner oder zuerst die Einer weg zähle und dann die Zehner weg zähle, und dass es halt da so nicht mehr möglich ist, ohne in den unteren Zehner zu gehen.

Ja... Wie meinen Sie das, in den unteren Zehner zu gehen, wie würden Sie das erklären?

Dass, wenn ich das halt im Kopf ausrechnen müsste, ich 91 minus 9 rechnen müsste, da muss ich in den Achtziger.

So... Bei der schriftlichen Subtraktion passiert ja eine Menge mit dem Übertrag, dieser 1. Wie würden Sie den einführen, diesen Übertrag?

Dass ich halt den nächsten Zehner mit zu den Einern nehme. Also dass ich gleich, hier weiß ich, ich muss in den unteren Zehner, nehm ich einen neuen Zehner dazu, also brauch ich hier 11. Also dann ergänz ich von 9 auf 11, und wenn ich schon einen Zehner aufgebraucht habe, dann muss ich den da auch mit abzählen.

Moment! Weil Sie einen Zehner aufgebraucht haben? Wo haben Sie den Zehner aufgebraucht?

Da! Also, wir rechnen ja 9 und wieviel gibt 1, eigentlich. Also, Subtraktion, das geht ja nicht. Also muss ich einen Zehner dazu nehmen.

Und woher nehmen Sie den Zehner?

Von der 90.

Und dann wären ja nur noch 80 da.

Ja. Deshalb schreib ich ihn da hin. Weil ich ihn von den 80 nehm. Weil ich ihn schon weg nehme. Den unteren Teil nehm ich ja weg.

Moment! Sie nehmen ihn unten weg, von der 7?

Nee. Von der 9.

Und dann schreiben Sie ihn aber unten hin?

Ja. Weil ich ihn wegnehm. Und alles, was ich weg nehme, steht ja bei minus.

Ah ja. Dann ist es klar. Okay. Welches Vorverständnis müssten die Kinder haben, um solche Aufgaben lösen zu können, was meinen Sie?

Ähm... Sicher halt bei solchen Aufgaben, dass sie das im Kopf auch rechnen können, dass sie das Verständnis haben für den Zehnerübergang. Und die Größenverhältnisse der Zahl. Also, was ich merke, ist, dass sie, wenn ich ihnen die beiden Zahlen gebe, und sage: Wir lernen Subtraktion, dann heißt es auch 79 minus 91. Und dann denk ich da ist... da fehlt was, also das Verständnis von der Größe der Zahl.

Frage 2

Also ich würd' zurückgreifen auf ein Thema, also multiplizieren mit Zehnerzahlen – Zehnerzahlen stimmt nicht, also Zehnern, Hundertern oder Tausendern, was halt da passiert, und wenn ich halt etwas mal zehn rechne, dass es sich dann einfach um eine Stelle verschiebt. Und also, wir schreiben es ja andersrum auf, das haben Sie sicher auch schon gehört, also hier geht's zuerst mit'm Einer, die sind ja wirklich da, und dann kommt ja eigentlich zwanzig mal, und das nehm ich auseinander in 2 mal und 10 mal. Und diese 10 mal beinhalten, dass ich um eine Stelle verschieben muss.

Frage 3
Erklär das mal der Klasse und erzähl. Was, sie hat herausgefunden, dass mit dem Zunehmen des Umfanges... Ja, ich würde wahrscheinlich ein paar Gegenbeispiele bringen, nein, ich weiß gar nicht, ob das stimmt, moment... Also, was sie genau halt meint, nein es stimmt schon... Nicht...

Also, sie steht so vor Ihnen und sagt: Das hab ich mir zuhause überlegt, sehen Sie, diese Figur, und immer wenn der Umfang größer wird, dann wird auch die Fläche größer. Und jetzt:

Ja, ich denke, so in der Art...

Nachtrag zu Frage 1
Die Einerblöcke und die Zehnerstäbe, ja?

Kennen Sie nicht?

Doch. Bei uns nennt man die Diogenesblöcke. Also, es sind so Holz-Einerwürfel, dann Zehnerstange, Hunderterplatte, Tausenderwürfel...

Genau! Und am Anfang macht man's auch so, dass man die Zahl legt, also dass ich da Zehnerstäbe hinlege und die Einer, und dann merke, okay, ich kann hier nicht 9 wegnehmen, also muss ich den Zehnerstab verwandeln in Einer. Also, das ist das ganze gelegt. Und das merk ich, fand ich am Anfang auch toll, war begeistert, aber eigentlich nützt es gar nichts. Also, meistens komm ich weiter, wenn ich's einfach Schritt für Schritt erkläre. Also das ist so... Und das Begreifen kommt also nicht mit dem wirklichen Begreifen, mit dem haptischen, sondern mit der Übung. Also, ich denke, das ganze mit dem Holzverschieben, das lenkt eher ab. Das ist so, was ich gelernt habe in den 10 Jahren, dass ich das ganze theoretischer angehe.

7.16 *Protokoll 16 S*

Alter der Lehrkraft: *59 Jahre*
Anmerkung: Die Lehrkraft wünschte, nicht auf Tonband aufgenommen zu werden. Der nachfolgende Text ist zunächst handschriftlich mitgeschrieben und dann von der Lehrkraft freigegeben worden.

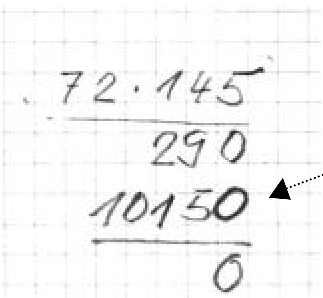
Frage 1

Ich hab's mit Verständnis probiert. Auf dem Elternabend habe ich erläutert, dass ich es mit „Konstanz der Differenz" einführen möchte. So ist es bei uns auch gedacht, bei der Einführung: Dass der Schüler es verstehen sollte und nicht nur mechanisch abgehandelt.

Ich füge oben 10 hinzu und bei den Zehnern einen Zehner. Dann habe ich unten 8 Zehner und oben 9 Zehner. Das geht dann ja. Also, es ist wichtig, dass die Differenz gleich bleibt.
Der Verfasser unseres Lehrmittels erklärt das so auch ausführlich und will auch, dass die Schüler es so verstehen. Ich führe das so ein. Ich merke aber auch, dass viele Schüler in meiner Klasse das von zu Hause kennen und das dann mechanisch drin haben. Mathematisch begabte verstehen dann dieses Prinzip der "Konstanz der Differenz", schwächere verwirrt es dann.
Ich habe das Gefühl, bei schwächeren Schülern schwimmen die Zahlen wie in einem Meer. Die Zahlvorstellung ist einfach nicht vorhanden. Das merkt man dann, wenn solche Aufgaben gelöst werden.
Mathematisch begabte Schüler haben einfach irgendwie eine Vorstellung des abstrakten Zahlengebäudes, was stimmig ist. Das ist schwierig auszudrücken, ich bin ja nicht Mathematiker.

Frage 2

Dann würde ich sagen: „Ich bin eine miserable Lehrerin, dass ich das so eingeführt habe, wenn mehrere Schüler so rechnen!" Man müsste noch einmal von Grund auf anfangen und jeden
Posten für sich üben:



[Diese Null ist im Original rot nachgemalt]

Abb. A 24: begleitende Handskizze der Lehrkraft 16 S

Ich würde auf jeden Fall darauf achten, dass die Schüler
die Nullen mitschreiben und vielleicht auch mit einer anderen Farbe markieren, damit man „logisch“ erkennen kann, dass man mit 10 multipliziert hat.
Aber bei uns in der Mittelstufe ist der Multiplikator nur zweistellig!

Frage 3

In dem Fall... Es kommt schon darauf an, wie die Seiten verändert werden. So, wie sie das gemacht hat, stimmt das natürlich. So ist es absolut richtig.
Es gibt ja aber die verschiedenen Formen von Flächen. Ich müsste mich da erst wieder reinfinden.

