Am Beispiel erkennt man, dass es u.U. auch negative Zahlen gibt, welche zur n-ten Potenz erhoben wieder a liefern:

$$(-2)^2 = 2^2 = 4$$

Man schreibt anstelle von $a^{\frac{1}{n}}$ für $n > 2$ auch $\sqrt[n]{a}$, und statt $a^{\frac{1}{2}}$ einfach $\sqrt{a}$.

Potenzen der Gestalt $a^{\frac{m}{n}}$ werden durch Anwendung der Regel R3) berechnet:

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

3. Es gilt nicht

$$a^{(b^c)} = \left(a^b\right)^c.$$

Beispiel:[1]

$$\begin{aligned} 2^{3^2} &= 2^9 = 512 \\ \left(2^3\right)^2 &= 8^2 = 64 \end{aligned}$$

5.1 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 5.1 zum Berechnen von Ausdrücken mit Potenzen aus.
Beispiel:

`Berechnen Sie:` $\left(\frac{4}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

Erwartetes Ergebnis: $\frac{25}{16}$, nicht aber $\left(\frac{5}{4}\right)^2$

Das Programm erwartet die Eingabe `25/16`.

5.2 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 5.2 zum Zerlegen eines Ausdrucks mit Potenzen in Faktoren aus.
Beispiel:

`Berechnen Sie:` $a^7 - 4a^6 + 4a^5$

Erwartetes Ergebnis: $a^5(a-2)^2$ oder $a^5(a^2 - 4a + 4)$.

[1] Anstelle von $a^{(b^c)}$ schreibt man oft a^{b^c}.

5.3 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 5.3 zum Kürzen eines Bruchs mit Potenzen aus.
Beispiel:

Berechnen Sie: $\dfrac{z^{q-1} - 4z^{q-2}}{z^{q+1} - 8z^{q} + 16z^{q-1}}$

Erwartetes Ergebnis: $\dfrac{z-4}{z^3 - 8z^2 + 16z}$ oder $\dfrac{1}{z(z-4)}$.

5.4 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 5.4 zum Zusammenfassen und Kürzen mehrerer Brüche mit Potenzen aus.
Beispiel:

Berechnen Sie:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^{n+1}} - \frac{x^5 - x}{x^{n+3}} + \frac{2-x}{x^{n-1}}$$

Erwartetes Ergebnis: $\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^{n+2}}$, nicht aber $\dfrac{x^4 + 2x^2 + x}{x^{n+3}}$.

6

Gleichungen

Im folgenden werden nur Gleichungen mit einer Lösungsvariablen x betrachtet.
Beispiele:

1. Die Gleichung
$$x + 3 = 4$$
hat die eindeutige Lösung $x = 1$.
2. Die Gleichung
$$x^2 + 1 = 10$$
hat die Lösungen $x = 1$ und $x = 3$.
3. Die Gleichung
$$\frac{2}{x} = 0$$
besitzt keine Lösung.

6.1 Allgemeines Lösungsverfahren

Gleichungen werden i.a. gelöst, indem man die linke und die rechte Seite so umformt, dass eine neue Gleichung mit denselben Lösungen entsteht. Man führt mehrere Umformungen so durch, dass am Schluss die Lösungsvariable nur auf einer Seite der Gleichung auftritt.
Beispiel:

$$\begin{array}{rcll} x-7 & = & 2x+3 & \quad | \quad +7 \\ x & = & 2x+10 & \quad | \quad -2x \\ -x & = & 10 & \quad | \quad \cdot(-1) \\ x & = & 10 & \end{array}$$

Es gelten folgende Regeln für die Umformung von Gleichungen:

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn

R1) auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl oder derselbe arithmetische Ausdruck addiert oder subtrahiert wird, R2) beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl oder demselben arithmetischen Ausdruck multipliziert oder dadurch dividiert werden, sofern diese Zahl/dieser Ausdruck nicht Null ist.

Achtung: Die Missachtung der Bedingung in R2) kann unauffällig sein:

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} x(x-1) &= 2(x-1) && \mid \ :(x-1) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Es ist aber auch $x = 1$ eine Lösung der Gleichung. Sie ging deshalb verloren, weil für $x = 1$ die Umformung nicht mehr erlaubt ist, weshalb die entstandene Gleichung nicht mehr die gleiche Lösungsmenge haben muss wie die ursprüngliche.

