University of Applied Sciences
Fachhochschule Nordostniedersachsen
Lüneburg
Buxtehude
Suderburg

Arbeitsberichte aus der Informatik

Incl. CD

FInAL
üneburg
rbeitsberichte
formatik
achhochschule Nordostniedersachsen

Computergestütztes Repetitorium der Elementarmathematik

Jürgen Jacobs, Dieter Riebesehl

12. Jahrgang, Heft 4, September 2002, ISSN 0939-8821
Technical Reports and Working Papers
Hrsg: Hinrich E. G. Bonin
Volgershall 1, D-21339 Lüneburg
Phone: xx49.4131.677175 Fax: xx49.4131.677140

Vorwort

Mit diesem Heft wird eine zweite Version des Repetitoriums vorgelegt, die die dringend benötigte graphische Benutzeroberfläche bietet und die es gestattet, Formeln im Formelsatz einzugeben. Die erste Version litt sehr darunter, dass die Eingabe nur zeilenweise im Stil von z.B. FORTRAN erfolgen konnte. Nicht nur war die Eingabe sehr langsam und fehleranfällig, auch die Ausgaben des Programms waren schwer lesbar.

Die Bedienung der neuen Version ist sehr viel flexibler. Durch die Verwendung von Notebooks kann der Benutzer gleichzeitig auf verschiedene Weise an eine gestellte Aufgabe herangehen: er kann parallel zur Prüfung seines Ergebnisses sich die Lösung vorführen lassen und eigene Zwischenschritte zur Kontrolle eingeben. Neben den vom Repetitorium gestellten Aufgaben können auch eigene Aufgabe eingegeben werden.

Der Aufbau dieses Begleitheftes zum Repetitorium ist gleichgeblieben. Kapitel 1-7 des vorliegenden Begleitheftes geben eine knappe Zusammenfassung der behandelten Themengebiete und stellen die zugehörigen Übungsaufgaben vor. Im Anhang wird die Bedienung der neuen Oberfläche erklärt. Teil B des Anhangs erläutert etwas detaillierter, wie das Repetitorium realisiert wurde. Dabei wird auch auf die Programmierung von Dialogen in Notebooks unter Mathematica eingegangen[1]. Allerdings setzt dieser Teil eine gewisse Vertrautheit auch mit tiefergehenden Eigenschaften von Mathematica voraus.

Insgesamt sind die Möglichkeiten des Repetitoriums ganz erheblich erweitert worden. Ich wünsche ihm eine gute Akzeptanz.

Lüneburg, im November 2001 D. Riebesehl

[1] Mathematica ® ist ein Produkt der Wolfram Research, Inc.

Vorwort zur 1. Version

Das computergestützte Repetitorium der Elementarmathematik wendet sich an Studierende, die ihre Kenntnisse in der Schulmathematik auffrischen und überprüfen wollen.

Kapitel 1-7 des vorliegenden Begleitheftes geben eine knappe Zusammenfassung der behandelten Themengebiete und stellen die zugehörigen Übungsaufgaben vor. Anhang A erklärt die Bedienung des Lernprogrammes. Interessierte finden darüber hinaus in Anhang B Bemerkungen zum Aufbau des Programms.

Die Entwicklung des Repetitoriums geschah in der Absicht, Schwächen handelsüblicher Lernprogramme zu überwinden. Die uns bekannten Lernprogramme

- behandeln lediglich eine kleine Zahl feststehender Aufgaben,
- erlauben nur eine starre Führung des Benutzers entlang eines vorgegebenen Lösungsweges,
- aktzeptieren nicht jede richtige, sondern nur vorgesehene Eingaben und
- geben keine Fehlerhinweise.

Aus Zeitgründen musste dagegen leider auf die Berücksichtigung lernpsychologischer Elemente und die Bereitstellung einer komfortablen Benutzerschnittstelle verzichtet werden. Wir hoffen, dass dies der Verwendung des Repetitoriums keinen Abbruch tut.

Lüneburg, im Januar 1996 J. Jacobs, D. Riebesehl

Inhaltsverzeichnis

1

Zahlbereiche

1.1 Die natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet. Sie besteht aus den Zahlen 0, 1, 2, 3 usw. Man schreibt dafür

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Die Addition, d.h. die Operation $+$, und die Multiplikation, d.h. die Operation $\cdot$, sind in $\mathbb{N}$ unbeschränkt durchführbar. Das Ergebnis der Addition oder Multiplikation beliebiger natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.