7.17 *Protokoll 17 S*

Alter der Lehrkraft: *25 Jahre*

Frage 1

Was wichtig ist, ist, dass sie zuerst die Zehnerübergänge kennen, also dass sie verstehen, dass man über zehn hinaus gehen kann, und dann müssten sie auch verstehen, dass man eben eigentlich ja plus rechnet, und nicht minus rechnet, wenn man mit Übertrag arbeitet. Und immer, wenn sie eben über diesen Zehner hinausgehen, dass es dann einen Übertrag gibt und dass man ihn dazu zählen muss. Also, müssten sie diesen Übergang zum Zehner müssten sie verstehen. Und ich denke, das ist ganz klar Unterstufenstoff, also müssten sie das vermittelt bekommen in der ersten Klasse, also den Zehnerübergang kennen lernen und dann damit arbeiten, und ich denke, deshalb sollte das bereits vertraut sein. Aber es ist eben immer wieder schwierig, so was beizubringen. Also, es ist nicht so, dass die Kinder es von Anfang an dann verstehen. Und sie lernen es nur auswendig, sie kennen das Schema, sie wissen, wie sie das machen müssen, aber ich glaube nicht, dass die meisten Kinder es verstanden haben. Und man führt es eigentlich immer wieder gleich ein, also es ist eigentlich ein einfaches Verfahren, diese schriftliche Subtraktion, und die Kinder lernen das ziemlich schnell und sie lernen das auch, weil es für sie wirklich eine Vereinfachung ist. Und trotzdem gibt es welche, die dann das im Kopf rechnen, weil sie das schriftlich nicht verstehen.

Und um das eigentlich so einzuführen, dass die Kinder das verstehen – ich denk, ich hab das nie so eingeführt, weil ich nie eine Unterstufenklasse unterrichtet habe und weil die Kinder, die ich kenne, die können das bereits. Aber ich denke, also ich würde es eben, glaub ich, über die Plus-Rechnung einführen, also wie viel, 27 plus wie viel gibt 45. Ich würde das so sehen, aber *[Sprung im Band]*, dass man auch ergänzt. Also, dann 27 + wie viel, und das dann [*Sprung im Band*] merken, wenn die Zahl oben eben kleiner ist als unten, dass sie dann nicht nach 5 ergänzen, sondern nach 15. Und dass das dann richtig ist und nicht die 5.

Ja. Da passiert ja eine Menge mit dem Übertrag: 8 + 7 ist 15 – wie erklären sie das?

Dass es von 7 bis 15 geht?

Ja.

Weil die Zahl... ist ja trotz Zahlen eben eine Minus-Rechnung, und man ergänzt ja. Das ist eben nicht eine Minusrechnung. Und ich denke, über die Lücke dann, wenn man eben ein leeres Feld einfügt dafür, dann sehen wir auch, dass sie ergänzen müssen. Also 27 plus wie viel gibt 45, und das ist ja dann die Umkehrfunktion, und da ergänzen sie ja auch: 7 plus wie viel, und dann gehen sie über in den nächsten Zehner, gibt 35. Das ist dann die Frage, wie viele Stellen wir ergänzen. Und dann übernehmen wir das eigentlich dann. Das ist dasselbe. Und sie ergänzen dann ja in den Zehner. Also, wir füllen zuerst die Einer auf, und dann die Zehner. Und das ist hier eigentlich dasselbe Prinzip, weil sie ergänzen 7 plus wie viel gibt 15, anstelle von 35, weil sie haben ja nur einen übertragen müssen. Und ich denke, das ist der Schritt, der erklärt werden müsste. *[Sprung im Band]* Hier machen die, wenn sie ergänzen mit ´ner Lücke, weil's da ja hat: 7 plus wie viel ergibt 15 *[Sprung im Band]* Also, das lässt sich dann eben so erklären, dass die Kinder das dann auswendig können, und vielleicht gar nicht verstanden haben...

Ja... Ich glaub, ich hab's noch nicht verstanden.

Also, darf ich ein Papier holen?

Ja, gern.

Gut. Also sie fragen mich ja: die Rechnung, die die Kinder eigentlich von Anfang an können, die *[unverständliche Textstelle]*, oder? Und dann ist es, dass die Kinder eigentlich bei uns so lernen, dass die ergänzen, d.h. 7 und jetzt, gut, ich habe diese 5 dahinter kommen. Und dann wissen sie, okay, es geht über den nächsten Zehner hinaus. Und sie sagen dann: „Okay, 7 + 3 gibt 30, und dann brauch ich 5 mehr, das gibt dann 8. Und dann können sie eigentlich die 8 bereits einfügen. Und sie wissen dann, sie haben jetzt... jetzt sind sie bei 35. Dann ergänzen sie dann noch mit 10, und dann sind sie bei 45. Und die rechnen das so, und das ist dann eigent-

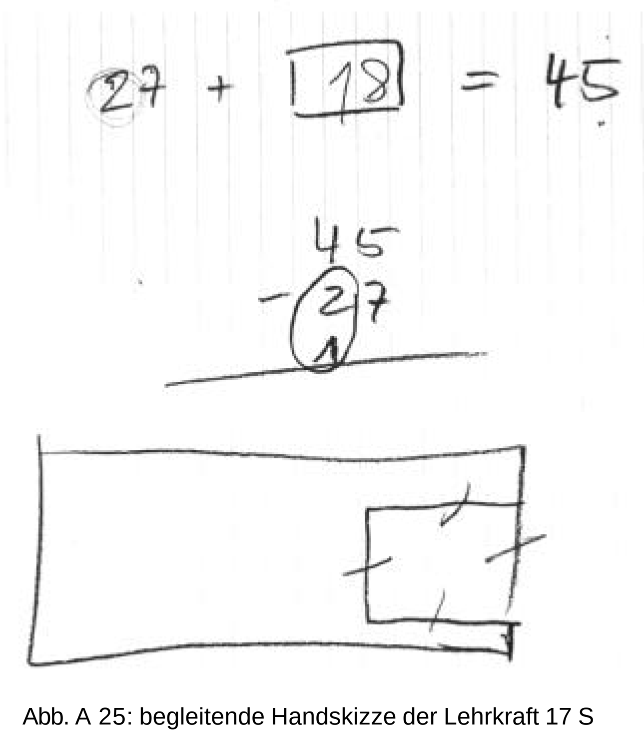


Abb. A 25: begleitende Handskizze der Lehrkraft 17 S lich das selbe hier, nur dass sie anstelle von auf 35 gehen sie nur auf 1, weil nur die hintere Zahl mehr eigentlich dann wichtig ist. D.h., 7 plus wie viel gibt 10, plus 3 plus wie viel gibt 15, plus 5 gibt 8.

Dann ist es klar. Und die 1, die sie hier oben hin schreiben, also, dass sie über den Zehner gehen und dann zunächst also sozusagen in diesem Fall bis 15 oder 35 ergänzen, erscheint klar. Und woher nehmen Sie dann diese kleine 1?

Also, normalerweise behalten sie das da am Finger *[lacht]*. Also, ich gehe über den Zehner hinaus, und das ist dann eigentlich von dem her auch verständlich, weil sie wissen ja, ich ergänze zuerst auf den nächsten Zehner und dann ergänze ich dann auf die krumme Zahl, und die zehn kommt ja eigentlich davon, dass sie eben bereits über den Zehner gegangen sind, obwohl der ja eigentlich gar nicht da steht. Oder? Sie gehen dann... Also, hier gehen sie ja dann auf 30, dann auf 35, und dann wissen Sie: Ich habe ja jetzt ´nen Zehner überschritten, und deshalb ist die 1 eigentlich klar, also weil es dann nur noch mit 10 ergänzt wird. Hier ist es; ich gehe ja auf den nächsten Zehner, ich behalte mir 1 dann, weil ich den Zehner überschreite und gehe auf 5, und diesen Zehner muss ich machen, weil ich ja auf 35 ergänze. Und ich habe hier nur eine 2. Und ich muss dann ja trotzdem auf die 30 kommen. Deshalb diese 1+2, das gibt dann 3, und dann bin ich bei 35.