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} &= \frac{6}{x^2-9} && \mid \ \cdot(x+3) \\ 1 + \frac{x+3}{x-3} &= \frac{6}{x-3} && \mid \ \cdot(x-3) \\ (x-3)+(x+3) &= 6 \\ 2x &= 6 && \mid \ :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Hier wurde bei der Umformung nicht dividiert, dennoch ist $x = 3$ keine Lösung der Gleichung, weil $\frac{1}{x-3}$ für $x = 3$ nicht definiert ist.

In Beispiel 2 muss durch Einsetzen geprüft werden, ob $x = 3$ eine Lösung ist. In Beispiel 1 muss die Lösung der Gleichung $x-1 = 0$ der Lösungsmenge eventuell hinzugefügt werden. Dies ist durch Einsetzen zu überprüfen. Es gilt generell:

R3) Wird eine Gleichung durch Division oder durch Multiplikation mit einem arithmetischen Ausdruck A umgeformt, welcher den Wert Null annehmen kann, so sind

1. die Lösungen der Gleichung $A = 0$ der Lösungsmenge hinzuzufügen und
2. alle Lösungen durch Einsetzen zu überprüfen.

Weitere Regeln zur Umformung:

R4) Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht, wenn beide Seiten mit n oder $\frac{1}{n}$ potenziert werden.

R5) Für gerades $n \in \mathbb{N}$ vergrößert sich i.a. die Lösungsmenge einer Gleichung, wenn beide Seiten mit n potenziert werden. Alle gefundenen Lösungen sind durch Einsetzen zu überprüfen.

R6) Für gerades $n \in \mathbb{N}$ verkleinert sich i.a. die Lösungsmenge einer Gleichung (*linke Seite*)=(*rechte Seite*), wenn beide Seiten mit $\frac{1}{n}$ potenziert werden. Die evtl. verlorengegangenen Lösungen sind aber stets Lösungen der Gleichung

$$(\textit{linke Seite})^{\frac{1}{n}} = -(\textit{rechte Seite})^{\frac{1}{n}}$$

Beispiele:

1.

$$\begin{array}{rcll} (x+1)^{\frac{1}{3}} & = & -2 & \quad | \; (\;)^3 \\ x+1 & = & -8 & \quad | \; -1 \\ x & = & -9 & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcll} (x+1)^3 & = & 8 & \quad | \; (\;)^{\frac{1}{3}} \\ x+1 & = & 2 & \quad | \; -1 \\ x & = & 1 & \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcll} (x+1)^2 & = & 4 & \quad | \; (\;)^{\frac{1}{2}} \\ x+1 & = & 2 & \quad | \; -1 \\ x & = & 1 & \end{array}$$

Zusätzlich ist wegen des Potenzierens mit $\frac{1}{2}$ auch die Gleichung

$$x+1=-2$$

zu betrachten. Man erhält die Lösungen $x=1$ und $x=-3$.

4.

$$\begin{array}{rcll} (x^2+1)^2 & = & 4 & \quad | \; (\;)^{\frac{1}{2}} \\ x^2+1 & = & 2 & \quad | \; -1 \\ x^2 & = & 1 & \quad | \; (\;)^{\frac{1}{2}} \\ x & = & 1 & \end{array}$$

Wegen des Potenzierens mit $\frac{1}{2}$ ist auch die Gleichung

$$x=-1$$

zu betrachten.

Zusätzlich ist die Gleichung

$$x^2+1=-2$$

zu betrachten. Diese hat aber keine Lösung, da stets $x^2 \geq 0$ ist. Man erhält die Lösungen $x=1$ und $x=-1$

5.

$$
\begin{array}{rcrcr}
x+1 & = & \sqrt{2x+10} & | & (\ )^2 \\
(x+1)^2 & = & 2x+10 & | & \text{Ausmultiplizieren} \\
x^2+2x+1 & = & 2x+10 & | & -2x \\
x^2+1 & = & 10 & | & -1 \\
x^2 & = & 9 & | & (\ )^{\frac{1}{2}} \\
x & = & 3 & &
\end{array}
$$

Zusätzlich ist wegen des Potenzierens mit $\frac{1}{2}$ auch die Gleichung

$$x = -3$$

zu betrachten. Da vorher mit 2 potenziert wurde, sind die beiden Werte $x = 3$ und $x = -3$ durch Einsetzen zu prüfen:

$$
\begin{array}{rcl}
(3+1) & = & \sqrt{2\cdot 3+10} \\
(-3+1) & \neq & \sqrt{2\cdot(-3)+10} \\
& & \text{wegen } \sqrt{2\cdot(-3)+10} = \sqrt{4} = 2.
\end{array}
$$

6.