Dies gilt jedoch nicht für die Subtraktion ($-$) und die Division (:).
Beispiele:

$5 - 2$ ist eine natürliche Zahl, nämlich 3, nicht aber $5 - 7$.
$8 : 2$ ist eine natürliche Zahl, nämlich 4, nicht aber $8 : 5$.

1.2 Die ganzen Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Sie besteht aus den natürlichen Zahlen und den negativen ganzen Zahlen $-1,\ -2,\ -3$ usw. Man schreibt dafür

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Die natürlichen Zahlen außer 0 werden auch positive ganze Zahlen genannt, und man schreibt zuweilen $+1$ anstelle von 1, $+2$ anstelle 2 usw.

Innerhalb der ganzen Zahlen ist nun neben der Addition und der Multiplikation auch die Subtraktion unbeschränkt durchführbar. Z.B. kann nun die Differenz $5 - 7$ zu -2 berechnet werden. Die Division ist weiterhin nicht unbeschränkt durchführbar.

1.3 Die rationalen Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Sie besteht aus Brüchen $\frac{p}{q}$, wobei p eine ganze Zahl und q eine ganze Zahl außer 0 ist. Formal:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

p heißt Zähler des Bruches $\frac{p}{q}$, und q heißt Nenner.

Wegen $\frac{p}{1} = p$ sind die ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}$ enthalten. Innerhalb von $\mathbb{Q}$ ist nun jede der Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ unbeschränkt durchführbar. Z.B. kann $8 : 5$ zu der rationalen Zahl $\frac{8}{5}$ berechnet werden.

Rationale Zahlen können durch Dezimalbrüche dargestellt werden.
Beispiel:

$$\frac{8}{5} = 8 : 5 = 1.6$$

In manchen Fällen entsteht eine nicht abbrechende Dezimalzahl.
Beispiele:

$$\begin{aligned} \frac{209}{90} &= 209 : 90 = 2.3222\ldots \\ \frac{7}{11} &= 7 : 11 = 0.636363\ldots \end{aligned}$$

In den letzten beiden Beispielen wiederholt sich ab einer bestimmten Stelle nach dem Dezimalpunkt eine bestimmte Ziffer oder Ziffernkombination unendlich oft. Man nennt eine solche Dezimalzahl periodisch. Die sich wiederholende Ziffernkombination heißt Periode und wird durch Überstreichung gekennzeichnet, man schreibt

$$\begin{aligned} 2.3222\ldots &= 2.3\overline{2} \\ 0.636363\ldots &= 0.\overline{63} \end{aligned}$$

Es gilt allgemein: Eine rationale Zahl läßt sich als abbrechende Dezimalzahl oder als periodische, nicht abbrechende Dezimalzahl darstellen.

Obwohl alle Rechenoperationen innerhalb der rationalen Zahlen unbeschränkt durchführbar sind, läßt sich nicht jede Rechenaufgabe lösen. Z.B. gibt es keine rationale Zahl x, für die gilt $x \cdot x = 2$.

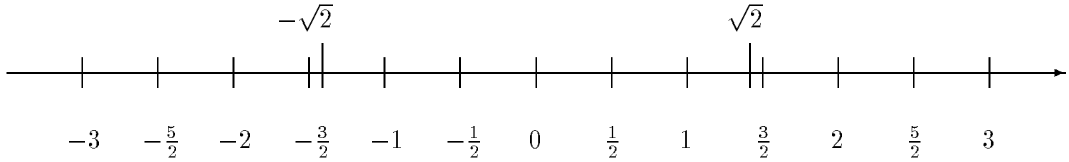
1.4 Die reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet. Sie umfasst die rationalen Zahlen, sowie nicht abbrechende Dezimalzahlen, die nicht periodisch sind. Die nicht periodischen, nicht abbrechenden Dezimalzahlen heißen irrationale Zahlen.

Mit den reellen Zahlen läßt sich im Gegensatz zu den rationalen Zahlen die Aufgabe $x \cdot x = 2$ lösen. Genauer: Es gibt zwei Lösungen, die mit $\sqrt{2}$ (bzw. $2^{\frac{1}{2}}$) und $-\sqrt{2}$ (bzw. $-2^{\frac{1}{2}}$) bezeichnet werden.

Dagegen ist auch mit den reellen Zahlen die Aufgabe $x \cdot x = -1$ nicht lösbar. Eine entsprechende Zahlbereichserweiterung führt zu den komplexen Zahlen, die hier jedoch nicht besprochen werden sollen.

Die Menge der reellen Zahlen läßt sich alternativ als Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden auffassen:



Zahlen, die durch Punkte rechts bzw. links vom Nullpunkt repräsentiert werden, heißen positiv bzw. negativ. Die reelle Zahl $-a$ entsteht durch Spiegelung der Zahl a am Nullpunkt und umgekehrt.