Ah, verstehe! Die 1 ist sozusagen wichtig, um zu merken, dass man über den Zehner gegangen ist.

Ja. Oder eben über die nächsten zwei Zehner, wobei das hier eigentlich nicht der Fall ist. Einfach: Weil, sie ergänzen ja immer zuerst mit einem, aber mit quasi diesen Restbeträgen, damit sie nachher mit ganzen Zehnern ergänzen können. Also, das ist wie das eingeführt wird, und ich denke, das wird hier auch verständlich, und sie müssen dann ja einfach – obwohl, hier gingen die nur über den Zehner, aber es wird verständlich, weil sie überspringen nur einen Zehner und kommen dann über die 30.

Sie würden die 1 dann auch nicht oben bei 5 hinschreiben, sondern bei der 2.

Wir schreiben sie unten unter die 2, das ist das normale. Also, die „Behalte“ schreibt man bei uns...

Dann versuch ich noch mal zu wiederholen, also zu verstehen: Sie ergänzen von der 7 bis zur 35, das geht über den Zehner, und um zu verdeutlichen, dass es ja nicht bis zur 25 gehen kann, sondern bis zur 35, schreiben Sie unten die 1 hin.

Ja. Also, wenn wir schriftlich subtrahieren, schreib ich die „Behalte“ hier hin. Also müssen sie.

Frage 2

Das wird eigentlich, also, dieses Problem stellt sich so eigentlich gar nicht erst. Weil, wenn die schriftliche Multiplikation eingeführt wird, und das ist auch nicht in der 6. Klasse, das ist schon früher, aber dann ist es so, dass hier Nullen eingeführt werden für die Zehner. D.h. es bleibt keine Lehrstelle. Und deshalb kann es sich auch gar nicht erst so untereinander verschieben. Weil, sie beginnen ja dann mit der 3 zu rechnen, und die sagen 3 x sowieso, und dann rechnen die die Rechnung aus, das ist dann die Zahl, die hier hinkommt, und dann gehen sie eine nach vorne, und dann wissen sie: „Okay, das ist jetzt die Zehnerzahl, d.h. ich muss eine 0 einfügen. Und dann, wenn sie hier die 0 haben, dann gibt es automatisch keine Lehrstelle mehr. Und dann wissen sie auch, wie sie bei der zweiten Lehrstelle weiterschreiben müssen. Und deshalb durch das gibt’s keine Verschiebungen, die Zahlen sind dann meistens korrekt untereinander geschrieben. Und *[genuschelt, kompl. Satz unverständlich]*. und dann sind sie bei der 3. Stelle. Das kommt eigentlich ziemlich genauso untereinander, dass sie das nachher richtig zusammenzählen können. Weil ich finde das auch sinnvoller mit der 0, damit wenn sie nachher zusammenzählen müssen, dass das dann eigentlich die größte Zahl ist. Dass das nicht nur 738, sondern 73800 ist, dass sie das so sehen. Und deshalb führt man das eigentlich von Anfang an so ein. Also, ich hab ja jetzt eine 6. Klasse, und ich kenne niemand, der das irgendwie falsch untereinander schreiben würde, weil die automatisch die Nullen hinschreiben. Hab ich echt noch nie erlebt!

Frage 3

Eine geschlossene, also, ich muss ganz kurz etwas nachfragen: Eine geschlossene Figur, das ist auch eine, wenn ich z.B. hier abschneiden und hineingehen würde, das ist für auch geschlossen. Also wenn es dann nicht mehr ein Rechteck oder ein Quadrat ist. Ja?

Ja.

Ja. Also ich denke, dass ist ein bekanntes Problem hingegen, weil die Kinder immer denken, dass die Figuren eben rechtwinklig sind. Also, wir gehen immer von einem Quadrat oder einem Rechteck aus. Und sie überlegen sich gar nicht, dass eigentlich ja auch ein Quadrat oder ein Rechteck geben kann, dass einen Einschnitt hat. Wo dann die Fläche abnimmt, aber gleichzeitig eben der Umfang zunehmen kann. Und ich glaub, ob das für ein 4.-Klässlerin, die sowas überhaupt herausfindet und Stellung nimmt, find ich ziemlich gut. Da denke ich, hat sie schon ziemlich viel verstanden einfach an sich. Manchmal, denk ich, ist es nur gut, wenn man überhaupt mit Umfang und Fläche umgehen kann, weil das bei uns in der 6. Klasse eingeführt wird. Es stimmt aber nicht ganz, was sie sagt, und ich denke, ich würde ihr durch eine einfache Zeichnung dann zeigen, dass das eben nicht der Fall ist, aber ich würde mit ihr das eben so machen, dass ich ein Rechteck nehmen würde und eben ein bekanntes Quadrat ausschneiden würde, und das [*Sprung im Band*] den Umfang [*Sprung im Band*], weil sie ja anscheinend mit Rechtecken und Quadraten ziemlich gut umgehen kann, und das sind beides eigentlich Flächen und auch Umfänge, die sie berechnen kann, und das ist hier einfach ein Rechteck kann sie dann... [*Sprung im Band*] Ich würde ihr nicht die Lösung eigentlich aufgeben und sagen, dass sie das falsch gemacht hat, weil ich finde, wenn sie das rausfindet, dann ist das ziemlich gut. Ich würde ihr dann schon eher zeigen, dass das nicht in jedem Fall so ist, dass das so ist, wenn sie von einem Quadrat in eine Rechteck geht [*Sprung im Band*] ...und dasselbe, was sie hier hat, also, sie verdoppelt ja nur die Seite da [*Sprung im Band*] ...das sie sagt: „Okay, ich hab hier 4, und dann zeig ich da nämlich das doppelte, und dann ist mal der Umfang... [*Sprung im Band*] nämlich, wie viel das da zunimmt *[unhörbar]* eben sagen, wenn ich damit rechne *[unhörbar]* schneiden was übrig bleibt, und dann sie das mal berechnen lassen. Dass sie einfach selber, das da kommt ja eigentlich dazu und die Fläche nimmt trotzdem ab.

Sie unterrichten nach dem Buch, das der Kanton Zürich...

Ja, ich muss sagen, ich find’s katastrophal. Also, es gefällt mir überhaupt nicht. Absolut nicht. Weil es ist für mich völlig chaotisch aufgebaut ist. Also, ich seh’s hier, jetzt bei der 6. Klasse halt auch, sie machen, also ich habe jetzt bei mir 16, und wenn ich nach diesem Buch vorgegangen wäre, dann hätten sie gar nicht den ganzen Stoff vermittelt gehabt, den sie [*Sprung im Band*] Flächenrechnen wäre ja eigentlich hier ein Kapitel, das wir ausschneiden müssen.

Haben Sie Alternativen?

Das Zahlenbuch. Und das Zahlenbuch ist eigentlich ein Buch, das viele offene Aufgaben stellt. Und auch die verschiedenen Niveaus in den Klassen abgibt. [*Sprung im Band*] Das Buch, das wir im Moment auf dem Markt haben, das aus dem Lehrmittelverlag eigentlich kommt, dann, *[unverständliche Passage]* vertraut werden, weil sie dann wirklich mit Zahlen umgehen können müssen. Und es ist dann nicht einfach ein schematisches Rechnen, eben zusammenhängend.

Wie würden Sie das halten, so einen Zahlenraum, wie müsste der vom Verständnis her aufgebaut sein?