$$
\begin{array}{rcllr}
x+1 & = & \sqrt{2x+2} & | & (\ )^2 \\
(x+1)^2 & = & 2x+2 & & \\
x^2+2x+1 & = & 2x+2 & | & -2x \\
x^2+1 & = & 2 & | & -1 \\
x^2 & = & 1 & | & (\ )^{\frac{1}{2}} \\
x & = & 1 & &
\end{array}
$$

Zusätzlich ist wegen des Potenzierens mit $\frac{1}{2}$ auch die Gleichung

$$x = -1$$

zu betrachten. Da voher mit 2 potenziert wurde, sind die beiden Werte $x = 1$ und $x = -1$ durch Einsetzen zu prüfen:

$$
\begin{array}{rcl}
(1+1) & = & \sqrt{2\cdot 1+2} \\
(-1+1) & = & \sqrt{2\cdot(-1)+2}
\end{array}
$$

6.2 Lineare und quadratische Gleichungen

Wir wollen im folgenden Gleichungen betrachten, die sich durch Umformungen auf folgende Normalformen bringen lassen:

$$
\begin{array}{rcll}
ax+b & = & 0 \text{ mit } a,b \in \mathbb{R} & \text{(lineare Gleichung)} \\
x^2+px+q & = & 0 \text{ mit } p,q \in \mathbb{R} & \text{(quadratische Gleichung)}
\end{array}
$$

Die lineare Gleichung hat

- die eindeutige Lösung $x = -\frac{b}{a}$ für $a \neq 0$,
- keine Lösung für $a = 0$ und $b \neq 0$,
- alle reellen Zahlen als Lösung für $a = b = 0$:

	$b \neq 0$	$b = 0$
$a = 0$	keine Lös.	alle $x \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$	$x = -\frac{b}{a}$	

Die quadratische Gleichung hat

- die Lösungen
$$x = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) \text{ und } x = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\right),$$
falls $p^2 > 4q$ ist,
- die Lösung $x = -\frac{p}{2}$ für $p^2 = 4q$,
- keine Lösung für $p^2 < 4q$.

Beispiele:

1.
$$\begin{aligned}
(x-4)(2x-9) &= (x-6)^2 && \mid \text{ Klammern auflösen} \\
2x^2 - 17x + 36 &= x^2 - 12x + 36 && \mid -36 \\
2x^2 - 17x &= x^2 - 12x && \mid +12x \\
2x^2 - 5x &= x^2 && \mid -x^2 \\
x^2 - 5x &= 0 && \mid \text{ quadratische Gleichung mit} \\
& && \quad p = -5, q = 0
\end{aligned}$$

Lösungen:
$$x = \frac{1}{2}\left(-(-5) + \sqrt{25}\right) = \frac{5+5}{2} = 5$$
und
$$x = \frac{1}{2}\left(-(-5) - \sqrt{25}\right) = \frac{5-5}{2} = 0.$$

2.
$$\begin{aligned}
\frac{7x}{10} - \frac{2}{5} &= \frac{x}{2} && \mid -\frac{x}{2} \\
\frac{7x}{10} - \frac{x}{2} - \frac{2}{5} &= 0 && \mid \cdot 10 \\
7x - 5x - 4 &= 0 \\
2x - 4 &= 0 && \mid \text{ lineare Gleichung mit } a = 2, b = -4
\end{aligned}$$

Lösung: $x = 2$.

3.

$$\begin{array}{rcll} 3+\sqrt{2x-3} & = & x & \mid\ -3 \\ \sqrt{2x-3} & = & x-3 & \mid\ (\ )^2 \\ 2x-3 & = & x^2-6x+9 & \mid\ -2x \\ -3 & = & x^2-8x+9 & \mid\ +3 \\ 0 & = & x^2-8x+12 & \mid\ p=-8, q=12 \end{array}$$

mögliche Lösungen:

$$x = \frac{1}{2}\left(-(-8)+\sqrt{64-48}\right) = \frac{8+4}{2} = 6$$

und

$$x = \frac{8-4}{2} = 2.$$

Es ist eine Probe erforderlich:

$$\begin{array}{lcrcl} x=6 & \longrightarrow & 3+\sqrt{2\cdot 6-3} & = & 6, \\ x=2 & \longrightarrow & 3+\sqrt{2\cdot 2-3} & \neq & 2. \end{array}$$

Nur $x = 6$ ist Lösung.

6.3 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 6.3 aus, in der Sie lineare Gleichungen lösen sollen.
Beispiel:

`Lösen Sie:` $3(5x-4)+2 = 4(3x-2)-6x$

Erwartetes Ergebnis: $x = 2$.

Das Programm erwartet die Eingabe `{2}`.