Ordnungsstruktur

Die reelle Zahl a heißt kleiner (bzw. größer) als die reelle Zahl b, falls a auf der Zahlengeraden links (bzw. rechts) von b angeordnet ist. Man schreibt:

$a < b$, falls a kleiner als b ist. Z.B. $-\sqrt{2} < -1$.
$a > b$, falls a größer als b ist. Z.B. $\frac{1}{2} > -2$.
$a \leq b$, falls $a < b$ oder $a = b$ ist.
$a \geq b$, falls $a > b$ oder $a = b$ ist.

Betrag

Der Betrag einer reellen Zahl a ist der Abstand des Punktes a vom Nullpunkt, d.h.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ positiv ist,} \\ 0, & \text{falls } a = 0 \text{ ist,} \\ -a, & \text{falls } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Praktisch erhält man den Betrag einer reellen Zahl, indem man ein eventuell vorhandenes negatives Vorzeichen wegläßt.
<u>Beispiele:</u>

$$\begin{aligned} \left|-\frac{1}{2}\right| &= -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \left|\frac{1}{2}\right| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2

Grundrechenarten

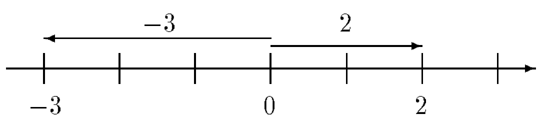
In dem Ausdruck $-7-3$ haben die auftretenden Symbole „$-$“ unterschiedliche Bedeutungen. Das erste Auftreten dient als Vorzeichen zur Kennzeichnung der negativen ganzen Zahl -7, und das zweite dient zur Kennzeichnung der Rechenoperation Subtraktion. In dem Ausdruck $-(3-5)$ schließlich dient das erste Auftreten von „$-$“ zur Kennzeichnung der Negation als Rechenoperation, die positive Zahlen in negative überführt und umgekehrt.

Zur deutlichen Unterscheidung zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen innerhalb arithmetischer Ausdrücke werden vorerst alle reellen Zahlen – auch die positiven – mit Vorzeichen versehen und samt Vorzeichen in Klammern eingeschlossen. Wir schreiben also statt $-7-3$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vorzeichen}}}{(-7)} \overset{\substack{\text{Rechenzeichen} \\ \downarrow}}{-} \underset{\substack{\uparrow \\ }}{(+3)}$$

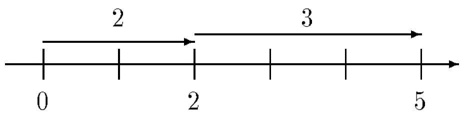
2.1 Addition und Multiplikation

Die Addition soll mit Hilfe der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Eine reelle Zahl wird zu diesem Zweck abweichend von Abschnitt 1 nicht als ein bestimmter Punkt auf der Zahlengeraden, sondern als Pfeil vom Nullpunkt bis zu diesem Punkt dargestellt. Positive Zahlen werden also durch einen nach rechts gerichteten Pfeil, negative durch einen nach links gerichteten gekennzeichnet.
<u>Beispiel:</u>

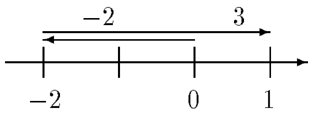


Zur Bestimmung von a+b wird der Anfang von dem zu b gehörigen Pfeil an die Spitze des zu a gehörigen Pfeils gesetzt. Die Spitze von b zeigt danach auf das Ergebnis.
<u>Beispiele:</u>

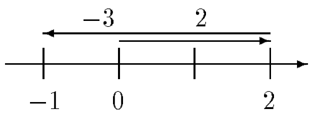
$$(+2) + (+3) = +5$$



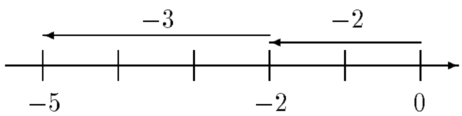
$$(-2) + (+3) = +1$$



$$(+2) + (-3) = -1$$



$$(-2) + (-3) = -5$$



Obige Ergebnisse sind Beispiele für folgende allgemeine Regeln, in denen a und b für positive ganze Zahlen stehen:

$$\begin{array}{llcll}
\text{R1)} & (+a) + (+b) & = & +(a+b), & \\
\text{R2)} & (-a) + (+b) & = & -(a-b) & \text{für} \quad a \geq b, \\
 & & = & +(b-a) & \text{für} \quad a \leq b, \\
\text{R3)} & (+a) + (-b) & = & +(a-b) & \text{für} \quad a \geq b, \\
 & & = & -(b-a) & \text{für} \quad a \leq b, \\
\text{R4)} & (-a) + (-b) & = & -(a+b). &
\end{array}$$