Es geht vor allem beim ersten Mal so, dass wirklich aufgebaut werden muss, ist dann bei der Multiplikation. [*Sprung im Band*] ...sie größere Sprünge machen, als nur eben beim plus-minus-Rechnen, und da gibt's so eine Tafel im Zahlenbuch, wo sie so stehen, auf diesen Ziffern [*Sprung im Band*], weil sie sehen dann überall die Zehner, wie sie untereinander liegen, wenn ich hier Nullen habe, dann geht das so hoch, dass ich immer die Zehner-Reihe, das geht dann immer gleich hoch, und sie sehen dann plötzlich Verknüpfungen, also sie können sagen: „Okay, wenn ich 3 mal 7 rechne, hab ich 21, und dasselbe gilt aber auch, wenn ich 20+ 1 rechne, also sie sehen dann plötzlich den Zusammenhang zur Multiplikation und Addition, also sie können danach verschiedene Arten entw... [*Sprung im Band*] ... eben auch, dass man den Kindern z.B. sagt, auf wie viele Arten könnt ihr z.B. 21 [*Sprung im Band*] multiplizieren [*Sprung im Band*] ... ich denke mir auch, was wir gerade besprechen, dass wir die Kinder da ziemlich einengen und sagen: Nein, wir rechnen jetzt nur bis eine Million, und da nicht darüber weg gehen. Das ist falsch, das geht da noch nicht. Also, wir engen sie ein, und das ist eben auch von unserem Lehrmittel her eben auch so vorgegeben. Also es geht dann eben wirklich nicht über eine Million, und wenn [*Sprung im Band*] ... Kindern ... [*Sprung im Band*] ...vom Gebiert her [*Sprung im Band*]... eben nicht [*Sprung im Band*]...wenn es chaotisch ist, dann ist es auch einengend. Und [*Sprung im Band*] das ist ganz schlimm im Erstklassenlehrmittel, das wir haben [*Sprung im Band*]..., wenn ein Kind schon nur ein bisschen rechnen kann, dann langweilt es sich das ganze 1. Jahr [*Sprung im Band*] ... weil es keine Alternative dazu findet...

Es wird sehr abgehandelt... Und dann immer wieder so Repetitionskapitel, wo man dann immer wieder einfach durcheinander was rechnet [*Sprung im Band*]. ... Es gibt ihnen dann, wenn sie verschiedene Kapitel durcheinander bringen müssen, und eben dann in einer Rechnung plötzlich Proportionalität *[Passage unverständlich]* Prozentrechnung bringen, dann sind sie hilflos verloren, weil sie es nie so gesehen haben. Sondern sie haben Proportionalität nur gerechnet, und sie können das, sie beherrschen das, weil sie sehen: „Aha, das ist Proportionalität!“, sie müssen’s nicht mal erkennen in der Aufgabe, sondern oben steht der Titel: Es ist Proportionalität und es handelt sich darum. Und zwar, wenn irgendetwas dann vermischt wird, und man zwei Kapitel dann unter einen Hut bringen muss, dann wissen Sie nicht mehr, wo man anfangen soll. Sie denken dann, vielleicht, bei diesem Prozentzeichen, dass es sich um %-Rechnung handelt, aber sie können dann eben nicht mehr erkennen [*Sprung im Band*] [*Sprung im Band*] ...in der 6. Klasse dadurch, dass sie dann einfach können [*Sprung im Band*] ...Auch wenn man das aufnimmt, sie [*Sprung im Band*] ...müssen die Vorstellung nicht. [*Sprung im Band*] ...Sie finden Mathematik ist [*Sprung im Band*] ...eigentlich einen Lösungsweg bereits haben müssen, und wenn die Aufgabe ein bisschen was macht, reicht’s nicht...

7.18 ***Protokoll 18 S***

Alter der Lehrkraft: *42 Jahre*

Frage 1

Also, das wichtigste ist: Das Kind muss eine Zahl erfassen können, es muss wissen: 45 ist größer als 27. Und dass Einer, also das Dezimalsystem muss das Kind kennen, es gibt Einer, Zehner, Hunderter usw. Das ist das absolut Wichtigste. Es muss wissen, das Dezimalsystem geht von rechts nach links, ... von links nach rechts, je weiter vorne eine Ziffer ist, desto größer ist sie. Und es muss unterscheiden können Zahl, Ziffer. Das kann es bei mir in der 4., respektive in der 3. allenfalls und man könnte das jetzt lösen. 45 besteht aus den Ziffern 4 und 5, minus 27, Ziffer 7 und 2. Das Ergebnis, da leg ich auch Wert drauf bei der Subtraktion, es muss kleiner werden bei minus, bei der Subtraktion. Aber das führt man dann sehr systematisch ein im Unterricht, also hier heb' ich nur so Ziffer, Zahlen, das ist wichtig zu unterscheiden, und dass es ein Dezimalsystem gibt, das baut man sich von der Unterstufe an auf. Das ist das Grundlegende für die Unterstufe.

Bei diesen Aufgaben passiert ja eine ganze Menge. Dort entsteht ein Übertrag, so sagen wir, bei Ihnen heißt das manchmal aber auch anders in der Schweiz, wie erklären Sie das?

Das Wort Übertrag kenn ich nicht. Einen Unterschied vermute ich, Differenz....

Wenn Sie rechnen, meine ich.

Ich weiß nicht, was Übertrag ist.

Die Schweizer sagen manchmal: „behalte 1", z. B...

Ah. Ja. Also 7 Einer und 5 Einer sind 12 Einer – meine Kinder kennen das Dezimalsystem, sie wissen 12 Einer sind ein Zehnerstab, zehn also, und 2 Einer. Sie müssen also 2 Einer hinschreiben und sich einen Zehner merken, und dürfen das klein unter die Ziffer 2 schreiben.

Ja.

Sie wissen, dass es nicht mehr 1, sondern 10 wird. Wir machen das auch mit dem Holzmaterial, mit dem Multibasen stelle ich das zuerst mal dar.

Und bei der Subtraktion, wie würden Sie da herangehen?

Jetzt hab ich...wie viel?...Ja, wir ergänzen bei der Subtraktion, d.h. 7 plus wie viel ist 15? Wir sagen 5 Einer minus 7 Einer, das geht nicht. Ich muss von den vier Zehnern einen Zehner zerlegen in 10 Einer, hinüber schreiben und dann heißt die Rechnung 15 minus 7. Und diese „Behalte 1“ muss ich mir merken, weil ich hier oben jetzt nicht mehr 4 Zehner hab, sondern nur noch 3. Mit diesem „Behalte 1“ kann ich mir das ergeben. Es ist mathematisch nicht logisch, das gebe ich zu, aber es ist machbar so.

Ja, Sie sagen es ist mathematisch nicht logisch, wie wäre es denn mathematisch logisch?

Mathematisch logisch wäre es, wenn das Kind rechnen würde: 5+7, merkt: Oh, stimmt nicht! Ich nehme von den 4 Zehnern einen rüber, und schreibe hier 3 Zehner hin. Hier hab ich 15 minus 7 ist 8, und jetzt hab ich 3 minus 2 ist 1. Meine Kinder reagieren schlecht auf von oben nach unten rechnen. Die meisten mögen lieber Ergänzen. Und deshalb machen wir diesen anderen Weg.

Aber könnte man ja auch, man könnte dann von 2 auf 3 ergänzen, man müsste ja nicht von 3 auf 4 ergänzen.

Von 2 auf 3 richtig! Aber ich habe nie meinen Kindern gesagt, du musst hier jetzt eine 3 hinschreiben, ich erklär's bei der Einführung erklär ich's. Aber jetzt in der Rechnung macht das kein Kind! Da bin ich ganz sicher. Es ist nicht sauber, was wir machen, ich gebe es zu, gleicherweise Multiplikation, aber irgendwann lernen sie's dann selber, wenn sie soweit sind, in der 4. Klasse sind sie zum Teil noch nicht so weit, um es zu verstehen.