6.4 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 6.4 aus, in der Sie quadratische Gleichungen lösen sollen.
Beispiel:

`Lösen Sie:` $4x^2+7 = 3(4x+1)$

Erwartetes Ergebnis: $x \in \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Das Programm erwartet die Eingabe $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6.5 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 6.5 aus, in der Sie Gleichungen mit Variablen im Nenner lösen sollen.
Beispiel:

`Lösen Sie:`

$$\frac{9x+1}{8x-24}+2+\frac{x+5}{x-3}=\frac{9x-7}{2x-6}$$

Erwartetes Ergebnis: $x = 7$.

Das Programm erwartet die Eingabe `{7}`.

6.6 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 6.6 aus, in der Sie Gleichungen mit Wurzeln lösen sollen.
Beispiel:

`Lösen Sie:` $\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=2$

Erwartetes Ergebnis: $x = 4$.

Das Programm erwartet die Eingabe `{4}`.

7

Rechnen mit Beträgen

Der Betrag einer reellen Zahl a ist durch $|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ definiert.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \left|-\frac{1}{2}\right| &= -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ |2.5| &= 2.5 \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

Es gelten folgende Regeln:

$$\begin{array}{lrcl} R1) & |a| & = & |-a| \\ R2) & |a| & \geq & 0 \\ R3) & a & \leq & |a| \quad \text{und } -a \leq |a| \\ R4) & |x| & \leq & a \text{ für } a > 0 \text{ genau dann, wenn } -a \leq x \leq a \\ R5) & |a \cdot b| & = & |a| \cdot |b| \\ R6) & |a+b| & \leq & |a| + |b| \end{array}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} |-2 \cdot 3| &= |-6| = 6, \\ &= |-2| \cdot |3| = 2 \cdot 3 = 6; \\ |1-2| &= |-1| = 1, \\ &= |1 + (-2)| \leq |1| + |-2| = 1 + 2 = 3; \\ |-1-2| &= |-3| = 3, \\ &= |(-1) + (-2)| \leq |-1| + |-2| = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Gleichungen mit Beträgen

Treten in einer Bestimmungsgleichung für eine Unbekannte x Beträge auf, so müssen Fallunterscheidungen getroffen werden. Dabei führt jeder Teilterm, der von Betragsstrichen umschlossen ist, zu zwei zu unterscheidenden Fällen, die vom Vorzeichen dieses Terms abhängen. Bei einem Betragsterm sind deshalb 2 Fälle, bei zwei Betragstermen 4 Fälle, bei drei Betragstermen 8 Fälle, allgemein bei n Betragstermen 2^n Fälle zu unterscheiden.

Beispiel 1:

$$|x+6| = 3+2x$$

Diese Gleichung enthält den Betragsterm $|x+6|$. Man erhält die beiden Fälle

(I.) $x+6 \geq 0$:

Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn die Bedingung $x \geq -6$ erfüllt ist.

Jetzt ist $|x+6| = x+6$ und die Gleichung wird zu

$$x+6 = 3+2x$$

mit der Lösungsmenge $x \in \{3\}$. Wegen $3 \geq -6$ ist die Bedingung für diesen Fall erfüllt und 3 ist eine Lösung der Gleichung.

(II.) $x+6 < 0$:

Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn die Bedingung $x < -6$ erfüllt ist.

Jetzt ist $|x+6| = -x-6$ und die Gleichung wird zu

$$-x-6 = 3+2x$$

mit der Lösungsmenge $x \in \{-3\}$. Diesmal ist die Bedingung $-3 < -6$ für diesen Fall *nicht* erfüllt und -3 ist *keine* Lösung der Gleichung.

Insgesamt ist die Lösungsmenge der Gleichung $|x+6| = 3+2x$ gegeben durch $\{2\}$.

Bemerkung: Man kann auch statt des Falles $x+6 \geq 0$ den Fall $x+6 > 0$ analog zu (II.) behandeln. Man erhält $x = 3$ als Lösung. Dann bleibt noch der Sonderfall $x+6 = 0$ zu untersuchen. Die Bedingung lautet nun $x = -6$, und die Gleichung wird zu $0 = 3+2\cdot(-6)$. Diese Gleichung ist nicht erfüllt, $x = -6$ ist keine Lösung.[1]

Beispiel 2:

$$3+|x| = x+2+|x-1|$$

Diese Gleichung enthält die beiden Betragsterme $|x|$ und $|x-1|$, so dass 4 Fälle zu unterscheiden sind:

[1] Diese Vorgehensweise wurde im Repetitorum gewählt, weil dann einheitlich nur Ungleichungen mit $<$ oder $>$ vorkommen.