Mit Hilfe dieser Regeln kann die Addition von reellen Zahlen immer auf die Addition oder Subtraktion positiver reeller Zahlen mit positivem Ergebnis zurückgeführt werden.
<u>Beispiel:</u> Die Berechnung von $(+2) + (-3)$ erfolgt mit $a = 2$ und $b = 3$ nach <u>Regel R3)</u>, wegen $b \geq a$ erhält man

$$(+2) + (-3) = -(b-a) = -(3-2) = -1$$

Die Subtraktion läßt sich auf die Addition zurückführen, wenn man beachtet, dass für jede reelle Zahl a gilt

$$-(-b) = +b \quad \text{und} \quad -(+b) = -b$$

Damit wird z.B.

$$
\begin{aligned}
(+a)-(+b) &= (+a)+(-b) = \begin{cases} +(a-b) & \text{für } a \geq b \\ -(b-a) & \text{für } a \leq b \end{cases} \\
(-a)-(-b) &= (-a)+(+b) = \begin{cases} -(a-b) & \text{für } a \geq b \\ +(b-a) & \text{für } a \leq b \end{cases} \\
&\text{usw.}
\end{aligned}
$$

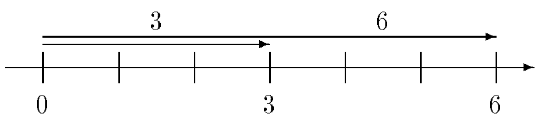
Beispiele:

$$
\begin{aligned}
(+2)-(+3) &= -(3-2) = -1 \\
(-2)-(+3) &= -(2+3) = -5 \\
(+2)-(-3) &= +(2+3) = +5 \\
(-2)-(-3) &= +(3-2) = +1
\end{aligned}
$$

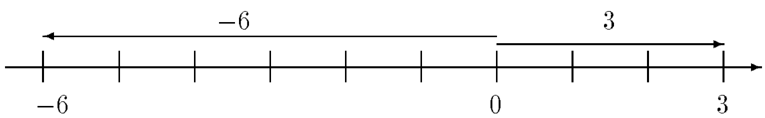
2.2 Multiplikation und Division

Die Multiplikation $a \cdot b$ kann durch eine Streckung des zu b gehörigen Pfeils auf das $|a|$-fache und anschließender Umkehrung des Pfeiles für negatives a veranschaulicht werden. Der Ergebnispfeil geht dabei immer vom Nullpunkt der Zahlengeraden aus.
Beispiele:

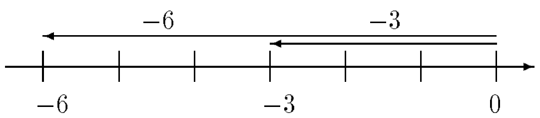
$$(+2) \cdot (+3) = +6$$



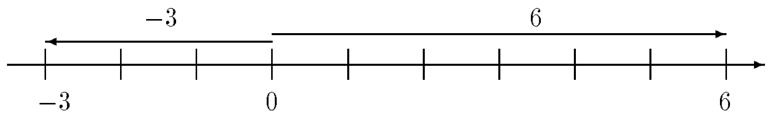
$$(-2) \cdot (+3) = -6$$



$$(+2) \cdot (-3) = -6$$



$$(-2) \cdot (-3) = +6$$



Obige Ergebnisse sind Beispiele für folgende Regeln:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{R9)} & (+a) \cdot (+b) & = & +(a \cdot b) \\
\text{R10)} & (-a) \cdot (+b) & = & -(a \cdot b) \\
\text{R11)} & (+a) \cdot (-b) & = & -(a \cdot b) \\
\text{R12)} & (-a) \cdot (-b) & = & +(a \cdot b)
\end{array}$$

Mit Hilfe dieser Regeln läßt sich die Multiplikation beliebiger reeller Zahlen immer auf die Multiplikation positiver reeller Zahlen zurückführen.
Beispiel: Zur Berechnung von $(-2) \cdot (+3)$ berechnet man $2 \cdot 3 = 6$ und fügt nach Regel R10) das Vorzeichen $-$ hinzu.