Frage 2

Ich ginge das an einer Wandtafel zu erklären. 123 mal 645 würde ich meinen Kindern erklären: „Du beginnst bei der letzten Ziffer bei 123, das sind die Einer, 3 mal 645 sollen sie durchrechnen. Und dann ist halt wichtig, diese Ziffer 2, die nach der 3 kommt, das sind die Zehner, sie bedeutet zwanzig, dass man zuerst die Ziffer 0 hinschreiben muss – das mach ich immer mit Farbe an der Wandtafel, damit's nachher nicht immer 20 mal 645 heißt, sondern nur noch 2 mal. So. Wenn ich diese 0 geschrieben habe, geht das so. Hab ich das 10 mal – kann ich's auslassen. Bei 100 ist es das gleiche, bei 100 kann ich alles 1 mal 645, wenn ich zuerst zwei Ziffern 0 geschrieben habe. Und ich kann's an der Wand ja auch besser zeigen als nur mündlich im Gespräch.

Ich verstehe aber, wie Sie das meinen, also, ich kann mir das schon vorstellen, wie Sie's an der Wandtafel erklären.

Na, ja, das ist 20 mal 100, da das darin versteckt ist, mit diesen Ziffern, mit Nullziffern, kann ich das mir erlassen.

Frage 3

„Wie schön, dass du klug bis und etwas ausprobierst und überlegst, find ich unglaublich positiv." Ich würde auch sicher so beginnen, ich schau mir die Skizze an, ich hab mir das noch gar nicht überlegt. Also, sie behauptet...sie erklärt, mit Zunahme einer geschlossenen... und gleichzeitig die Fläche größer wird, ich muss ausrechnen: 16 cm², 32 cm². Der Umfang, die Länge in cm hat sich verdoppelt zu vorher, ist länger geworden. Jetzt können wir noch ein anderes Beispiel machen, respektive mehrere Beispiele, also, ich kann da gar nicht viel im Moment sagen, darf ich mal probieren?

Ja, vielleicht... Das sind leider jetzt die beiden, die ich habe, ich muss sehen, dass ich sie kopiere. Ich kann Ihnen auch ´nen Zettel geben...

Es geht um die Frage, wir würden an der Wandtafel ein anderes Beispiel machen, denn sie hat ja Recht. 3 cm mal 3 cm, wenn ich jetzt das bei 3 cm lasse, und die auf 6 verdopple, *[um]* nochmals bei ihrem Beispiel zu bleiben, dann wäre das 9 cm² und 18 cm². Also, es verdoppelt sich die Fläche, sogar, ja. Ich fand das toll, ja? Ich kann da gar nicht mehr sonst zu sagen.

7.19 *Protokoll 19 S*

Alter der Lehrkraft: 25 Jahre

Frage 1

Ich erklär' jetzt einfach, wie ich da vorgegangen bin, bevor wir da begonnen haben.

Also, die Addition, die setzen sie da voraus. Und ich habe das ganze mit dem Verfahren nach der Addition aufgebaut, und zwar hab ich... Erst bevor Schüler das irgendeine Erklärung, oder irgendetwas von mir erhalten haben, müssen sie einfach mal versuchen. Wie sie das – also, am Boden wurde mit Klebeband alles abgedeckt, mit Tausendern, Hundertern, Zehner, Einern, und da haben sie 2 Felder, und dann müssen sie selber einfach mal versuchen, mit Klötzen auszuprobieren, bevor sie irgendeine Erklärung oder etwas von mir bekommen haben. Wie man das legen könnte, dass die Kinder wissen, wie man 45 legt mit solchen Sachen, die Kindern wissen, wie man 27 legt, und sie müssen dann einfach mal am Boden ausprobieren und versuchen, wie man das legen könnte, dass man auf das richtige Resultat kommt. Sie können das im Kopf ausrechnen, bevor sie das Verfahren kennen und sie wissen demnach, was das Ergebnis ist. Und dann sind wir wieder zurück zu der Additionsstufe gegangen und dann haben die Kinder verschiedene Lösungswege herausgefunden – bevor ich ein Verfahren erklärt habe, müssen sie in Gruppen miteinander besprechen, wie man das machen könnte, und danach musste jede Gruppe ihren Weg vorstellen. Und ich arbeite nicht nur mit dem offiziellen Lehrmittel, also ehrlich gesagt, ich weiß gar nicht, wie die die schriftliche Subtraktion erklären, ich mache das mit dem Zahlenbuch.

Ich habe schon viel davon gehört, ja.

Und da hat es dann einen Weg darin. Und erst als die Kinder dann ihre Wege selber dargestellt hatten und verglichen haben, haben wir einmal geschaut, wie es hier im Buch gemacht wird. Und zwar Schritt für Schritt. Und das Verfahren ist, also es geht nicht mit 5 minus 7, also, das Verfahren, dass sie selber hatten, sind sie meistens auch häufiger von dieser Situation ausgegangen, weil sie vorher gerade die Addition gemacht hatten, und wir gingen davon aus: was habe ich – was will ich. Also, wir hatten dann den Boden mit Klebeband abgedeckt, und was hier getan.
Ich habe 7 Einer! Und ich möchte 5 Einer haben. Wie bekomme ich 5. Das ist im Prinzip das selbe Verfahren, wie man den Zehnerübergang lernt in der ersten Primarklasse. Also, sie hatten 7 Einer und sie wollten 5 Einer haben. Und da haben sie

gesehen: Ah, ich muss über den Zehner hinausgehen, damit das geht, und nun begannen sie mit dem Tauschen. Das ist dann das Behalte 1: Sie hatten 7 Einer, sie wollten 15 Einer haben, und das ging nur, wenn sie einen Zehner von da getauscht haben. Und die Kinder mussten sehen, dass dieser Tauschvorgang – es gibt dieses Behalte 1 – und dann mussten sie das wieder am Boden legen und tauschen – und zuerst, bevor sie dann wirklich selber mit Zahlen gerechnet haben, haben sie das alles einfach am Boden gelegt, ich hab sie drei Lektionen nur am Boden legen lassen.

Sie tauschen einen Zehner von den 4 Zehnern, hier z.B. bei der ersten Aufgabe, und schreiben die Behalte 1 aber unten bei der 2 hin. Hab ich das richtig verstanden?

Ja!

Und dann sind ja nur noch 3 Zehner da. Also wie erklären Sie, dass Sie die Behalte 1 unten bei der 2 schreiben, und nicht aber, wo getauscht wird? Denn Sie tauschen ja oben, bei den 4 Zehnern...

Ja, das ist vielleicht nicht ganz logisch, aber das wird genauso im Buch eingeführt!

Ach ja, okay. Gut! Dankeschön!

Also, die Grundfrage ist immer: Das hab ich – wieviel will ich? Und nicht da – weg da! Und die Voraussetzung ist, dass sie das machen können natürlich, dass man umkehren kann und versteht, dass 5... 7 minus 5 genau das selbe ist wie 5 mal *[schreibt an der Tafel]* 7 =, also, das als Vorübung. Das System, dass man aus ´ner Minusrechnung auch ´ne Plus herausfinden kann.

Frage 2

Ich kann nur sagen, wie ich die schriftliche Multiplikation eingeführt habe. Also, ich habe diese Situation jetzt gar nie erlebt und ich bin auch nicht eingelesen, dass ich sagen könnte, wie ich dieses Problem angehen würde.

Okay. Gut. Dann gehen wir gleich direkt zur nächsten Situation. Da geht es um Geometrie!

Auch nie gemacht!

Na ja, vielleicht ergibt sich das ja aus der Situation heraus.

Frage 3

Das ist... Sie sagt was? Dass sie eine Theorie herausgefunden hat... Wir machen es sowieso so, dass sie zuerst selber ausknobeln können, und dann vergleichen wir. Und dass verschiedene Wege nach Rom führen, aber ich meine, das stimmt ja, dass bei... Das stimmt, ja!

Und wie würden Sie der Schülerin antworten in dem Fall?