	$x \geq 0$	
	$x-1 \geq 0$	$x-1 < 0$
Fall	(I.)	(II.)
Bedingung an x	$x \geq 1$	$0 \leq x < 1$
Gleichung ohne $\| \|$	$3+x = x+2+x-1$	$3+x = x+2-x+1$
vereinfacht	$3+x = 2x+1$	$3+x = 3$
Lösungsmenge	$\{2\}$	$\{0\}$
Bedingung prüfen	ja	ja

	$x < 0$	
	$x-1 \geq 0$	$x-1 < 0$
Fall	(III.)	(IV.)
Bedingung an x	unerfüllbar	$x < 0$
Gleichung ohne $\| \|$	entf.	$3-x = x+2-x+1$
vereinfacht		$3-x = 3$
Lösungsmenge		$\{0\}$
Bedingung prüfen		nein

Damit ergibt sich $\{0, 2\}$ als Lösungsmenge.

Ungleichungen

Ungleichungen als Bestimmungsgleichungen für eine Unbekannte x können auf Gleichungen zurückgeführt werden. Dies geschieht in drei Schritten:

1. Die Ungleichung wird so umgeformt, dass auf der rechten Seite Null steht. Dazu ist nur eine Subtraktion der gesamten rechten Seite von beiden Seiten der Gleichung nötig.

2. Das Ungleichheitszeichen wird durch ein Gleichheitszeichen ersetzt und die entstandene Gleichung gelöst.

3. Die Lösungen der Gleichung zerlegen die reelle Achse in mehrere Intervalle, von denen das linkeste und das rechteste jeweils unendlich lang ist. Für jedes Intervall wird durch Einsetzen eines Testwertes aus der ungefähren Mitte des Intervalls und der beiden Intervallgrenzen (bei unendlich langen Intervallen nur der einen Intervallgrenze) geprüft, ob die ursprüngliche Ungleichung erfüllt ist oder nicht. Der Test liefert als Ergebnis jene Intervalle, auf denen die Ungleichung erfüllt ist. Das können ausnahmsweise auch einzelne Punkte sein.

<u>Beispiel 1:</u>

$$x^2 > x + 2$$

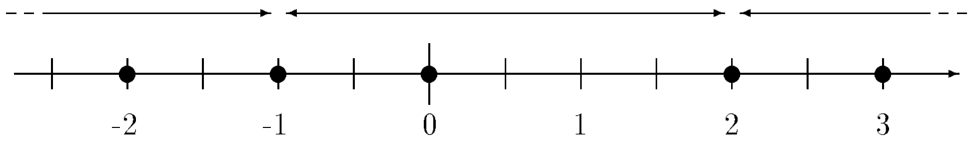
Die drei Schritte werden so durchgeführt:

1.

$$\begin{array}{rcll} x^2 & > & x+2 & \quad \mid \ -(x+2) \\ x^2 - x - 2 & > & 0 & \end{array}$$

2. Es ist die Gleichung
$$x^2 - x - 2 = 0$$
zu lösen. Die Lösungsmenge lautet $\{-1, 2\}$.

3. Die beiden Lösungen zerlegen die reelle Achse in die drei Intervalle $\{-\infty < x \leq -1\}$, $\{-1 \leq x \leq 2\}$ und $\{2 \leq x < -\infty\}$. Als Testwerte zum Einsetzen in $x^2 > x + 2$ werden gewählt $x = -2, -1, 0, 2$ und 3. Dabei können statt -2, 0 und 3 auch andere Werte aus dem Inneren der Intervalle gewählt werden.



Der Test zeigt, dass -2 und 3 die einzigen Werte sind, die die Ungleichung erfüllen. Damit sind die Lösungsintervalle gegeben durch
$$\{-\infty < x < -1, \quad 2 < x < \infty\}.$$

<u>Beispiel 2:</u>
$$x^2 \leq 2x - 1$$

1.
$$\begin{aligned} x^2 &\leq 2x - 1 \qquad\qquad | \ -(2x-1) \\ x^2 - 2x + 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

2. $x^2 - 2x + 1 = 0$ hat als einzige Lösung $x = 1$.

3. Die Intervalle lauten $\{-\infty < x \leq 1\}$ und $\{1 \leq x < \infty\}$, Testwerte sind (z.B.) 0, 1 und 2. Von diesen erfüllt nur $x = 1$ die Ungleichung $x^2 \leq 2x - 1$, er ist Randpunkt der beiden möglichen Intervalle. Daher lautet die Lösungsmenge $\{1\}$.