Für die Division existieren entsprechende Regeln. Man muss $b \neq 0$ voraussetzen, da die Division durch 0 nicht erlaubt ist:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{R13)} & (+a) : (+b) & = & +(a : b) \\
\text{R14)} & (-a) : (+b) & = & -(a : b) \\
\text{R15)} & (+a) : (-b) & = & -(a : b) \\
\text{R16)} & (-a) : (-b) & = & +(a : b)
\end{array}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{rcl}
(+3) : (+2) & = & +(3 : 2) = 1.5 \\
(-3) : (+2) & = & -(3 : 2) = -1.5
\end{array}$$

Werden mehr als zwei Zahlen durch Rechenoperationen verknüpft, so wird die Ausführungsreihenfolge der einzelnen Rechenoperationen durch Klammerung gekennzeichnet.
Beispiel:

$$\underbrace{((+3) + \underbrace{((-2) - (-1)))}_{a}}_{b} \cdot (-3)$$

Zunächst berechnet man

$$a = (-2) - (-1) = -1,$$

daraus erhält man

$$b = (+3) + \underbrace{(-1)}_{a} = +2$$

und schließlich das Endergebnis

$$\underbrace{(+2)}_{b} \cdot (-3) = -6$$

2.3 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 2.3 zur Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division zweier ganzer Zahlen aus.
Beispiel:

`Bestimmen Sie` $(-8) : (-4)$.

Erwartetes Ergebnis: 2, *nicht* aber $\frac{4}{2}$

2.4 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 2.4 zur kombinierten Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mehrerer ganzer Zahlen aus.
Beispiel:

`Bestimmen Sie` $(-3) - (((+2) - (-2)) \cdot (-5))$.

Erwartetes Ergebnis: 23

3

Klammerrechnung

Arithmetische Ausdrücke, die Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen enthalten, können mit Hilfe folgender Gesetze umgeformt werden[1]:

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$R1)$	$x + y = y + x$	Kommutativgesetz der Addition
$R2)$	$x \cdot y = y \cdot x$	Kommutativgesetz der Multiplikation
$R3)$	$x + (y + z) = (x + y) + z$	Assoziativgesetz der Addition
$R4)$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$R5)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$	Distributivgesetze

Die Assoziativgesetze besagen, dass bei der Addition oder Multiplikation mehrerer reeller Zahlen die Reihenfolge, in der die Zahlen addiert oder multipliziert werden, keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.
Beispiele:[2]

$$\begin{array}{rrcl} \text{a)} & (-3) + (1 + (-4)) & = & (-3) + (-3) = -6 \\ & ((-3) + 1) + (-4) & = & (-2) + (-4) = -6 \\ \text{b)} & (-3) \cdot ((-2) \cdot 4) & = & (-3) \cdot (-8) = 24 \\ & ((-3) \cdot (-2)) \cdot 4 & = & 6 \cdot 4 = 24 \end{array}$$

Daher wird die Klammerung bei der Addition und Multiplikation häufig nicht angegeben. Man schreibt also

$$(-3) + 1 + (-4)$$

[1] Die Division wird erst in Abschnitt 4 behandelt
[2] Ab nun wird das „+“-Vorzeichen bei positiven Zahlen weggelassen.

anstelle von sowohl

$$((-3)+1)+(-4) \quad \text{als auch} \quad (-3)+(1+(-4))$$

bzw.

$$(-3)\cdot(-2)\cdot 4$$

anstelle von sowohl

$$((-3)\cdot(-2))\cdot 4 \quad \text{als auch} \quad (-3)\cdot((-2)\cdot 4)$$

Achtung:
Es gilt *nicht* $x-(y-z)=(x-y)-z$ und auch *nicht* $x:(y:z)=(x:y):z$.
Beispiele:

$$\begin{aligned} 8-(4-2) &= 8-2=6 \\ (8-4)-2 &= 4-2=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8:(4:2) &= 8:2=4 \\ (8:4):2 &= 2:2=1 \end{aligned}$$

Um auch in diesen Fällen Klammern einsparen zu können, werden folgende Kurzschreibweisen vereinbart:

$$\begin{array}{lcll} x-y-z & := & (x-y)-z, & \text{verschieden von } x-(y-z) \\ x+y-z & := & (x+y)-z, & \text{aber gleich mit } x+(y-z) \\ x-y+z & := & (x-y)+z, & \text{verschieden von } x-(y+z) \end{array}$$