Ja, sie soll genau erklären, was sie macht und wenn das stimmt... Also ich weiß nicht: Geht es darauf aus, dass in dem Lehrmittel ein anderer Weg gezeigt wird, oder dass das nicht stimmt, oder...?

Nein, die Situation ist einfach so da: Die Schülerin steht vor Ihnen und sagt: Frau ...

Ja, dann darf sie an die Tafel und erklären, was ihr Weg ist, und wenn das stimmt, dann lob ich sie, dass sie selbst einen Weg herausgefunden hat!

7.20 *Protokoll 20 S*

Alter der Lehrkraft: *47 Jahre*

Frage 1

Mmh... Ich hab den Kopf so voll! Also, es ist relativ schwierig im Kopf so komplex... Wie würden Sie an solche Probleme herangehen... Also, der Zehnerübertritt ist sehr wichtig, oder? Ich habe beim Einführen z.B. oben Einerkolonne, Zehnerkolonne, Hunderterkolonne, Tausenderkolonne hingezeichnet. Und diese Kolonnen an der Wandtafel gezeigt, oder? Eine Kolonne, Reihe, dann Zehner, nächste Reihe. Und dann haben wir gemerkt, dass, wenn ich jetzt oben eine kleinere Zahl habe, also wir eigentlich über Zehn hinausgehen müssen und dann hier die Zehn auch behalten müssen, weil wir da eine 11 draus machen, oder? Haben wir dann die Eins hinüber genommen, kommen die Zehnerkolonnen. Und dann die 1 wird hinüber genommen in die Hunderterkolonne, wenn's „Behalte" gekommen ist. Also, ich weiß nicht, ob sie mir folgen können, aber der Übertritt: Warum muss ich überhaupt etwas behalten, oder? Ist dann eine Zehn eigentlich von da weggenommen, da gebraucht wird...

Von wo wird die Zehn weggenommen?

Von hier, oder?

Von der Sieben runter!?

...nehm' ich hinein. Ich muss ja über die Zehn hinaus, und da muss ich nachher die Zehn unten wieder notieren, weil ich hier elf denke, nicht eins denke, oder? Und dann hab ich dann bei den Zehnern einen mehr.
Und ich hab dann wirklich mit Auswendiglernen ... 9 und wie viel sind 11 ... 9 und 2 sind 11 ... schreibe 2, behalte 1. Also, dass dieser Schritt, von unten nach oben rechnen: „Wie viel sind 11? 2! Schreibe 2, behalte 1! Die 1 hinübergenommen und dann 1 und 7 gleich 8, und wie viel sind 9 minus 1 – schreibe 1 – haut hin, oder?

Versteh ich das richtig, dann ist die Behalte 1 hier unten sozusagen nur ein Symbol für den Zehnerübertritt?

Ja, richtig!

Also, sozusagen das Merken, dass ich über den Zehner drüber weg gegangen bin und das notiere ich mir.

Genau. Aus, ja man muss es ist also es nicht ein Symbol, sondern es ist ja eigentlich ein Zehner da mehr nachher, weil ich hier ja einen Zehner noch gebraucht habe, oder? Ich, ich brauch ja diesen Zehner, den ich da... Ich kann ihn ja nicht von irgendwo wegnehmen, oder?

Sondern? Wo nehmen Sie ihn weg?

Also, ich nehme... Ich brauche ihn dazu, und weil ich da hinüber.... also von 79 auf 81 eigentlich rechnen muss, überschreite ich ja diesen Zehner und die Zehner notiere ich hier.

Frage 2

Also, wenn ich mit dreimal beginne, oder? Mit den Einern...
So würden Sie es machen... Also wir rechnen andersrum... Kommt die nach vorne?

Ja, genau.

Ach so, darum ist hier nicht... bei uns sieht es dann so aus, oder? Also, noch einmal wieder bei Einer, Zehner und Hunderter Probleme, oder? Wenn ich mit Einern rechne; geht das normalerweise, also, wenn Sie so nach vorne rechnen... Wie rechnen Sie? 3 mal...

Wir rechnen 6 mal 3!

6 mal 3! Also erst die eine Gruppe, oder? Multiplizieren Sie. Ja, das wird aber schwierig dabei, wenn man so umdenken muss, sowieso... Wenn, weil das wäre ja dann die Hunderter, die Tausender, die Hundertergruppe schon... Ja, gut! Doch, das kann ich Ihnen so erklären. Die – das ist die Hundertergruppe, die 6 mal, oder? – 600 mal 123 würde es heißen, ohne diese Zahlen da, oder? Also muss ich für die Hunderter zwei Stellen ausfüllen mit Nullen. Und dann – weiter rechnen, 6 mal 3, 6 mal 2, 6 mal 1 – dann kommen die Zehner! Auch hier wieder 40 mal – also die 40 wieder eine Null brauch hier zum Ausfüllen, weil es heißt ja 40 mal und nicht 4 mal –

und dann wieder unter die Vierer nach vorne und dann hinter die eine, die braucht keine Stelle mehr.

Frage 3

Logisch! Nein, also, ich glaube, wenn wir mit... zusammen mit einem cm Seitenlänge je eine Fläche darstellen, bringe man kaum einen Finger darauf, und wenn in einen Meter Seitenlänge eine Fläche darstelle, dann kann man darauf sitzen, oder? Also ist das logisch, dass, wenn umso größer die Seiten sind, umso größer wird auch die Fläche von einem Rechteck oder einem Quadrat.

7.21 *Protokoll 21 S*

Alter der Lehrkraft: *23 Jahre*

Bisher geleistete Dienstzeit: < *1 Jahr*

Frage 1

Das ist spannend, weil ich bin jetzt gerade an der Vorbereitung vom Thema. Also, vielleicht muss ich zunächst Ihnen noch sagen, dass ich ja das erste Jahr unterrichte. Und ich hab null Erfahrung!

Ja, das ist doch ganz interessant!

Also, es ist für mich wirklich das erste Mal, und von dem her werd ich vielleicht Ihnen manchmal nicht so viel sagen können, wie ich jetzt an ein Problem herantrete, weil es vielleicht noch gar nicht vorgekommen ist, oder so.

Dann kommen Sie direkt aus der Ausbildung.... Darf ich fragen, wie alt Sie sind?

Ich bin 23.

Wenn Sie direkt von der Ausbildung kommen, dann wird das wahrscheinlich sogar eins der Standardprobleme gewesen sein, die sie da...

Ja, aber es ist einfach... das sind ja jetzt Viertklässler, die ich habe, die sind 9 und 10 Jahre alt. Also, die meisten 10, einige 9 Jahre alt. Und das ist einfach eines der wichtigsten Themen bei uns in der vierten Klasse, eben rechnen mit Übertrag. Und ich habe jetzt vor etwa zwei Woche damit begonnen, und zwar mit Frau X, mit der anderen Viertklässlerin zusammen machen wir das. Also, sie erklärt mir, wie sie's macht und ich übernehme das eigentlich ein bisschen. Und was jetzt für uns bei diesem Thema viel wichtiger ist, ist, dass die Kinder überhaupt verstehen, dass es ein System ist, das nicht Gott gegeben ist. Also, wo man da drin rechnet. Oder dass es eigentlich ein System ist, das praktisch ist, und dass wir deswegen eben im Zehnersystem rechnen. Man könnte jetzt aber auch im Dreiersystem rechnen, oder im Vierer- oder im Fünfersystem... Also, dass sie diese auch ein bisschen verstehen... Und der Grund ist auch der, dass, wenn sie im Dreiersystem rechnen müssen, müssen sie wirklich verstehen, was dahintersteckt. Oder im Fünfersystem. Oder... schwierig zu erklären. Sie müssen dann wieder hinterblicken können. Oder weil im Dreiersystem hat man ja dann nur die Ziffern 0, 1, 2, und deswegen hab ich jetzt begonnen, ihnen zu vermitteln, ein bisschen in diesen Systemen herumzuturnen. Und auch damit zu rechnen. Also, heute haben wir jetzt im Dreiersystem gezählt, z.B. Und das würd' ich auf jeden Fall vorher mit den Kindern besprechen, also die verschiedenen Systeme, die es überhaupt gibt, bevor ich mich hier dran machen würde. Dann würde ich sicher am Anfang mal auch mit Klötzen arbeiten, also die haben wir da hinten, die haben sie sicher auch, diese Bauklötze... Ich würde das nicht so nüchtern angehen, sondern wirklich auch die Sachen eben zusammenzählen und dann auch... damit sie sehen, warum denn auch der Übertrag passieren muss, warum dass man jetzt die eins hinschreiben muss, weil es eben über glatt 10 hinausgeht... Ja! Das ist so ein bisschen das...