Ungleichungen mit Beträgen

Enthält eine Bestimmungsgleichung neben Ungleichungen auch Beträge, so ist das vorstehend Gesagte zu kombinieren. Dazu ein

<u>Beispiel:</u>
$$x^2 > |x - 1| + 1$$
Zu unterscheiden sind die Fälle (I.) $x - 1 \geq 0$ und (II.) $x < 0$.

(I.) Unter der Bedingung $x \geq 1$ lautet die Ungleichung
$$x^2 > x - 1 + 1 = x$$
oder
$$x^2 - x > 0.$$

Die zugehörige Gleichung $x^2-x=0$ hat die Lösungen $\{0,1\}$, die Intervalle sind $\{-\infty < x \leq 0\}$, $\{0 \leq x \leq 1\}$ und $\{1 \leq x < \infty\}$, die Testwerte -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1 und 2 zeigen, dass die Intervalle $\{-\infty < x < 0\}$ und $\{1 < x < \infty\}$ die Ungleichung lösen. Es muss aber noch die Bedingung $x \geq 1$ erfüllt sein, und daher ist

$$\{1 < x < \infty\}$$

die erste Teillösung.

> *Bemerkung:* Der Sonderfall $x-1=0$ kann wieder extra behandelt werden. Unter der Bedingung $x=1$ lautet die Ungleichung $1 < 1$. Sie ist nicht erfüllt, $x=1$ ist also keine Lösung.

(II.) Unter der Bedingung $x < 1$ lautet die Ungleichung

$$x^2 > -x+2$$

oder

$$x^2+x-2 > 0.$$

Die zugehörige Gleichung $x^2+x-2=0$ hat die Lösungen $\{-2,1\}$, die Intervalle sind $\{-\infty < x \leq -2\}$, $\{-2 \leq x \leq 1\}$ und $\{1 \leq x < \infty\}$, die Testwerte -3, -2, 0, 1 und 2 zeigen, dass die Intervalle $\{-\infty < x < -2\}$ und $\{1 < x < \infty\}$ die Ungleichung lösen. Es muss aber noch die Bedingung $x < 1$ erfüllt sein, und daher ist

$$\{-\infty < x < -2\}$$

die zweite Teillösung.

Damit ist die Lösungsmenge $\{1 < x < \infty, \quad -\infty < x < -2\}$.

Alternative Vorgehensweise

Man kann Ungleichungen auch analog zu Gleichungen durch äquivalente Umformungen auf Normalformen bringen, aus denen die Lösung direkt abzulesen ist. Dabei ist zu beachten, dass für Ungleichungen die Menge der äquivalenten Umformungen kleiner ist als bei Gleichungen:

- Die Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einem Term ist nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn der Term positiv ist. Enthält der Term die Unbekannte x, so ist das überhaupt nicht im voraus feststellbar! Es müssen dann wieder Fallunterscheidungen vorgenommen werden.

- Das Potenzieren beider Seiten einer Ungleichung ist nur für ungerade Exponenten eine Äquivalenzumformung. Bei geraden Potenzen hat die Lösungsmenge der neuen Ungleichung im allgemeinen überhaupt keinen Zusammenhang mehr mit der ursprünglichen Ungleichung.

  Beispiel:

  $$\begin{array}{rcl} x & < & -1 \qquad \mid \ (\ldots)^2 \\ x^2 & < & 1 \end{array}$$

  Die erste Ungleichung hat als Lösungsmenge das Intervall $\{-\infty < x < -1\}$, die zweite aber $\{-1 < x < 1\}$. Beide Intervalle haben keinen einzigen Punkt gemeinsam!

7.1 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 7.1 aus, in der Sie unbekannte Werte x aus Gleichungen mit Beträgen bestimmen sollen.
Beispiel:

`Finden Sie alle` x`, die die folgende Gleichung erfüllen:`
$|2-x|=3$

Erwartetes Ergebnis: $x \in \{-1, 5\}$.

Das Programm erwartet die Eingabe `{-1,5}`.

7.2 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 7.2 aus, in der Sie unbekannte Werte x aus Ungleichungen mit Beträgen bestimmen sollen.
Beispiel:

`Finden Sie alle` x`, die die folgende Ungleichung erfüllen:`
$|x-48| < \frac{x}{5}$

Erwartetes Ergebnis: $40 < x < 60$.

Das Programm erwartet die Eingabe $\{40 < x < 60\}$.

Anhang A

Bedienung des Repetitoriums

Das Repetitorium nutzt die Möglichkeiten der graphischen Oberfläche von Mathematica 4.0 aus und bietet eine menügesteuerte Bedienung. Die Programmsteuerung erfolgt über Dialoge, Ergebnisse werden in Notebooks dargestellt, und die Eingabe von Formeln in üblicher mathematischer Schreibweise ist möglich.