Hier und entsprechend bei mehr als drei Operanden ist also die Klammerung der Rechenzeichen von links nach rechts durchzuführen, wenn explizit keine Klammern gesetzt sind:

$$a-b+c-d=(a-b)+c-d=((a-b)+c)-d$$

Mittels dieser Regeln spart man soweit als möglich Klammern ein. Üblicherweise werden positive Vorzeichen gar nicht geschrieben. Negative Vorzeichen werden nur dann mit Klammern geschrieben, wenn sonst Zeichenfolgen der Form „$+-$“, „$--$“ oder „$\cdot-$“ entstehen würden.
Beispiele[3]:
Niemals $1+-4$, sondern stets $1+(-4)$;
niemals $1\cdot(+4)$, sondern stets $1\cdot 4$;
niemals $1\cdot -4$, sondern stets $1\cdot(-4)$;

Durch die Konvention, dass die Operation „$\cdot$“ stärker „bindet“ als die Operationen „$+$“ und „$-$“ („*Punktrechnung geht vor Strichrechnung*“), lassen sich ebenfalls Klammern in arithmetischen Ausdrücken einsparen.
Beispiele:

$$\begin{aligned} 3\cdot 2+4\cdot 5 &:= (3\cdot 2)+(4\cdot 5), \\ -3\cdot 5+2\cdot 4+6\cdot(-2) &:= ((-3\cdot 5)+(2\cdot 4))+(6\cdot(-2)), \\ (-3\cdot 5+2\cdot 4)\cdot 6 &:= ((-3\cdot 5)+(2\cdot 4))\cdot 6 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes läßt sich der letzte Ausdruck der vorigen Beispiele in einen Ausdruck ohne Klammern umformen:

$$(-3 \cdot 5 + 2 \cdot 4) \cdot 6 = -3 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 6$$

Die Rechenzeichen „+“ und „·“ in den Distributivgesetzen können i.a. nicht durch andere ersetzt werden, d.h.

es gilt *nicht* $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1 + (2 \cdot 3) &= 1 + 6 = 7 \\ \text{aber } (1 + 2) \cdot (1 + 3) &= 3 \cdot 4 = 12, \end{aligned}$$

es gilt *nicht* $x + (y - z) = (x + y) - (x + z)$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1 + (2 - 3) &= 1 + (-1) = 0 \\ \text{aber } (1 + 2) - (1 + 3) &= 3 - 4 = -1, \end{aligned}$$

es gilt *nicht* $x : (y + z) = (x : y) + (x : z)$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 12 : (2 + 4) &= 12 : 6 = 2 \\ \text{aber } (12 : 2) + (12 : 4) &= 6 + 3 = 9. \end{aligned}$$

Weitere Regeln zur Elimination von Klammern sind

$$\begin{array}{lrcl} R6) & -(-a) & = & +a \\ R7) & -(+a) & = & -a \\ R8) & -(a + b) & = & -a - b \\ R9) & -(a - b) & = & -a + b \\ R10) & a + (-b) & = & a - b \\ R11) & a - (-b) & = & a + b \\ R12) & (-a) \cdot (-b) & = & a \cdot b \end{array}$$

Beispiele:

$$3 + (-(-(-1))) \stackrel{\text{R6}}{=} 3 + (-(+1)) \stackrel{\text{R7}}{=} 3 + (-1) \stackrel{\text{R10}}{=} 3 - 1 = 2,$$

$$\begin{aligned} a + (b - c) &\stackrel{\text{R10}}{=} a + (b + (-c)) \\ &\stackrel{\text{R3}}{=} (a + b) + (-c) \\ &\stackrel{\text{R10}}{=} (a + b) - c \\ &= a + b - c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - (b - c) &\stackrel{\text{R10}}{=} a + (-(b - c)) \\ &\stackrel{\text{R9}}{=} a + (-b + c) \\ &\stackrel{\text{R3}}{=} (a + (-b)) + c \\ &\stackrel{\text{R10}}{=} (a - b) + c \\ &= a - b + c, \end{aligned}$$

$$-(a+5\cdot b-3\cdot c+d)=-a-5\cdot b+3\cdot c-d,$$

wobei das letzte Ergebnis vollständig geklammert so aussieht:

$$(((-a-5\cdot b)+3\cdot c)-d).$$

Als Anwendungsbeispiel sollen die binomischen Formeln hergeleitet werden[4]:

$$\begin{array}{lrcl} R13) & (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ R14) & (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ R15) & (a+b)(a-b) & = & a^2-b^2 \end{array}$$

Bemerkung: Die Schreibweise x^2 bedeutet $x\cdot x$, ebenso $x^3 := x\cdot x\cdot x$ usw.