Ja. Dann passiert ja eine ganze Menge, da wird ja manchmal eine 1 geschrieben oder nicht, der Übertrag wird auf viele verschiedene Arten und Weisen erklärt. Wie würden Sie das machen, wenn da ein Schüler nachfragt und das nun nicht richtig versteht und sagt: „Dieser Übertrag, was hat es damit auf sich?" Welche Möglichkeit hätten Sie, ihm das zu erklären?

Also, eigentlich ja die Möglichkeit, dass wir ja nur die Ziffern 1 bis 9 haben. Deswegen beginne ich eben auch mit dem 3er-System: weil sie da eben verstehen müssen: Ich habe nur die Ziffern 0, 1 und 2. Und immer wenn die 3 kommt, beginnt's wieder bei 0. Und ich würde mit ihm solche Additionen und Subtraktionen mit Überträgen zuerst mal nur im 3er-System machen. Weil ich eben glaube, dass sie so dann auch verstehen, warum die 1 hinkommt oder die 2. Weil es ja eben wieder von vorne beginnen muss. Also, so stell ich mir das jetzt vor, so würd ich's ihnen erklären...

Und dann fangen die Schüler an zu rechnen. Wie würden Sie rechnen? 5 minus 7 oder 7 bis 5?

7 bis 5.

Also Sie würden auch ergänzen?

Ja, ich würd' ergänzen.

Und wie würden die Schüler dann weiter rechnen in der Aufgabe? Also, sie rechnen von 7 bis 5, und dann?

Also, es ist ja die 5 ist ja klar, das muss dann der nächste Zehner sein, eben 15. Weil ich kann ja nicht... Also 5 wäre ja unter 7, wenn es jetzt nur die Ziffer 5 ist. Also muss ich ja hochrechnen, also es kommt ja dann der Zehner. Und also würd' ich ihnen erklären, wir müssen... wir haben ja nur die Ziffern 1 bis 9, deswegen nehmen wir den Zehner auf die nächste Linie, also nehmen wir den Zehner hier rüber. Wir schreiben den einfach auf. Also, es ist zwangsläufig schwierig. Ich weiß es nicht. Weil ich bin noch nie in die Situation gekommen, dass mich ein Kind gefragt hat.

Okay. Gut. Also, aber, mir ist schon klar geworden, wie Sie da rangehen. Wollen wir zur nächsten Situation übergehen?

Ja.

Frage 2

Ja. Jetzt als erstes kommt mir in den Sinn, dass man ihnen... also, das hat ja etwas mit dem Stellenwert auch zu tun, also mit Tausendern, Hundertern, Zehnern, Einern. Man müsste ihnen irgendwie bildlich vermitteln, also, wie man eben in einer Zahl ja zuerst den Tausender hat, dann den Hunderter, dann den Zehner und den Einer muss man dann auch verrechnen, genauso Schritt für Schritt nach hinten rücken. Irgendwie so. Also, konkret kann ich's Ihnen nicht sagen.

Gehen wir zur nächsten Situation über.

Frage 3

Keine Ahnung. Da hab ich keine Ahnung. Da würde ich jetzt eben zu meinen Kolleginnen rüber gehen, ich frag die dann. Ich kann's Ihnen nicht sagen.

Ja. Und was würden Sie der Schülerin dann sagen, in dem Moment?

Ich würd's ihr sagen!

Also so wie Sie's jetzt auch gesagt haben: „keine Ahnung."

Ja, ich sag' das den Kindern. Wenn ich einfach nicht weiß, wie ich eine Sache erklären soll, dann sag' ich ihnen, dass ich mir das zuerst anschauen möchte. Und es ihnen am folgenden Tag erkläre. Nur normalerweise ist es so, das, was sie mich im Unterricht fragen, also da bin ich dann im Thema drin, und das kann ich dann meistens auch beantworten. Aber eben so, dass... ich müsste diese Multiplikation, diese schriftliche, das hab ich noch gar nie gemacht mit den Kindern, weil das kommt bei uns erst in der fünften Klasse und Mathematik ist nicht mein Steckenpferd. Es ist für mich jetzt schwierig.

7.22 *Protokoll 22 S*

Alter der Lehrkraft: *50 Jahre*

Frage 1

Ja, ja, genau. Also gut, wenn ich das sehe, dann weiß ich natürlich, dass vorher die schriftliche Addition eingeführt wurde, und dann liegt die Problematik erstens im Übertrag – die Problematik der Stellen, das wurde bereits behandelt – und vor der Addition vorgängig wird bei uns jetzt in der 4. Klasse ganz genau und sorgfältig der Aufbau *der Zahlen* nach Stellen. Stellenwert und Zahlenwert, das ist ganz deutlich unterschieden. Und die Zahl 45 kann also bei einem Schüler zerlegt werden in 4 Zehner, 5 Einer. Und abgehend dann von der Addition, da sind 7 Einer + 5 Einer = 12 Einer sprechen wir, und schreiben dann 2 Einer und diese 10 nehmen wir zu dem Zehner hinüber. Genauso wird das dann bei der Subtraktion gemacht, wir ergänzen – als wir rechnen 7 Einer + wie viel = 15 Einer. Also, wir sprechen da mit diesen Einern und Zehnern. Und dann diesen Zehner muss ich da dann hinzufügen, weil ich muss ihn ausleihen sozusagen von der Zehnerstelle hier, weil ich ja nur 5 habe, leih ich ihn aus und dann geb ich ihn zurück.

Von wo leihen Sie ihn aus?

Also: 7 + wie viel = 15, 7+8=15. Ich habe ihn sozusagen von dieser Zehnerstelle hier hinüber genommen, also muss ich ihn zurückgeben, damit ich dann nicht... Ist das richtig?

Ja...Von welcher, von der, von dieser Zehnerstelle oder von dieser Zehnerstelle, oder meinen Sie von der Zehnerspalte?

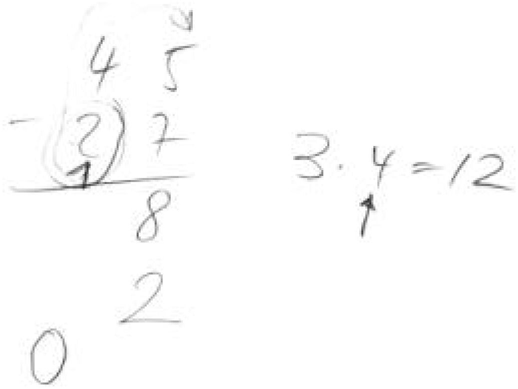


Abb. A 26: 1. begleitende Handskizze der Lehrkraft 22 S

Von der Spalte wahrscheinlich eher, ja.

Ach so. Das ist so Ihr Erklärungsansatz im Unterricht, so besprechen Sie das mit den Kindern.

Ja. Und dann geht das praktisch genau gleich dann weiter, hier. Bei der Addition waren das 7+5 sind 12 Einer, 2 und die 10, die übrig bleiben schreib ich da wieder hin. 10 gibt wieder eine ganze 1.

Frage 2

Mmh. Gut. Erstens muss ich voraus schicken, dass wir es nicht so aufreihen, sondern in die andere Richtung. Also, wie beginnen Sie hier?