A.1 Starten und Beenden

Zum Start des Programmes sind folgende Schritte auszuführen:

1. Starten des Mathematica-Programmes unter einem geeigneten Betriebssystem (z.B. Windows, Linux oder auf einem Macintosh-Rechner).

2. Öffnen des Starter-Notebooks `Starter.nb` über das Datei-Menü von Mathematica, siehe Abb. A.1.

Abbildung A.1: *Starter-Notebook*

3. Starten des Repetitoriums durch Klick auf den Button *Starten*.

Daraufhin öffnet sich ein Notebook[1], welches im oberen Teil ein Auswahlmenü mit den Übungen zum Repetitorium enthält (Abb. A.2).

Abbildung A.2: *Notebook mit Auswahlmenü*

Klicken Sie wahlweise auf den $\boxed{\textit{Auswahl}}$-Button oder auf das Dreieck links davon. Es erscheint eine Liste der Übungsteile (Abb. A.3).

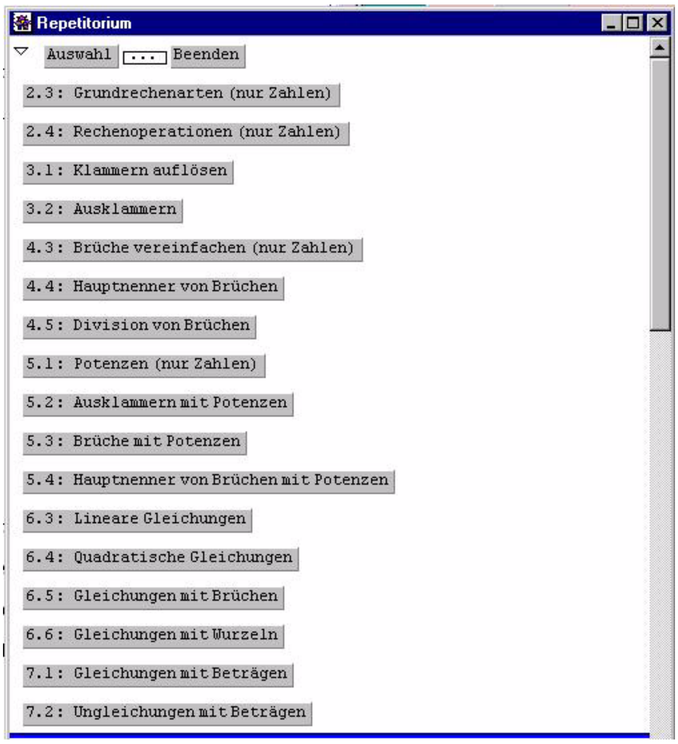


Abbildung A.3: *Auswahlmenü mit Liste der Übungen*

Wählen Sie die gewünschte Übung aus. Es erscheint im unteren Teil des Notebooks ein Dialog, der Ihnen eine zufällig gewählte Übungsaufgabe zur Lösung anbietet.

Nach Auswahl von z.B. $\boxed{\textit{2.3: Grundrechenarten (nur Zahlen)}}$ finden Sie den Dialog wie in Abb. A.4 vor.

Sie sollten die Aufgabe mit Papier und Bleistift lösen, ohne Mathematica zu Hilfe zu nehmen. Ihre Antwort tragen Sie in das Antwortfeld ein und klicken dann auf

[1]Beim ersten Starten des Repetitoriums erscheint ein Dialog, in welchem Mathematica fragt, ob alle Initialisierungszellen evaluiert werden sollen. Beantworten Sie diese Frage mit „ja“.

Abbildung A.4: *Dialog für Übung 2.3*

den Button $\boxed{\textit{Prüfen}}$. Falls Ihre Antwort nicht oder nicht vollständig richtig ist, bekommen Sie die richtige Antwort angezeigt. Dazu wird Ihnen, wenn möglich, eine Hilfestellung angeboten, die einen Hinweis auf die Ursache des Fehlers gibt. Ein Beispiel zeigt Abb. A.5.