Beweis zu R12):

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b) \\ &= (a+(-b))\cdot(a+(-b)) \\ &= a\cdot a+a\cdot(-b)+(-b)\cdot a+(-b)\cdot(-b) \\ &= a^2-a\cdot b-b\cdot a+b\cdot b \\ &= a^2-2ab+b^2 \end{aligned}$$

Beweis zu R13):

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= (a+b)\cdot(a+(-b)) \\ &= a\cdot a+a\cdot(-b)+b\cdot a+b\cdot(-b) \\ &= a^2-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b \\ &= a^2-b^2 \end{aligned}$$

3.1 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 3.1 zum Entfernen von Klammern aus arithmetischen Ausdrücken aus.

Beispiel:

`Entfernen Sie die Klammern:` $(x+2)(2x-9)^2-((3-x)+y)(y-1)$

Erwartetes Ergebnis: $4x^3-28x^2+xy-y^2+8x-2y+165$, oder die gleichen Summanden in anderer Reihenfolge.

3.2 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 3.2 zum Ausklammern von Faktoren aus arithmetischen Ausdrücken aus.

Beispiel:

`Klammern Sie Faktoren aus:` $4x^2-24x+36$

Erwartetes Ergebnis: $4(x-3)^2$, oder $4(x^2-6x+9)$, nicht aber $2(2x^2-12x+18)$.

[4]Üblicherweise schreibt man das Rechenzeichen „·" nur zwischen Zahlen, nicht zwischen Variablen oder Variablen und Zahlen

4

Bruchrechnung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Dann wird mit $a : b$ und mit $\frac{a}{b}$ die Zahl bezeichnet, die mit b multipliziert a ergibt,

$$b \cdot \frac{a}{b} = b \cdot (a : b) = a.$$

In $\frac{a}{b}$ heißt a Zähler und b Nenner des Bruches. Für Zahlen mit Vorzeichen gelten folgende Regeln:

$$R1) \quad \frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

$$R2) \quad \frac{-a}{+b} = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

<u>Beispiele:</u>

$$-\frac{3}{2-x} = \frac{-3}{2-x} = \frac{-3}{-(-2+x)} = \frac{3}{-2+x} = \frac{3}{x-2}$$

4.1 Addition und Subtraktion

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Brüche mit gleichem Nenner heißen gleichnamig. Für sie gelten die Regeln

$$R3) \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$R4) \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

<u>Beispiele:</u>

$$\frac{5}{9} + \frac{-7}{9} = \frac{5+(-7)}{9} = \frac{5-7}{9} = \frac{-2}{9} = -\frac{2}{9},$$

oder

$$\frac{5}{9} + \frac{-7}{9} = \frac{5}{9} + (-\frac{7}{9}) = \frac{5}{9} - \frac{7}{9} = \frac{5-7}{9},$$

und weiter wie zuvor.

Nicht gleichnamige Brüche werden durch Erweitern gleichnamig gemacht:

$$R5) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

für jede von Null verschiedene Zahl $k \in \mathbb{R}$.
Beispiele:

$$-\frac{1}{4} + \frac{2}{6} = \frac{-1}{4} + \frac{2}{6} \overset{R5}{=} \frac{-1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{-3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{-3+2}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{c+d}{-e} &= \frac{a}{b} + \frac{c+d}{e} \\ &= \frac{a \cdot e}{b \cdot e} + \frac{(c+d) \cdot b}{e \cdot b} \\ &= \frac{ae + (c+d)b}{be} \\ &= \frac{ae + cb + db}{be} \end{aligned}$$

Die Erweiterungsregel R5) kann auch „von hinten nach vorn“ gelesen werden. Man spricht dann von Kürzung.
Beispiele:

$$\frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{ab + bc}{bd} = \frac{b(a+c)}{b \cdot d} = \frac{a+c}{d}$$

Achtung:

Es gilt *nicht* $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}$.
Beispiel:[1]

$$\begin{aligned} \frac{8+4}{4+2} &= \frac{12}{6} = 2, \text{ aber} \\ \frac{8}{4} + \frac{4}{2} &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

4.2 Multiplikation und Division

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Dann gilt

$$R3) \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ist zusätzlich $c \neq 0$, dann gilt

$$R4) \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

[1] Aber (kleiner Scherz): $\dfrac{9 + (-4)}{3+2} = \dfrac{9}{3} + \dfrac{-4}{2} = 3 - 2 = 1.$

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} &= -\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = -\frac{1\cdot 2}{3\cdot 3} = -\frac{2}{9}\\
8\cdot\frac{3}{4} &= \frac{8}{1}\cdot\frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6\\
\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{7}} &= \frac{3\cdot 7}{2\cdot 1} = \frac{21}{2}\\
\frac{2}{\frac{1}{2}} &= 2\cdot\frac{2}{1} = 2\cdot 2 = 4
\end{aligned}
$$

4.3 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 4.3 zum Umwandeln einer Summe oder Differenz von Brüchen in einen einzigen Bruch aus.
Beispiel:

`Schreiben Sie als einen Bruch:` $\frac{7}{2} - 3\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{7}\right)$

Erwartetes Ergebnis: $\frac{85}{56}$.