Wir beginnen mit den 6 Hundertern.

Ah. So. Wir rechnen diese Einer und diese Einer. Also, wir schreiben eigentlich diese Zahlen eigentlich nie als Treppe, sondern setzen jedesmal, wenn wir eine neue Stelle nehmen, setzen wir eine 0 – d.h. ich setze eigentlich nicht die 0, weil es da Verwechslungen geben kann, wenn hier die 0 schon steht, ich setze einen Punkt. Und zwar sehr konsequent und das ist durch bis 6. Klasse, immer. Also, sobald wir zu den Zehnern... Also wir rechnen 3 mal 5 = 15. Wir beginnen hier mit den Einern, also da haben 15, 3 mal 4, 12, 13, und dann kommt die 2, das sind Zehner. Also 20 mal 5 eigentlich, da schreiben wir eine 0, das Buch gibt eine 0 vor, ich setze den Punkt. Das hat man früher gemacht. Punkt, das ist die Zehnerstelle. Und dann rücken sie ein, und ich muss sagen, dieses Problem haben wir eigentlich kaum, wenn wir diese Stellen dann markieren.

Ja.

Also, so das Problem kenn ich kaum! Muss ich sagen! Also, wir schreiben das eigentlich bis Ende Volksschulzeit ohne diese Stellen.

Frage 3

Muss ich das Problem mir noch mal schnell vor Augen führen... Also mit wachsendem Umfang wird auch die Fläche größer. Ja. Gut, ich glaub, das würde ich den Schülern selber mal übergeben. Ich würde vielleicht die beiden Figuren an die Tafel zeichnen und würde versuchen, die Schüler selber vielleicht versuchen zu lassen. Die würden vielleicht hier mal die Fläche berechnen, die würden darauf zurückkommen, wie wird eine Fläche berechnet, wird Länge mal Breite, und dann würde ich an dieser Gleichung, Länge mal Breite, würde ich versuchen zu erklären, was geschieht mit diesem Produkt, wenn ich den einen Faktor vergrößere. Ja, das ist das Problem, oder? Hab ich das falsch verstanden? Ja, also, oder hab ich das Problem nicht ganz richtig gemacht?

Doch, sie steht vor Ihnen und sag: „also das ist meine Theorie, wenn der Umfang größer wird, dann wird auch die Fläche größer“ und so antworten Sie ihr dann.

Ich muss gerade mal überlegen, ob das überhaupt stimmt. Stimmt schon, oder? Die Fläche wird größer, logisch, ja... Also ich würde von diesen Figuren hergehend würd’ ich das versuchen zu erklären, würd’ vielleicht dann eine weitere Figur machen, indem ich da noch anhängen würde und... ja...

Gut. Dankeschön.

War’s das schon...

Das waren die drei Fragen, die ich Ihnen stellen wollte.

Also, da würd’ ich ganz sicher mir Figuren schaffen, und ich würde vielleicht noch versuchen, das Gegenteil zu bringen, indem ich diese Figur vielleicht variieren würde, dann den Umfang berechne, und eben erklären, in einem Produkt, wenn ein Faktor größer wird, wird das Produkt größer...

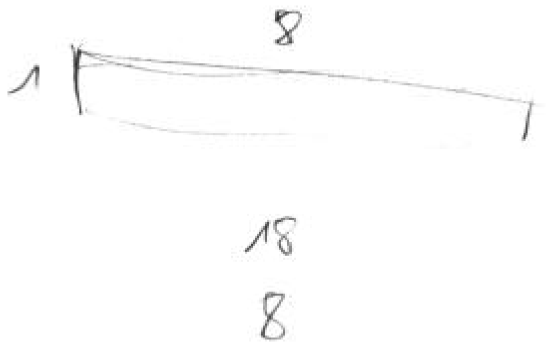


Abb. A 27: 2. begleitende Handskizze der Lehrkraft 22 S

Ja... Welche Fläche würden Sie angeben?

Also z.B. hier, oder.... das und dann den Umfang berechnen, und zeigen, wie die Fläche sich entwickelt. Also, vielleicht von der Gleichung 3 mal 4 = 12, was geschieht, wenn ich z.B. diese 4 vergrößere [*vergl. Abb. A 27*]. Weil, wenn ich den Umfang vergrößere, muss ja einer der Faktoren dann größer werden.

Mmmh...

Die Fläche wird kleiner, da seh ich jetzt grad danach. Da bin ich mir jetzt nicht sicher, wie sieht das aus? 1 cm, wenn ich 3 dazu...

Wenn Sie z.B. die Länge von 8 cm lassen, aber die Seitenlänge auf 1 cm kürzen, dann hätten Sie ja einen Umfang von 18 cm, aber nur eine Fläche von 16. Dann wäre der Umfang größer als die Fläche...

Hab ich die Aufgabe jetzt richtig verstanden?

Anderes Beispiel...

Ach so. Aha. Sie meinen. Ich hab die Aufgabe falsch verstanden. Ich hab's verstanden, aha.

Es ginge auch proportional, Sie können auch dieses hier so verändern, dass der Umfang größer wird und die Fläche kleiner. Also Sie können einen Umfang schaffen von z.B. dann 20 cm, und die Fläche liegt dann nur bei 9. Sie können von diesem Quadrat aus ja ein Rechteck schaffen, das 9 cm lang und 1 cm hoch ist. Dann hat es einen Umfang von 20 und nur eine Fläche von 9. Und dann ist der Umfang größer geworden, aber die Fläche kleiner.

Also, Sie vergleichen diese miteinander...

Nein, dieses mit diesem hier.

Hier hab ich 16 Umfang, hier hab ich 24 Umfang.

Anders. Wenn Sie sagen, wenn der Umfang eines Quadrates, oder eines geometrischen Körpers größer wird, das wird er ja bei

Bei 16 auf 24... So meinen Sie...

Nee.

Bin ich denn doof? Ich versteh die Aufgabe nicht.

Also, wenn Sie ausgehen von diesem hier und verändern Sie den Umfang. Wenn Sie den Umfang vergrößern und sagen, Sie nehmen jetzt eine Breite von diesen – Moment, eine Breite von 8 und eine Höhe von 1, dann hätten Sie einen Umfang von 18.

18, ja!

Ja, und die Fläche wär aber nur 8. Dann hätte Sie den Umfang vergrößert, aber die Fläche verkleinert.

Ach so!

Und sie hat gesagt, immer wenn der Umfang größer wird, wird auch die Fläche größer. Und das stimmt nicht, also hier wird der Umfang größer, und die Fläche kleiner!

Ach so! Ja ja ja ja! Natürlich. Wie soll ich das erklären?

Nein, nein, nein! Also das wär.... Sie haben schon geantwortet, also Sie sagen der Schülerin, das besprechen wir zusammen und bringen mal ein paar Beispiele an die Tafel, und so...

Aber ich muss ehrlich gestehen: Ich müsste mich mehr damit befassen, um ihr zu erklären, wann geschieht was? Wahrscheinlich, wenn das Verhältnis zw. Länge und Breite sich irgendwie ändert... Also, ich könnte jetzt nicht erklären, wann geschieht was...

Ja, das müsste man vielleicht ausprobieren, ob es da so eine Proportionalität...

Aber das übersteigt natürlich bei weitem unsere Möglichkeiten, also wir sind sehr glücklich, wenn die Kinder i. d. 6. Klasse überhaupt noch unterscheiden können Umfang von Fläche, muss ich ehrlich gestehen, ja. Wir haben fast keine Geometrie, fast nicht, das wird bei uns sehr benachteiligt. Lehrplan sind 25 Std. Geometrie in 2 Jahren. Also jedes Jahr 25. Wir kommen kaum dazu, Winkel zu konstruieren, nichts. Praktisch bei 0 müssen sie beginnen in der Oberstufe. Deshalb solche Fragen werden bei uns gar nie auftauchen.