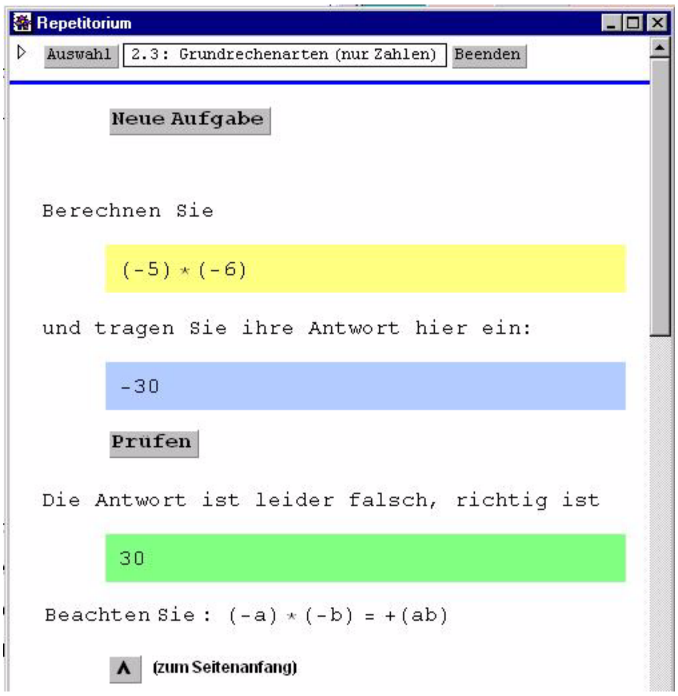


Abbildung A.5: *Ergebnis der Prüfung für Übung 2.3*

Abhängig vom jeweiligen Übungsteil werden Ihnen weitere Möglichkeiten angeboten:

Vorführen: Bei vielen Übungen wird Ihnen eine Vorführung des Lösungsweges angeboten. Klicken Sie einfach auf den Button *Vorführung*, und es öffnet sich ein weiteres Notebook mit einem kommentierten Lösungsweg. Die Abbildungen A.8 bis A.10, ab Seite 46, zeigen ein Beispiel für die Übung 4.3, „Brüche vereinfachen (nur Zahlen)".

Kontrolle: Bei Klick auf diesen Button öffnet sich ein Notebook mit einem Dialog, der es Ihnen ermöglicht, Ihre Zwischenergebnisse in beliebiger Reihenfolge einzugeben und auf Richtigkeit prüfen zu lassen. Bei Fehlern wird Ihnen möglichst wieder eine Hilfestellung gegeben. Die Abbildungen A.11 und A.12, ab Seite 47, zeigen ein Beispiel für die Übung 5.4, „Hauptnenner von Brüchen mit Potenzen".

Beim Lösen von Gleichungen bietet dieser Dialog noch weitere Möglichkeiten:

- Auswahl einer Termumformung und Prüfung des eigenen Umformungsergebnisses auf Korrektheit,
- Übernahme der korrekt umgeformten Gleichung als neue Gleichung für die nächste Umformung
- Prüfung einer beliebigen, nicht im Dialog auswählbaren Umformung,
- Das Repetitorium kann eine Umformung vorschlagen.

Die Abbildungen A.13 bis A.15, ab Seite 48, zeigen ein Beispiel.

Eigene Aufgabe: Sie haben hier Gelegenheit, eine Aufgabe eigener Wahl einzugeben. Damit die Aufgabe akzeptiert wird, muss sie natürlich zum gewählten Übungsteil passen. Sie können dann mit dieser Aufgabe so verfahren wie mit jeder anderen angebotenen Aufgabe auch. Diese Option ist insbesondere dann interessant, wenn man sich Aufgaben aus anderen Quellen vorführen lassen möchte.

Für Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen (Übungen 7.1 und 7.2) erscheint ein Button, der die bequeme Eingabe von Absolutbetragsstrichen ermöglicht. Er wird wie jeder andere Button aus den Paletten von Mathematica verwendet. Eine Vorführung ist nur möglich, wenn die eingegebene Aufgabe höchstens einen Betragsterm enthält. Die Abbildungen A.16 bis A.18, ab Seite 51, zeigen ein Beispiel.

> *Bemerkung:* Der Button *Eigene Aufgabe* gibt das Aufgabenfeld zur Eingabe frei. Nach Auswahl einer anderen Funktion (*Prüfen, Vorführen, ...* ist das Aufgabenfeld wieder gesperrt. Der Button muss vor jedem neuen Editieren erneut gedrückt werden.

Alle sich öffnenden Notebooks besitzen einen Button zum Schließen oder Beenden und können jederzeit verlassen werden. Der *Schließen*-Button des Starter-Notebooks schließt das Starter-Fenster und beendet die Anwendung.

A.2 Paletten und Tastaturkürzel in Mathematica

Vorbemerkung: Zur deutlichen Unterscheidung sind in diesem Abschnitt Terme in mathematischer Schreibweise *kursiv* gesetzt. Eingaben an Mathematica