4.4 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 4.4 zum Umwandeln einer Summe oder Differenz von Brüchen in einen einzigen Bruch aus. Die Ausdrücke enthalten auch Variable. Das Ergebnis soll ohne Klammern geschrieben sein und soweit wie möglich gekürzt werden.
Beispiel:

`Schreiben Sie als einen Bruch:` $\frac{2x-y}{2x-2y} - \frac{x-y}{3x+3y} + \frac{y(3y-x)}{3x^2-3y^2}$

Erwartetes Ergebnis: $\frac{4x+y}{6x-6y}$ oder $\frac{4x^2+5xy+y^2}{6x^2-6y^2}$.

4.5 Übung

Führen Sie jetzt die Übung 4.5 zum Umwandeln eines Produkts oder Quotienten von Brüchen in einen einzigen Bruch aus. Das Ergebnis soll ohne Klammern geschrieben sein und soweit wie möglich gekürzt werden.
Beispiel:

`Schreiben Sie als einen Bruch:` $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$

Erwartetes Ergebnis: $\dfrac{x+y}{y-x}$.

5

Potenzrechnung

Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b > 0$. Dann gilt

$$\begin{array}{lrcl}
R1) & a^x \cdot a^y & = & a^{x+y} \\
R2) & \dfrac{a^x}{a^y} & = & a^{x-y} \\
R3) & (a^x)^y = (a^y)^x & = & a^{x \cdot y} \\
R4) & a^x \cdot b^x & = & (a \cdot b)^x \\
R5) & \dfrac{a^x}{b^x} & = & \left(\frac{a}{b}\right)^x
\end{array}$$

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{array}{rcl}
2^3 \cdot 2^2 & = & 2^{3+2} = 2^5 \\
2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} & = & 2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 2^2 \\
\dfrac{2^3}{2^2} & = & 2^{3-2} = 2^1 = 2 \\
\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2} & = & 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \\
(2^3)^2 & = & 2^{3 \cdot 2} = 2^6 \\
2^2 \cdot 3^2 & = & (2 \cdot 3)^2 = 6^2 \\
\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 4^2 & = & \left(\dfrac{1}{2} \cdot 4\right)^2 = 2^2 \\
\dfrac{2^2}{3^2} & = & \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \\
\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4^2} & = & \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{8}\right)^2
\end{array}$$

Bemerkungen:

1. In dem Ausdruck a^x heißt a Basis und x Exponent. a^x ist i.a. nur für eine positive Basis $a > 0$ definiert.

   Ausnahmen:

   (a) Ist der Exponent positiv ($x > 0$), so darf die Basis Null sein. Es gilt

   $$0^x = 0 \text{ für } x > 0$$

   (b) Ist der Exponent eine ganze Zahl, so darf die Basis eine beliebige reelle Zahl außer Null sein. Es gilt für $a \neq 0$:

   $$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= 1 \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n > 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \text{ für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   Beispiele: (*Man beachte die Wirkung der Klammern!*)

   $$\begin{aligned} (-2)^3 &= -8 \\ (-2)^4 &= 16 \\ -2^4 &= -16 \\ (-2)^{-2} &= \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} \\ -2^{-2} &= -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

   (c) Ist der Exponent von der Form $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und ungerade, so darf die Basis eine beliebige reelle Zahl außer Null sein. Es gilt für $a < 0$ und ungerades $n \in \mathbb{N}$

   $$a^{\frac{1}{n}} = -(|a|^{\frac{1}{n}}).$$

   Beispiel:

   $$(-8)^{\frac{1}{3}} = -(8^{\frac{1}{3}}) = -2$$

   Achtung: Die Potenzgesetze gelten u.U. nicht für negative Basen und gebrochene Exponenten!
   Beispiel:

   $$-1 = (-1)^3 = (-1)^{\frac{6}{2}} \overset{R3?}{\neq} ((-1)^6)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

2. Die Potenz $a^{\frac{1}{n}}$ für $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist diejenige *positive* Zahl, welche zur n-ten Potenz erhoben die Zahl a ergibt.
   Beispiel:

   $$4^{\frac{1}{2}} = 2 \text{ wegen } 2^2 = 4$$